Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 2. С. 252–263

УДК 512.58
MSC2020 20M30, 18M05

© В. К. Симаков[1]

Полнота категории отделимых пространств Чу

В работе рассматривается категория $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ отделимых пространств Чу над категорией множеств **Set**. Задается конструкция предела произвольного функтора в категорию пространств Чу над категорией множеств, когда его образы на объектах — это отделимые пространства Чу. Доказывается полнота категории $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$; приводятся конструкции уравнителей, произведений и расслоенных произведений в этой категории. Показывается, что копределы отделимых пространств Чу не всегда являются отделимыми пространствами Чу, но при этом копроизведения отделимых пространств Чу в категории $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ существуют для любых отделимых пространств Чу.

Ключевые слова: *категория пространств Чу, отделимые пространства Чу, предел, уравнитель, произведение, копредел, коуравнитель, копроизведение.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202322

Введение

В работе Po Hsiang Chu [1] была введена конструкция, позволяющая по заданной замкнутой симметричной моноидальной категории $\mathcal{V}$ и фиксированному объекту $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ построить категорию, обозначаемую $\mathrm{Chu}(\mathcal{V}, D)$, которая является $\star$-автономной. Объектами категории $\mathrm{Chu}(\mathcal{V}, D)$, т.е. пространствами Чу, называются морфизмы $r : A \otimes X \to D$ категории $\mathcal{V}$, где $A, X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, $\otimes \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ — произведение на категории $\mathcal{V}$. Для двух пространств Чу $r_1 : A_1 \otimes X_1 \to D$ и $r_2 : A_2 \otimes X_2 \to D$ морфизмом $r_1 \to r_2$ называется любая пара (f, g) морфизмов категории $\mathcal{V}$, где $f : A_1 \to A_2$, $\mathrm{g} : X_2 \to X_1$, такая, что $r_1 \circ (1_{A_1} \otimes \mathrm{g}) = r_2 \circ (f \otimes 1_{X_2})$.

В работе [2] рассматривались две категории пространств Чу для случая, когда $\mathcal{V}$ — это категория **S-Act** полигонов над S, где S — это коммутативный моноид. Одна из них — это категория $\mathrm{Chu}(\mathbf{S\text{-}Act}, D)$, другая — категория $\mathrm{Chu}(\mathbf{S\text{-}Act})$, которая отличается от первой тем, что объект D в определении пространства Чу $r : A \otimes X \to D$ не фиксируется, а морфизмом пространств Чу $r_1 : A_1 \otimes X_1 \to D_1$ и

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: valentin.simakov@yahoo.com

$r_2 : A_2 \otimes X_2 \to D_2$ называется любая тройка (f, g, h) морфизмов категории $\mathcal{V}$, где $f : A_1 \to A_2$, $\mathrm{g} : X_2 \to X_1$, $h : D_1 \to D_2$, такая, что $h \circ r_1 \circ (1_{A_1} \otimes \mathrm{g}) = r_2 \circ (f \otimes 1_{X_2})$.

В данной работе рассматриваются категория Chu(**Set**) пространств Чу над категорией множеств и категория $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ отделимых пространств Чу над категорией множеств. Ясно, что категория Chu(**Set**) совпадает с категорией Chu(**S-Act**), если S — это одноэлементный моноид. Поэтому для категории Chu(**Set**) вопросы существования уравнителей, коуравнителей, копроизведений и расслоенных сумм решены в [2–4]. В этой работе задается конструкция предела произвольного функтора в категорию пространств Чу над категорией множеств, когда его образы на объектах — это отделимые пространства Чу. Доказывается полнота категории $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$; задаются конструкции уравнителей, произведений и расслоенных произведений в этой категории. Показывается, что копределы отделимых пространств Чу не всегда являются отделимыми пространствами Чу, но копроизведения отделимых пространств Чу в категории $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ существуют для любых отделимых пространств Чу.

1. Предварительные сведения

Пространством Чу [1] называется любое отображение вида W $r : A \times X \to D$, где A, X, D — множества. Пусть $r_1 : A_1 \times X_1 \to D_1$, $r_2 : A_2 \times X_2 \to D_2$, $r_3 : A_3 \times X_3 \to D_3$ — пространства Чу. *Преобразованием Чу* [2] из r_1 в r_2 называется всякая тройка (f, g, h) отображений множеств, где $f : A_1 \to A_2$, $\mathrm{g} : X_2 \to X_1$, $h : D_1 \to D_2$ такая, что

$$h\Big(r_1\big(a_1, \mathrm{g}(x_2)\big)\Big) = r_2\big(f(a_1), x_2\big)$$

для любых $a_1 \in A_1$, $x_2 \in X_2$. Пусть $(f_1, \mathrm{g}_1, h_1) : r_1 \to r_2$, $(f_2, \mathrm{g}_2, h_2) : r_2 \to r_3$ — преобразования Чу. Композиция (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2) определяется следующим образом:

$$(f_2, \mathrm{g}_2, h_2) \circ (f_1, \mathrm{g}_1, h_1) = (f_2 \circ f_1, \mathrm{g}_1 \circ \mathrm{g}_2, h_2 \circ h_1).$$

Для множества C через $1_C : C \to C$ обозначим его тождественное отображение. Преобразование Чу $(1_{A_1}, 1_{X_1}, 1_{D_1}) : r_1 \to r_1$ является единичным морфизмом относительно композиции преобразований Чу. Очевидно, что пространства Чу вместе с преобразованиями Чу образуют категорию, называемую категорией пространств Чу над категорией множеств **Set**, обозначаемую Chu(**Set**).

Пусть $r : A \times X \to D$ — пространство Чу. Обозначим через $\hat{r} : A \to D^X$ отображение из множества A в множество D^X всех отображений из множества X в множество D, задаваемое равенством $(\hat{r}(a))(x) = r(a, x)$ для любых $a \in A, x \in X$. Пространство Чу r называется *отделимым*, если отображение $\hat{r}$ является инъекцией. Очевидно, что отделимые пространства Чу вместе с преобразованиями Чу образуют полную подкатегорию категории Chu(**Set**), которую будем обозначать $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$. Если $r : A \times X \to D$ — отделимое пространство Чу, то отображение $\hat{r} : A \to D^X$ является инъекцией, следовательно, определено биективное отображение $\hat{r}^{-1} : \hat{r}(A) \to A$.

Утверждение 1. *Если $r : A \times X \to D$, $s : B \times Y \to E$ — пространства Чу, то $(f, \mathrm{g}, h) : r \to s$ является преобразованием Чу, где $f : A \to B$, $\mathrm{g} : Y \to X$, $h : D \to E$ тогда и только тогда*

$$\hat{s}(f(a)) = h \circ \hat{r}(a) \circ \mathrm{g}$$

для любых $a \in A$.

Доказательство. Равенство $h\big(r(a, \mathrm{g}(y))\big) = s\big(f(a), y\big)$ равносильно

$$h\big((\hat{r}(a))(\mathrm{g}(y))\big) = (\hat{s}(f(a)))(y)$$

для любых $a \in A$, $y \in Y$, что равносильно равенству $h \circ \hat{r}(a) \circ \mathrm{g} = \hat{s}\big(f(a)\big)$ для любых $a \in X$. □

Пусть C — категория, $f : A \to B$ — морфизм в категории C. Морфизм f будем называть *мономорфизмом*, если на f можно сокращать слева, т.е.

$$f \circ k = f \circ h \Rightarrow k = h$$

для всех $k, h \in \mathrm{Hom}_C(C, A)$. Морфизм f будем называть *эпиморфизмом*, если на f можно сокращать справа, т.е.

$$k \circ f = h \circ f \Rightarrow k = h$$

для всех $k, h \in \mathrm{Hom}_C(B, D)$. Например, в категории множеств **Set** мономорфизмами являются инъекции, а эпиморфизмами — сюръекции.

Следующие теоремы является частными случаями теорем 5, 6 из [2] и теоремы 10 из [3], если моноид S — это единичный моноид.

Теорема 1 (о существовании расслоенной суммы в категории Chu(Set), [2]). *Пусть $r_1 : A_1 \times X_1 \to D_1$, $r_2 : A_2 \times X_2 \to D_2$ и $s : B \times Y \to D_3$ — пространства Чу и $(f_1, \mathrm{g}_1, h_1) : s \to r_1$, $(f_2, \mathrm{g}_2, h_2) : s \to r_2$ — преобразования Чу. Тогда расслоенная сумма пары $\big((f_1, \mathrm{g}_1, h_1), (f_2, \mathrm{g}_2, h_2)\big)$ — это пространство Чу*

$$t : (A_1 \sqcup_B A_2) \times (X_1 \times_Y X_2) \to D_1 \sqcup_{D_3} D_2,$$

где $t\big(a_i/\nu(f_1, f_2), (x_1, x_2)\big) = r_i(a_i, x_i)/\nu(h_1, h_2)$, с морфизмами $(q_{A_i}, p_{X_i}, q_{D_i}) : r_i \to t$, где $q_{A_i}(a_i) = a_i/\nu(f_1, f_2)$, $p_{X_i}(x_1, x_2) = x_i$, $q_{D_i}(d_i) = d_i/\nu(h_1, h_2)$ для любых $a_i \in A_i$, $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, $d_i \in D_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Теорема 2 (о существовании копроизведения в категории Chu(Set), [2]). *Пусть $r_i : A_i \times X_i \to D_i$ — пространства Чу, $i \in I$. Пространство Чу $r : \coprod_{i \in I} A_i \times \times \prod_{i \in I} X_i \to \coprod_{i \in I} D_i$, где $r(a, x) = (r_i(a, x_i), i)$ для любых $i \in I, a \in A_i, x \in \prod_{i \in I} X_i$, является копроизведением пространств Чу r_i, $i \in I$ в категории Chu(**Set**).*

Теорема 3 (критерий коуравнителя в категории Chu(Set), [3]). *Пусть $(f_1, \mathrm{g}_1, h_1), (f_2, \mathrm{g}_2, h_2) : r \to s$ — преобразования Чу. Тогда преобразование Чу $(f, \mathrm{g}, h) : s \to t$ — коуравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2) в том и только том случае, когда f — коуравнитель f_1 и f_2, g — уравнитель g_1 и g_2, h — коуравнитель h_1 и h_2 в категории **Set**.*

2. Пределы функторов со значениями в категории отделимых пространств Чу

Пусть $T:J\to C$ — функтор, $c\in\mathrm{Ob}(C)$. Семейство морфизмов $\{\varphi_i:c\to T(i)\,|\,i\in\mathrm{Ob}(J)\}$ называется *конусом* (с вершиной в $c\in\mathrm{Ob}(C)$) *функтора* T, если для любого морфизма $f\in\mathrm{Hom}_J(i,j)$ выполнено равенство $T(f)\circ\varphi_i=\varphi_j$. Двойственным (здесь и далее под двойственным понятием понимается понятие, определенное с помощью обращения стрелок в исходном понятии) к понятию конуса является понятие *коконуса.*

Конус $\{\varphi_i:c\to T(i)\,|\,i\in\mathrm{Ob}(J)\}$, а также объект c называется *пределом* $\lim T$ *функтора* T, если для любого конуса $\{\varphi'_i:c'\to T(i)\,|\,i\in\mathrm{Ob}(J)\}$ существует единственный морфизм α, такой что $\varphi'_i=\varphi_i\circ\alpha$ для любого $i\in\mathrm{Ob}(J)$. Двойственным к понятию предела является понятие *копредела* $\mathrm{colim}\ T$.

Пусть $F:J\to\mathrm{Chu}(\mathbf{Set})$ — функтор из произвольной категории J в категорию $\mathrm{Chu}(\mathbf{Set})$ пространств Чу над категорией множеств $\mathbf{Set}$. Функтор F определяет три функтора $F_1,F_2,F_3:J\to\mathbf{Set}$ из категории J в категорию множеств $\mathbf{Set}$:

$$F(i):F_1(i)\times F_2(i)\to F_3(i)$$

для любого $i\in\mathrm{Ob}(J)$,

$$F(f)=(F_1(f),F_2(f),F_3(f))$$

для любого $f\in\mathrm{Hom}(J)$.

Теорема 4. *Пусть $F:J\to Chu(\boldsymbol{Set})$ — функтор из произвольной категории J в категорию $Chu(\boldsymbol{Set})$ пространств Чу над категорией множеств такой, что $F(i)$ — отделимое пространство Чу для любого $i\in Ob(J)$. Если существуют $\mathrm{colim}\,F_2=\{(\varphi_i)_2:F_2(i)\to X\mid i\in Ob(J)\}$ — копредел функтора F_2 и $\lim F_3=\{(\varphi_i)_3:D\to F_3(i)\mid i\in Ob(J)\}$ — предел функтора F_3, то существует предел $\lim F$ функтора F, а именно пределом функтора F является конус $\{\varphi_i:r\to F(i)\mid i\in Ob(J)\}$, где $r:Q\times X\to D$,*

$$Q=\left\{q\in D^X\;\middle|\;\forall i\in Ob(J)\ (\varphi_i)_3\circ q\circ(\varphi_i)_2\in\widehat{F(i)}(F_1(i))\right\},$$

$r(q,x)=q(x)$ для любых $q\in Q,x\in X$, $\varphi_i=\big((\varphi_i)_1,(\varphi_i)_2,(\varphi_i)_3\big)$,

$$(\varphi_i)_1(q)=\widehat{F(i)}^{\,-1}\big((\varphi_i)_3\circ q\circ(\varphi_i)_2\big)$$

для любых $i\in Ob(J)$.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются. Из определения пространства Чу r следует, что r — отделимое пространство Чу.

Поскольку $F:J\to\mathrm{Chu}(\mathbf{Set})$ — функтор, значениями которого на объектах являются отделимые пространства Чу, то отображение $\widehat{F(i)}:F_1(i)\to F_3(i)^{F_2(i)}$ является инъекцией для любого $i\in\mathrm{Ob}(J)$, т.е. для любого элемента $a\in\widehat{F(i)}(F_1(i))$ существует единственный элемент $\widehat{F(i)}^{\,-1}(a)\in F_1(i)$ праобраза. Поскольку $(\varphi_i)_3\circ q\circ(\varphi_i)_2\in$

$\widehat{F(i)}(F_1(i))$ по определению Q, то отображение $(\varphi_i)_1 : Q \to F_1(i)$ определено корректно, т.е. значение $(\varphi_i)_1(q) \in F_1(i)$ и определено однозначно для любого $q \in Q$, $i \in \mathrm{Ob}(J)$.

Покажем, что φ_i — преобразование Чу для любого $i \in \mathrm{Ob}(J)$. Действительно,

$$(\varphi_i)_3\big(r(q,(\varphi_i)_2(x))\big) = (\varphi_i)_3\big(q((\varphi_i)_2(x))\big) =$$
$$= \big((\varphi_i)_3 \circ q \circ (\varphi_i)_2\big)(x) = \left(\widehat{F(i)}((\varphi_i)_1(q))\right)(x) = F(i)\big((\varphi_i)_1(q), x\big)$$

для любых $q \in Q, x \in F_2(i), i \in \mathrm{Ob}(J)$. Также это следует из утверждения 1.

Проверим корректность определения конуса $\big\{\varphi_i \mid i \in \mathrm{Ob}(J)\big\}$, т.е. равенство $F(f) \circ \varphi_i = \varphi_j$ для любого $f \in \mathrm{Hom}(i,j)$. Покажем, что $F_1(f) \circ (\varphi_i)_1 = (\varphi_j)_1$. Поскольку $r, F(i)$ и $F(j)$ — отделимые пространства Чу, $F(f), \varphi_i, \varphi_j$ — преобразования Чу для любых $f \in \mathrm{Hom}(i,j), i,j \in \mathrm{Ob}(J)$, то

$$\left(\widehat{F(j)}\big((F_1(f) \circ (\varphi_i)_1)(q)\big)\right)(x) = F(j)\big(F_1(f)((\varphi_i)_1(q)), x\big) =$$
$$= F_3(f)\big(F(i)((\varphi_i)_1(q), F_2(f)(x))\big) = F_3(f)\big((\varphi_i)_3(r(q,(\varphi_i)_2(F_2(f)(x))))\big) =$$
$$= F_3(f)\big((\varphi_i)_3(q((\varphi_i)_2(F_2(f)(x))))\big) = \big((F_3(f) \circ (\varphi_i)_3) \circ q \circ ((\varphi_i)_2 \circ F_2(f))\big)(x) =$$
$$= \big((\varphi_j)_3 \circ q \circ (\varphi_j)_2\big)(x) = \left(\widehat{F(j)}\big((\varphi_j)_1(q)\big)\right)(x)$$

для любых $f \in \mathrm{Hom}(i,j), q \in Q, x \in F_2(j)$. Поскольку $\widehat{F(j)}$ — инъекция для любого $j \in \mathrm{Ob}(J)$, то $F_1(f) \circ (\varphi_i)_i = (\varphi_j)_1$ для любого $f \in \mathrm{Hom}(i,j)$. Следовательно, $F(f) \circ \varphi_i = \varphi_j$ для любого $f \in \mathrm{Hom}(i,j)$.

Пусть $r' : Q' \times X' \to D'$ — пространство Чу, $\{\varphi'_i : r' \to F(i) \mid i \in \mathrm{Ob}(J)\}$ — конус, т.е. $F(f) \circ \varphi'_i = \varphi'_j$ для любых $f \in \mathrm{Hom}(i,j)$. Так как colim F_2 — копредел функтора F_2 и $\lim F_3$ — предел функтора F_3, то существуют единственные отображения $\beta : X \to X'$ и $\gamma : D' \to D$ такие, что $\beta \circ (\varphi_i)_2 = (\varphi'_i)_2$ и $(\varphi_i)_3 \circ \gamma = (\varphi'_i)_3$. Определим отображение $\alpha : Q' \to Q$ следующим образом: $\big(\alpha(q')\big)(x) = \gamma\big(r'(q', \beta(x))\big)$ для любых $q' \in Q', x \in X$.

Покажем, что отображение α определено корректно, т.е. $\alpha(q') \in Q$ для любого $q' \in Q'$, значит $(\varphi_i)_3 \circ \alpha(q') \circ (\varphi_i)_2 \in \widehat{F(i)}\big(F_1(i)\big)$ для любого $i \in \mathrm{Ob}(J)$. Действительно, поскольку $\beta \circ (\varphi_i)_2 = (\varphi'_i)_2$ и $(\varphi_i)_3 \circ \gamma = (\varphi'_i)_3$, φ'_i — преобразование Чу и $F(i)$ — отделимое пространство Чу для любых $i \in \mathrm{Ob}(J)$, то

$$\big((\varphi_i)_3 \circ \alpha(q') \circ (\varphi_i)_2\big)(x) = (\varphi_i)_3\big(\gamma(r'(q', \beta((\varphi_i)_2(x))))\big) = (\varphi'_i)_3\big(r'(q', (\varphi'_i)_2(x))\big) =$$
$$= F(i)\big((\varphi'_i)_1(q'), x\big) = \left(\widehat{F(i)}\big((\varphi'_i)_1(q')\big)\right)(x)$$

для любого $x \in F_2(i)$, т.е. $(\varphi_i)_3 \circ \alpha(q') \circ (\varphi_i)_2 = \widehat{F(i)}\big((\varphi'_i)_1(q')\big) \in \widehat{F(i)}\big(F_1(i)\big)$. Из определения $(\varphi_i)_1$ и равенства $(\varphi_i)_3 \circ \alpha(q') \circ (\varphi_i)_2 = \widehat{F(i)}\big((\varphi'_i)_1(q')\big)$ для любого $q' \in Q'$ следует, что $(\varphi_i)_1 \circ \alpha = (\varphi'_i)_1$.

Покажем, что (α, β, γ) — преобразование Чу. Действительно, так как r — отделимое пространство Чу, то

$$\gamma\big(r'(q', \beta(a))\big) = \big(\alpha(q')\big)(a) = r\big(\alpha(q'), a\big)$$

для любых $a \in A, q' \in Q'$.

Пусть $(\alpha',\beta',\gamma') : r' \to r$ — преобразование Чу такое, что $\varphi_i \circ (\alpha',\beta',\gamma') = \varphi'_i$ и $F(f)\big(\varphi_i \circ (\alpha',\beta',\gamma')\big) = \varphi_j \circ (\alpha',\beta',\gamma')$ для любых $i,j \in \mathrm{Ob}(J)$. Так как $\operatorname{colim} F_2$ — копредел функтора F_2 и $\lim F_3$ — предел функтора F_3, то $\beta' = \beta$ и $\gamma' = \gamma$. Поскольку (α',β',γ') — преобразование Чу, а r — отделимое пространство Чу, то

$$\big(\alpha'(q')\big)(a) = r\big(\alpha'(q'), a\big) = \gamma\big(r'(q', \beta(a))\big) = \big(\alpha(q')\big)(a)$$

для любых $q' \in Q', a \in A$, т.е. $\alpha' = \alpha$. Следовательно, преобразование Чу (α,β,γ) определено однозначно. □

Категория C, в которой класс $\mathrm{Ob}(C)$ объектов и класс Hom_C всех морфизмов являются множествами, называется *малой категорией.*

Категория $\mathcal{C}$ называется *(ко)полной ((co)complete)*, если любой функтор из малой категории в категорию $\mathcal{C}$ имеет (ко)предел. Категория, являющаяся одновременно полной и кополной, называется *биполной (bicomplete)*. Например, категория множеств **Set** является биполной.

Из теоремы 4 и полноты подкатегории $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ категории $\mathrm{Chu}(\mathbf{Set})$ следует теорема.

Теорема 5 (о полноте категории $\mathbf{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$). *Пусть $F : J \to Chu_{Sep}(\mathbf{Set})$ — функтор из произвольной категории J в категорию $Chu_{Sep}(\mathbf{Set})$ отделимых пространств Чу над категорией множеств. Если существуют $\operatorname{colim} F_2 = \big\{(\varphi_i)_2 : F_2(i) \to X \mid i \in Ob(J)\big\}$ — копредел функтора F_2 и $\lim F_3 = \big\{(\varphi_i)_3 : D \to F_3(i) \mid i \in Ob(J)\big\}$ — предел функтора F_3, то существует предел $\lim F$ функтора F, а именно, пределом функтора F является конус $\big\{\varphi_i : r \to F(i) \mid i \in Ob(J)\big\}$, где $r : Q \times X \to D$,*

$$Q = \Big\{q \in D^X \;\Big|\; \forall i \in Ob(J)\ (\varphi_i)_3 \circ q \circ (\varphi_i)_2 \in \widehat{F(i)}(F_1(i))\Big\},$$

$r(q,x) = q(x)$ для любых $q \in Q, x \in X$, $\varphi_i = \big((\varphi_i)_1, (\varphi_i)_2, (\varphi_i)_3\big)$,

$$(\varphi_i)_1(q) = \widehat{F(i)}^{\,-1}\big((\varphi_i)_3 \circ q \circ (\varphi_i)_2\big)$$

для любых $i \in Ob(J)$.

Известно, что полнота категории влечет за собой существование уравнителей, произведений и расслоенных произведений. В теоремах 6, 7, 8 приводятся описания соответствующих конструкций в категории $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$, которые являются также уравнителем, произведением и расслоенным произведением отделимых пространств Чу в категории $\mathrm{Chu}(\mathbf{Set})$.

Пусть $f_1, f_2 : X \to Y$ — морфизмы в категории C. Пара (E,e), где $e : E \to X$ — морфизм в категории C, называется *уравнителем* морфизмов f_1 и f_2 в C, если

1) $f_1 \circ e = f_2 \circ e$,

2) для любого морфизма $h : H \to X$ такого, что $f_1 \circ h = f_2 \circ h$, существует един-

ственный морфизм $\overline{h} : H \to E$ такой, что $h = e \circ \overline{h}$, т.е. следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\overline{h}"'] & X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2"'] & Y \\
E \arrow[ur, "e"'] & &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Двойственным образом вводится понятие *коуравнителя*.

Напомним, что в категории **Set** уравнитель морфизмов $f_1, f_2 : X \to Y$ — это пара (E,e), где $E = \big\{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\big\}$, e — естественное вложение E в X; коуравнитель морфизмов $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2 : X \to Y$ — это пара (C,c), где C — это фактор-множество Y по отношению эквивалентности $\nu(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)$ такому, что

$$(y_1, y_2) \in \nu(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2 \text{ или } \exists x \in X : y_1 = \mathrm{g}_1(x) \text{ и } y_2 = \mathrm{g}_2(x)$$

для любых $y_1, y_2 \in Y$, c — каноническая проекция Y в C. Заметим, что множество E может быть пустым, в этом случае C также пусто.

Теорема 6 (о существовании уравнителя в категории $\mathbf{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$). *Пусть $r_1 : A_1 \times X_1 \to D_1$, $r_2 : A_2 \times X_2 \to D_2$ — отделимые пространства Чу, (f_1, g_1, h_1), $(f_2, \mathrm{g}_2, h_2) : r_1 \to r_2$ — преобразования Чу. Тогда пространство Чу $r : Q \times X \to D$ вместе с преобразованием Чу $(f, \mathrm{g}, h) : r \to r_1$ является уравнителем (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2), где $X = X_1/\nu(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)$, $D = \big\{d \in D_1 \mid h_1(d) = h_2(d)\big\}$, $Q = \big\{q \in D^X \mid (h_1 \circ h) \circ q \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{g}_1) \in \widehat{r_2}(A_2)\big\}$, $r\big(q, x/\nu(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)\big) = q\big(x/\nu(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)\big)$, $h(d) = d$, $\mathrm{g}(x) = x/\nu(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)$, $f(q) = \widehat{r_1}^{-1}(h \circ q \circ \mathrm{g})$ для любых $q \in Q, x \in X_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F : J \to \mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ — функтор из категории J с объектами a, b и морфизмами $\alpha, \beta : a \to b$, id_a, id_b, при этом $F(a) = r_1$, $F(b) = r_2$, $F(\alpha) = (f_1, \mathrm{g}_1, h_1)$, $F(\beta) = (f_2, \mathrm{g}_2, h_2)$. Так как пара (X, g), где $X = X_1/\nu(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)$, $\mathrm{g}(x) = x/\nu(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)$ для любых $x \in X_1$, является коуравнителем g_1 и g_2 в категории **Set**, то $\{\mathrm{g}, \mathrm{g} \circ \mathrm{g}_1\}$ — копредел функтора F_2. Так как пара (D, h), где $D = \big\{d \in D_1 \mid h_1(d) = h_2(d)\big\}$, $h(d) = d$ для любых $d \in D$, является уравнителем h_1 и h_2 в категории **Set**, то $\{h, h_1 \circ h\}$ — предел функтора F_3. По теореме 5 существует предел $\lim F = \big\{(f, \mathrm{g}, h), (f_1 \circ f, \mathrm{g} \circ \mathrm{g}_1, h_1 \circ h)\big\}$ функтора F, где $(f, \mathrm{g}, h) : r \to r_1$, $(f_1 \circ f, \mathrm{g} \circ \mathrm{g}_1, h_1 \circ h) : r \to r_2$, $r : Q \times X \to D$, $Q = \big\{q \in D^X \mid h \circ q \circ \mathrm{g} \in \widehat{r_1}(A_1)\big\} \cup \big\{q \in D^X \mid (h_1 \circ h) \circ q \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{g}_1) \in \widehat{r_2}(A_2)\big\}$, $r(q, x) = q(x)$, $f(q) = \widehat{r_1}^{-1}(h \circ q \circ \mathrm{g})$ для любых $q \in Q, x \in X$.

Покажем, что $\big\{q \in D^X \mid h \circ q \circ \mathrm{g} \in \widehat{r_1}(A_1)\big\} \subseteq \big\{q \in D^X \mid (h_1 \circ h) \circ q \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{g}_1) \in \widehat{r_2}(A_2)\big\}$. Пусть $h \circ q \circ \mathrm{g} = \widehat{r_1}(a_1)$. Достаточно показать, что $(h_1 \circ h) \circ q \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{g}_1) = \widehat{r_2}\big(f_1(a_1)\big)$. Действительно, поскольку (f_1, g_1, h_1) — преобразование Чу, то по утверждению 1 $(h_1 \circ h) \circ q \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{g}_1) = h_1 \circ (h \circ q \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{g}_1 = h_1 \circ \widehat{r_1}(a_1) \circ \mathrm{g}_1 = \widehat{r_2}\big(f_1(a_1)\big)$. □

Пусть I — множество и $(X_i)_{i \in I}$ — семейство объектов категории $\mathcal{C}$. Пара $(P, (p_i)_{i \in I})$ называется *произведением семейства* $(X_i)_{i \in I}$ в $\mathcal{C}$, если

1) $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и $p_i \in \mathrm{Hom}(P, X_i)$ для любого $i \in I$,

2) для каждого $Q \in \mathcal{C}$ и каждого семейства $(q_i \in \mathrm{Hom}(Q, X_i))_{i \in I}$ существует единственный $q \in \mathrm{Hom}(Q, P)$ такой, что $p_i \circ q = q_i$ для всех $i \in I$, т.е. следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_i & & Q \arrow[ll, "q_i"'] \arrow[dl, "q"] \\ & P \arrow[ul, "p_i"] & \end{tikzcd}$$

коммутативна в $\mathcal{C}$ для любого $i \in I$.

Через $\prod\limits_{i \in I} X_i$ обозначим объект P. Двойственным образом определяется *копроизведение* $(\coprod\limits_{i \in I} X_i, (q_i)_{i \in I})$ семейства $(X_i)_{i \in I}$ объектов категории $\mathcal{C}$. В категории множеств произведение множеств X_i $(i \in I)$ — это декартово произведение $\prod\limits_{i \in I} X_i$, копроизведение множеств X_i $(i \in I)$ — это их дизъюнктное объединение $\coprod\limits_{i \in I} X_i$ (объединение непересекающихся копий).

Теорема 7 (о существовании произведения в категории $\mathbf{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$). *Пусть $\{r_i : A_i \times X_i \to D_i \mid i \in I\}$ — семейство отделимых пространств Чу. Тогда пространство Чу $r : Q \times X \to D$ вместе с преобразованиями Чу $\{(f_i, \mathrm{g}_i, h_i) : r \to r_i \mid i \in I\}$ является произведением семейства $\{r_i \mid i \in I\}$, где $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$, $D = \prod\limits_{i \in I} D_i$, $Q = \{q \in D^X \mid \forall i \in I \ h_i \circ q \circ \mathrm{g}_i \in \widehat{r_i}(A_i)\}$, $r(q, x) = q(x)$, g_i — каноническое вложение, h_i — проекция на i-ый сомножитель, $f_i(q) = \widehat{r_i}^{-1}(h_i \circ q \circ \mathrm{g}_i)$ для любых $i \in I$, $q \in Q, x \in X$.*

Доказательство. Пусть $F : J \to \mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ — функтор из категории J, объектами которой является множество I, а морфизмами — тождественные отображения, при этом $F(i) = r_i$ для любого $i \in I$. Так как пара $(X, \{\mathrm{g}_i \mid i \in I\})$, где $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$, $\mathrm{g}_i : X_i \to X$, $\mathrm{g}_i(x_i) = (x_i, i)$ для любых $i \in I, x_i \in X_i$, является копроизведением семейства $\{X_i \mid i \in I\}$ в категории $\mathbf{Set}$, то $\{\mathrm{g}_i \mid i \in I\}$ — копредел функтора F_2. Так как пара $(D, \{h_i \mid i \in I\})$, где $D = \coprod\limits_{i \in I} D_i$, $h_i : D \to D_i$, h_i — проекция на i-ый сомножитель для любых $i \in I$, является произведением семейства $\{D_i \mid i \in I\}$, то $\{h_i \mid i \in I\}$ — предел функтора F_3. В этом случае по теореме 5 существует предел $\lim F = \{(f_i, \mathrm{g}_i, h_i) : r \to r_i \mid i \in I\}$ функтора F, где $r : Q \times X \to D$, $Q = \{q \in D^X \mid \forall i \in I \ h_i \circ q \circ \mathrm{g}_i \in \widehat{r_i}(A_i)\}$, $r(q, x) = q(x)$, $f_i(q) = \widehat{r_i}^{-1}(h_i \circ q \circ \mathrm{g}_i)$ для любых $i \in I, q \in Q, x \in X$. □

Пусть $f : X \to Z$ и $\mathrm{g} : Y \to Z$ — морфизмы категории $\mathcal{C}$. *Расслоенным произведением* X и Y над Z является объект $P = X \times_Z Y$ вместе с морфизмами $p_1 : P \to X, p_2 : P \to Y$, такими, что $p_1 \circ f = p_2 \circ \mathrm{g}$ для любого объекта Q вместе с морфизмами $p_1' : Q \to X$, $p_2' : Q \to Y$ такими, что $p_1' \circ f = p_2' \circ \mathrm{g}$, существует единственный морфизм $q : Q \to P$, при котором следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "q"] \arrow[drr, bend left, "p'_2"] \arrow[ddr, bend right, "p'_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

В категории множеств расслоенное произведение множеств X и Y с отображениями $f : X \to Z$ и $g : Y \to Z$ — это множество $X \times_Z Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ вместе с естественными проекциями на компоненты.

Двойственным образом определяется *расслоенная сумма (кодекартов квадрат)* $X \sqcup_Z Y$ объектов X, Y категории $\mathcal{C}$ над объектом Z категории $\mathcal{C}$.

В категории множеств расслоенная сумма множеств X и Y с отображениями $f : Z \to X$ и $g : Z \to Y$ — это множество $(X \sqcup Y)/\sim$, где $X \sqcup Y$ — дизъюнктное объединение множеств X и Y, а $\sim$ — наименьшее отношение эквивалентности такое, что $i_1 \circ f(z) \sim i_2 \circ g(z)$, где $i_1 : X \to X \sqcup Y$, $i_2 : Y \to X \sqcup Y$ — вложения, $z \in Z$.

Теорема 8 (о существовании расслоенного произведения в категории $\mathbf{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$). *Пусть $r_1 : A_1 \times X_1 \to D_1$, $r_2 : A_2 \times X_2 \to D_2$, $r_3 : A_3 \times X_3 \to D_3$ — отделимые пространства Чу, $(f_1, g_1, h_1) : r_1 \to r_3$, $(f_2, g_2, h_2) : r_2 \to r_3$ — преобразования Чу. Тогда пространство Чу $r : Q \times X \to D$ вместе с преобразованиями Чу $(f'_1, g'_1, h'_1) : r \to r_1$, $(f'_2, g'_2, h'_2) : r \to r_2$ является расслоенным произведением r_1 и r_2 над r_3, где $X = X_1 \sqcup_{X_3} X_2$, $D = D_1 \times_{D_3} D_2$,*

$$Q = \left\{ q \in D^X \;\middle|\; \forall i \in \{1,2\}\ h'_i \circ q \circ g'_i \in \widehat{r_i}(A_i) \right\},$$

$r(q,x) = q(x)$, h_i — проекция на i-ый сомножитель, g_i — каноническое вложение, $f'_i(q) = \widehat{r_i}^{-1}(h'_i \circ q \circ g'_i)$ для любых $i \in \{1,2\}, q \in Q, x \in X$.

Доказательство. Пусть $F : J \to \mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ — функтор из категории J с объектами a, b, c и морфизмами $\alpha : a \to c$, $\beta : b \to c$, id_a, id_b, id_c, при этом $F(a) = r_1$, $F(b) = r_2$, $F(c) = r_3$, $F(\alpha) = (f_1, g_1, h_1)$, $F(\beta) = (f_2, g_2, h_2)$. Так как пара $(X, \{g'_1, g'_2\})$, где $X = X_1 \sqcup_{X_3} X_2$, g'_i — каноническое вложение для любого $i \in \{1,2\}$, является расслоенной суммой g_1 и g_2 в категории $\mathbf{Set}$, то $\{g'_1, g'_2\}$ — копредел функтора F_2. Так как пара $(D, \{h'_1, h'_2\})$, где $D = D_1 \times_{D_3} D_2$, h'_i — проекция на i-ый сомножитель для любого $i \in \{1,2\}$, является расслоенным произведением h_1 и h_2 в категории $\mathbf{Set}$, то $\{h'_1, h'_2\}$ — предел функтора F_3. В этом случае по теореме 5 существует предел $\lim F = \{(f'_1, g'_1, h'_1), (f'_1, g'_1, h'_1)\}$ функтора F, $(f'_i, g'_i, h'_i) : r \to r_i$ для любых $i \in I$, где $r : Q \times X \to D$,

$$Q = \left\{ q \in D^X \;\middle|\; \forall i \in \{1,2\}\ h'_i \circ q \circ g'_i \in \widehat{r_i}(A_i) \right\},$$
$$r(q,x) = q(x) f'_i(q) = \widehat{r_i}^{-1}(h'_i \circ q \circ g'_i)$$

для любых $i \in \{1,2\}, q \in Q, x \in X$. □

3. Копределы в категории отделимых пространств Чу

Теорема 9 (о существовании копроизведения в категории $\mathbf{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$). *Пусть* $\{r_i : A_i \times X_i \to D_i \mid i \in I\}$ *— семейство отделимых пространств Чу. Копроизведение семейства* $\{r_i \mid i \in I\}$ *— это отделимое пространство Чу* $r : A \times X \to D$, *где* $A = \coprod_{i\in I} A_i$, $X = \prod_{i\in I} X_i$, $D = \coprod_{i\in I} D_i$, $r(a,x) = (r_i(a,x_i), i)$ *для любых* $i \in I$, $a \in A_i$, $x \in X$.

Доказательство. По теореме 2 пространство Чу r является копроизведением семейства $\{r_i \mid i \in I\}$. Покажем, что пространство Чу r является отделимым, т.е. отображение $\hat{r} : A \to D^X$ является инъекцией. Зафиксируем $a, a' \in A$ такие, что $\hat{r}(a) = \hat{r}(a')$. Пусть $a \in A_p$, $a' \in A_q$ для некоторых $p \neq q \in I$, тогда

$$\big(r_q(a', x_q), q\big) = \big(\hat{r}(a')\big)(x) = \big(\hat{r}(a)\big)(x) = \big(r_p(a, x_p), p\big)$$

для любых $x \in X$. Следовательно, $p = q$. Противоречие. Пусть теперь $a, a' \in A_p$ для некоторого $p \in I$, тогда

$$(r_p(a, x_p), p) = (\hat{r}(a))(x) = (\hat{r}(a'))(x) = (r_p(a', x_p), p)$$

для любых $x \in X$. Следовательно, $r_p(a, x_p) = r_p(a', x_p)$ для любых $x_p \in X_p$. Поскольку r_p — отделимое пространство Чу, то $a = a'$, т.е. $\hat{r}$ — инъекция. □

Пример 1. *(отделимых пространств Чу, коуравнитель которых не является отделимым) Пусть заданы отделимые пространства Чу*

$$r_1 : \{\theta_1, \theta_2\} \times \{\eta_1, \eta_2\} \to \{\theta_1, \theta_2\},$$
$$r_2 : \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} \times \{\eta_1, \eta_2\} \to \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\},$$

где

$$r_1(\theta_i, \eta_j) = \theta_i, \quad r_2(\theta_i, \eta_j) = \theta_i, \quad r_2(\theta_3, \eta_1) = \theta_3, \quad r_2(\theta_3, \eta_2) = \theta_1$$

для любых $i, j \in \{1,2\}$; $(f_1, \mathrm{g}_1, h_1), (f_2, \mathrm{g}_2, h_2) : r_1 \to r_2$ *— преобразования Чу, где*

$$f_1(\theta_i) = \theta_i, \quad \mathrm{g}_1(\eta_i) = \eta_1, \quad h_1(\theta_i) = \theta_i,$$
$$f_2(\theta_1) = \theta_2, \quad f_2(\theta_2) = \theta_1, \quad \mathrm{g}_2(\eta_1) = \eta_2, \quad \mathrm{g}_2(\eta_2) = \eta_1, \quad h_2(\theta_1) = \theta_2, \quad h_2(\theta_2) = \theta_1,$$

для любых $i \in \{1,2\}$; $\big(r, (f, \mathrm{g}, h)\big)$ *— коуравнитель преобразований Чу* (f_1, g_1, h_1) *и* (f_2, g_2, h_2) *из теоремы 3. Тогда* r *не является отделимым пространством Чу.*

Доказательство. Из определения пространств Чу r_1 и r_2 следует, что они являются отделимыми пространствами Чу. Корректность определения преобразований Чу (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2) следует из равенств

$$r_2\big(f_1(\theta_i), \eta_j\big) = r_2(\theta_i, \eta_j) = \theta_i = r_1(\theta_i, \eta_1) = r_1\big(\theta_i, \mathrm{g}_1(\eta_j)\big) = h_1\big(r_1(\theta_i, \mathrm{g}_1(\eta_j))\big),$$
$$r_2\big(f_2(\theta_i), \eta_j\big) = r_2(\theta_{i'}, \eta_j) = \theta_{i'} = h_2(\theta_i) = h_2\big(r_1(\theta_i, \eta_{j'})\big) = h_2\big(r_1(\theta_i, \mathrm{g}_2(\eta_j))\big),$$

где $i' = \begin{cases} 1, \text{если } i = 2, \\ 2, \text{если } i = 1, \end{cases}$ для любых $i, j \in \{1,2\}$, $\theta_i \in \{\theta_1, \theta_2\}$, $\eta_j \in \{\eta_1, \eta_2\}$.

По теореме 3 $\big(r,(f,\mathrm{g},h)\big)$ является коуравнителем преобразований Чу (f_1,g_1,h_1) и (f_2,g_2,h_2), где

$$r:\{\theta_1/\nu(f_1,f_2),\theta_3/\nu(f_1,f_2)\}\times\{\eta_2\}\to\{\theta_1/\nu(h_1,h_2),\theta_3/\nu(h_1,h_2)\},$$
$$r(\theta_i/\nu(f_1,f_2),\eta_2)=r_2(\theta_i,\eta_2)/\nu(h_1,h_2)\quad\forall i\in\{1,2\},$$

f,h — канонические проекции, g — естественное вложение. Покажем, что r не является отделимым пространством Чу. Действительно,

$$r(\theta_1/\nu(f_1,f_2),\eta_2)=r_2(\theta_1,\eta_2)/\nu(h_1,h_2)=\theta_1/\nu(h_1,h_2),$$
$$r(\theta_3/\nu(f_1,f_2),\eta_2)=r_2(\theta_3,\eta_2)/\nu(h_1,h_2)=\theta_1/\nu(h_1,h_2),$$

т.е. отображение $\hat{r}:\{\theta_1/\nu(f_1,f_2),\theta_3/\nu(f_1,f_2)\}\to\{\theta_1/\nu(f_1,f_2),\theta_3/\nu(f_1,f_2)\}^{\{\eta_2\}}$ не является инъекцией, следовательно, пространство Чу r не является отделимым. □

Пример 2. *(отделимых пространств Чу, расслоенная сумма которых не является отделимой) Пусть r_1,r_2 — пространства Чу, $(f_1,\mathrm{g}_1,h_1),(f_2,\mathrm{g}_2,h_2):r_1\to r_2$ — преобразования Чу из примера 1 и $\big(t,\{(\varphi_1,\psi_1,\chi_1),(\varphi_2,\psi_2,\chi_2)\}\big)$ — расслоенная сумма пары $\big((f_1,\mathrm{g}_1,h_1)\sqcup(f_2,\mathrm{g}_2,h_2),(i,j,k)\big)$ из теоремы 1, где $i(a)=a$, $j(x)=(x,x)$, $k(d)=d$ для любых $a\in A_1,x\in X_1,d\in D_1$. Тогда t не является отделимым пространством Чу.*

Доказательство. По теореме 9 пространство Чу $r_1\sqcup r_1$ является отделимым. Ясно, что $\big(t,(\varphi_1,\psi_1,\chi_1)\big)$ является коуравнителем преобразований Чу (f_1,g_1,h_1) и (f_2,g_2,h_2). Следовательно, как показано в примере 1, t не является отделимым. □

Список литературы

[1] M. Barr, **-Autonomous Categories*, Lecture Notes in Math., **752**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[2] А. А. Степанова, Е. Е. Скурихин, А. Г. Сухонос, “Категории пространств Чу над категорией полигонов”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **14** (2017), 1220–1237.

[3] А. А. Степанова, Е. Е. Скурихин, А. Г. Сухонос, “Уравнители и коуравнители в категории пространств Чу над категорией полигонов”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16** (2019), 709–717.

[4] А. А. Степанова, Е. Е. Скурихин, А. Г. Сухонос, “Произведения пространств Чу в категории Chu(S-Act)”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **17** (2020), 1352–1358.

Поступила в редакцию
17 марта 2023 г.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-946 от 16 февраля 2023 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Simakov V. K.[1] Completeness of the category of separable Chu spaces. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 2. P. 252–263.

[1] Far Eastern Federal University, Russia

ABSTRACT

In this paper we consider the category $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ of separable Chu spaces over the category **Set** of sets. The construction of the limit of an arbitrary functor into the category of Chu spaces over the category of sets is given when its images on objects are separable Chu spaces. The completeness of the category $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ is proved; constructions of equalizers, products and pullbacks in this category are given. It is shown that the colimits of separable Chu spaces are not always separable Chu spaces, but coproducts of separable Chu spaces in the category $\mathrm{Chu}_{Sep}(\mathbf{Set})$ exist for any separable Chu spaces.

Key words: *category of Chu spaces, separable Chu spaces, limit, equalizer, product, colimit, coequalizer, coproduct.*