Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 2. С. 270–277

УДК 517.95
MSC2020 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев[1]

Оптимальное мультипликативное управление полулинейным параболическим уравнением

Представлен анализ задач оптимального управления для нелинейной параболической начально-краевой задачи, моделирующей динамику коллективного поведения сообщества бактерий. Получены оценки решения начально-краевой задачи, доказана разрешимость задач управления и выведены условия оптимальности. Для задачи с финальным наблюдением установлен слабый принцип «bang-bang».

Ключевые слова: *задачи оптимального управления, система оптимальности, полулинейное параболическое уравнение, мультипликативное управление.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202324

1. Введение. Постановка задачи управления

Задачи оптимального управления для нелинейных уравнений реакции–диффузии представляют интерес как с теоретической точки зрения, так и для приложений. В данной работе рассматривается класс задач оптимального мультипликативного управления полулинейным параболическим уравнением, моделирующим, например, динамику коллективного поведения сообщества бактерий, обладающего «quorum-sensing» — чувством кворума — способностью коллективно действовать на внешние возбудители. Прикладная значимость анализа таких задач связана с важной терапевтической концепцией, направленной на управление кворумом бактерий, поскольку именно чувство кворума отвечает за регулирование различных факторов вирулентности при бактериальных инфекциях [1, 2].

Начально-краевая задача записывается в виде задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами, для которой ставятся задачи оптимального управления. Выводятся априорные оценки решения задачи Коши и на их основе доказывается разрешимость экстремальных задач. Далее представлено получение невырожденных условий оптимальности. В качестве приложения рассмотрена задача

[1] Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10. Электронная почта: `chebotarev.ayu@dvfu.ru`

управления с финальным наблюдением, установлена слабая релейность оптимального управления.

В ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ рассматривается следующая начально-краевая задача, описывающая управляемую систему.

$$\partial y/\partial t - a\Delta y = f_0(x,t) + f(x)h(y) - u(t)y, \quad (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$a\partial_n y + \gamma(y - y_b)\,\Big|_{\Sigma\,=\,\Gamma\times(0,T)} = 0, \quad y\,\Big|_{t\,=\,0} = y_0. \tag{2}$$

Здесь $y = y(x,t)$ — состояние системы, $u = u(t)$ — управление. Функция $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является нечетной, дифференцируемой и ограниченной. Функции f_0, f, γ заданы, $a = \mathrm{const} > 0$. Через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе Γ.

Далее используем пространства Лебега L^s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, и пространства Соболева $H^s = W_2^s$; $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$. При этом $V \subset H = H' \subset V'$; (η,ζ) — значение функционала $\eta \in V'$ на элементе $\zeta \in V$ и скалярное произведение в H, если $\eta,\zeta \in H$, $\|\eta\|^2 = (\eta,\eta)$. Через $L^p(0,T;X)$ (соотв. $C([0,T],X)$) обозначаем пространство строго измеримых функций класса L^p (соотв. непрерывных), определенных на $[0,T]$, со значениями в банаховом пространстве X;

$$Y = \Big\{y: \ y \in L^2(0,T;V), \ y' \in L^2(0,T;V')\Big\},$$

где $y' = dy/dt$. Отметим, что пространство Y непрерывно вложено в $C([0,T];H)$.

Пусть исходные данные удовлетворяют условиям

(i) $y_0 \in H, f_0 \in L^2(Q), f \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma \in L^\infty(\Sigma)$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$, $\gamma_0 = \mathrm{const}$, $y_b \in L^2(\Sigma)$;

(ii) $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(-s) = -h(s)$, $|h(s)| \leqslant k_0, 0 \leqslant h'(s) \leqslant k_1$; $u \in L^2(0,T)$.

Определим оператор A: $V \to V'$ и функцию $\mathrm{g}_b \in L^2(0,T;V')$, используя следующие равенства, справедливые для $y,z \in V$:

$$(Ay,z) = a(\nabla y, \nabla z) + \int\limits_\Gamma \gamma y z \, d\Gamma, \quad (\mathrm{g}_b, z) = \int\limits_\Gamma \gamma y_b z \, d\Gamma.$$

Билинейная форма (Ay,z) может быть выбрана в качестве скалярного произведения в V, и при этом норма $\|y\|_V = (Ay,y)^{1/2}$ эквивалентна стандартной норме пространства V.

Функция $y \in Y$ называется *слабым решением задачи* (1), (2), если

$$y' + Ay = f_0 + \mathrm{g}_b + f \cdot h(y) - u \cdot y, \quad t \in (0,T); \quad y(0) = y_0. \tag{3}$$

Рассмотрим пространство управлений $U = L^2(0,T)$, множество допустимых управлений $U_{ad} \subset U$, пространство состояний Y и целевой функционал $J: Y \times U_{ad} \to \mathbb{R}$ такие, что

(j) $U_{ad} \subset U$ непустое, выпуклое и замкнутое множество;

(jj) J слабо полунепрерывен снизу.

(jjj) $\forall r > 0$ множество $\{u \in U_{ad}: J(y,u) \leqslant r, y \in Y\}$ или U_{ad} ограничено.

Определим оператор ограничений $F: Y \times U \to L^2(0,T;V') \times H$,

$$F(y,u) = \Big\{y' + Ay - f_0 - \mathrm{g}_b - f \cdot h(y) + u \cdot y, y(0) - y_0\Big\}.$$

Задача (CP). Найти пару $\{\hat{y},\hat{u}\}\in Y\times U_{ad}$ так, что

$$J(\hat{y},\hat{u}) = \inf\Big\{J(y,u) : u\in U_{ad},\ F(y,u)=0\Big\}. \qquad (4)$$

Пример. В постановке задачи (CP) выберем функции f, f_0, h и целевой функционал J следующим образом: $f=f(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\exp(-|x-x_j|^2/\sigma^2)$, $x\in\Omega$, x_j — фиксированные точки в Ω, $f_0=\alpha f$, $h(s)=\alpha+\beta s^r/(s_0+s^r)$, $s\geqslant 0$,

$$J(\theta,u)=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (y-y_d)^2\,dxdt+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^T u^2(t)\,dt,\quad u\in U.$$

Положительные постоянные $\alpha,\beta,s_0,r,\lambda$ и функция $y_d\in L^2(Q)$ заданы. В этом случае мы приходим к задаче управления динамикой коллективного поведения сообщества бактерий, обладающего чувством кворума (способностью коллективно действовать на внешние возбудители), цель которого получить нужную концентрацию ацилгомосериновых лактонов [3, 4].

2. Разрешимость задачи оптимального управления

Получим предварительно априорные оценки решения управляемой системы.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия (i)–(ii). Для слабого решения задачи* (1), (2) *справедливы оценки*

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;H)}\leqslant K_1e^{K_2},\quad \|y\|_{L^2(0,T;V)}\leqslant K_1(1+K_2e^{K_2}). \qquad (5)$$

Здесь $K_1=\|y_0\|^2+\int\limits_0^T(k_0\|f\|^2+\|f_0+g_b\|^2_{V'})dt$, $K_2=2\int\limits_0^T|u(t)|dt+k_0T$.

Доказательство. Из равенства $(y'+Ay,y)=(f\cdot h(y)-u\cdot y+f_0+g_b,y)$ следует, с учетом того, что $|h(y)|\leqslant k_0$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y\|^2+\|y\|^2_V\leqslant |u(t)|\cdot\|y\|^2+\frac{k_0}{2}\left(\|y\|^2+\|f\|^2\right)+\frac{1}{2}\|y\|^2_V+\frac{1}{2}\|f_0+g_b\|^2_{V'}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\|y\|^2+\|y\|^2_V\leqslant (2|u(t)|+k_0)|\cdot\|y\|^2+k_0\|f\|^2+\|f_0+g_b\|^2_{V'}.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени и используя неравенство Гронуолла для оценки $\|y(t)\|^2$, получаем

$$\|y(t)\|^2\leqslant K_1e^{K_2}.$$

Тогда выводим $\int\limits_0^T\|y(t)\|^2_Vdt\leqslant K_1(1+K_2e^{K_2})$. Таким образом, справедливы нелокальные оценки (5). □

Однозначная разрешимость параболической задачи (3) с липшицевой нелинейностью $h(y)$ доказывается, с учетом полученных оценок (5), аналогично [4].

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(ii). Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1), (2) *и справедливы оценки* (5).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i)–(ii), (j)–(jjj). Тогда существует решение задачи (CP).*

Доказательство. Пусть $\hat{J} = \inf J$ на множестве $u \in U_{ad}$, $F(y,u) = 0$. Выберем минимизирующую последовательность $u_m \in U_{ad}$, $y_m \in Y$, $J(y_m, u_m) \to \hat{J}$,

$$y_m' + Ay_m = f \cdot h(y_m) - u_m \cdot y_m + f_0 + \mathrm{g}_b, \quad y_m(0) = y_0. \tag{6}$$

Из условия (jjj) следует ограниченность последовательности u_m в пространстве U и поэтому, на основании леммы 1, получаем оценки

$$\|y_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C, \quad \|y_m\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C.$$

Здесь через $C>0$ обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих нормы и не зависящих от m. Из ограниченности $\{y_m\}$ в $L^2(0,T;V)$ вытекает ограниченность $\{Ay_m\}$ в $L^2(0,T;V')\cap L^\infty(0,T;H)$ и кроме того

$$\int_0^T (u_m(t)y_m, z)^2 dt \leqslant C \int_0^T |u_m(t)|^2 dt \|z\|^2 \ \ \forall z \in V.$$

Поэтому последовательность $\{u_m(t)y_m\}$ также ограничена в $L^2(0,T;V')$. Из полученных оценок и равенств (6) следует, что последовательность $\{y_m'\}$ ограничена в пространстве $L^2(0,T;V')$. Учитывая компактность вложения $Y \subset L^2(0,T;H)$, переходя при необходимости к подпоследовательностям, заключаем, что существует пара $\{\hat{y},\hat{u}\} \in Y \times U_{ad}$,

$$u_m \to \hat{u} \text{ слабо в } U, \quad y_m \to \hat{y} \text{ слабо в } L^2(0,T;V), \text{ сильно в } L^2(0,T;H). \tag{7}$$

Заметим также, что $\forall z \in V$ при $m \to \infty$

$$\left| \int_0^T \Big(f\big(h(y_m) - h(\hat{y})\big), z \Big) dt \right| \leqslant k_1 \max f \|z\| T^{1/2} \|y_m - \hat{y}\|_{L^2(0,T;H)} \to 0, \tag{8}$$

$$\left| \int_0^T (u_m y_m - \hat{u}\hat{y}, z) dt \right| \leqslant \left| \int_0^T (u_m - \hat{u})(\hat{y}, z) dt \right| + \|u_m\|_U \|z\| \|y_m - \hat{y}\|_{L^2(0,T;H)} \to 0. \tag{9}$$

Результаты о сходимости (7)–(9) позволяют перейти к пределу в (6). Поэтому

$$\hat{y}' + A\hat{y} = f \cdot h(\hat{y}) - u \cdot \hat{y} + f_0 + \mathrm{g}_b, \quad \hat{y}(0) = y_0.$$

и при этом в силу условия (jj) $\hat{J} \leqslant J(\hat{y},\hat{u}) \leqslant \underline{\lim}\, J(y_m,u_m) = \hat{J}$. Следовательно, пара $\{\hat{y},\hat{u}\}$ есть решение задачи (CP). □

3. Условия оптимальности

Для получения системы оптимальности будем использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [5, 6]. Проверим справедливость ключевого условия, состоящего в том, что образ производной оператора ограничений $F(y,u)$ по y, где $y\in Y, u\in U$, совпадает с пространством $L^2(0,T;V')\times H$. Именно это условие гарантирует невырожденность условий оптимальности. Напомним, что

$$F(y,u)=\Big\{y'+Ay-f\cdot h(y)+u\cdot y-f_0-\mathrm{g}_b,\, y(0)-y_0\Big\}.$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия (i)–(ii). Для любой пары $y\in Y$, $u\in U$ справедливо равенство*

$$\mathtt{Im}F'_y(y,u)=L^2(0,T;V')\times H.$$

Доказательство. Пусть $\zeta=\{\eta,\xi_0\}\in L^2(0,T;V')\times H$. Равенство $F'_y(y,u)\langle\psi\rangle = \zeta$, где $\psi=\{\xi,u\}\in Y\times U$, эквивалентно условиям

$$\xi'+A\xi-f\cdot h'(y)\xi+u\cdot\xi=\eta,\quad \xi(0)=\xi_0. \tag{10}$$

Следовательно, для доказательства леммы достаточно проверить разрешимость линейной задачи (10). Заметим, что $f\cdot h'(y)\in L^\infty(Q)$. В случае, если функция $u\in U=L^2(0,T)$ также ограничена, разрешимость задачи (10) хорошо известна [7, Th.4.1, Ch.3]. Если функция u является неограниченной, то достаточно аппроксимировать ее функциями $u_m\in C[0,T]$, $\|u_m-u\|_U\to 0$ и для последовательности решений задачи (10), где $u:=u_m$, получить, аналогично доказательству леммы 1, оценки

$$\|\xi_m\|_{L^\infty(0,T;H)}\leqslant C,\quad \|\xi_m\|_{L^2(0,T;V)}\leqslant C,\quad \|\xi'_m\|_{L^2(0,T;V')}\leqslant C.$$

Здесь $C>0$ не зависит от m. Указанных оценок достаточно для предельного перехода в (10), где $\xi:=\xi_m, u:=u_m$. Следовательно, задача (10) разрешима для всех $u\in U$, $\eta\in L^2(0,T;V')$, $\xi_0\in H$, что доказывает лемму. □

Для вывода системы оптимальности будем использовать следующие условия дифференцируемости целевого функционала.

(jv) $\forall u\in U_{ad}$ *отображение $y\to J(y,u)$ дифференцируемо по Фреше в точке $\{\hat y,u\}$, и при этом отображение $U_{ad}\ni u\to J'_y(\hat y,u)\in Y'$ непрерывно в точке $\hat u$; существует дифференциал Гато $\langle J'_u(\hat y,\hat u),u-\hat u\rangle$ отображения $U_{ad}\ni u\to J(\hat y,u)$ в точке $\hat u$ в направлении $u-\hat u$.*

В соответствии с леммой 2 лагранжиан задачи (CP) имеет вид

$$L(y,u,p,q)=J(y,u)+\int\limits_0^T\Big(y'+Ay-f\cdot h(y)+u\cdot y-f_0-\mathrm{g}_b,p\Big)\,dt+(y(0)-y_0,q).$$

Здесь $\{p,q\}\in L^2(0,T;V)\times H$ — сопряженное состояние. Если $\{\hat y,\hat u\}$ — решение задачи (CP), то в силу принципа Лагранжа [6, Теорема 1.5] существует пара $\{p,q\}\in$

$L^2(0,T;V)\times H$ такая, что для $z\in Y, v\in U_{ad}$ справедливы соотношения

$$\langle J'_y(\hat{y},\hat{u}),z\rangle+\int\limits_0^T(z'+Az-f\cdot h'(\hat{y})z+\hat{u}\cdot z,p)dt+(z(0),q)=0, \tag{11}$$

$$\langle J'_u(\hat{y},\hat{u}),v-\hat{u}\rangle+\int\limits_0^T(\hat{y},p)(v-\hat{u})dt\geqslant 0. \tag{12}$$

Конкретизируем вид производных целевого функционала. Пусть

$$\langle J'_y(\hat{y},\hat{u}),z\rangle=(q_T,z(T))+\int\limits_0^T(q(t),z(t))dt\ \ \forall z\in Y; \tag{v}$$

$$\langle J'_u(\hat{y},\hat{u}),v\rangle=\int\limits_0^T\xi(t)v(t)dt\ \ \forall v\in U_{ad}-\hat{u}.$$

Здесь $q_T\in H$, $q\in L^2(0,T;V')$, $\psi\in L^2(0,T;V')$, $\xi\in U$.

В этом случае, полагая в (11) $z\in C_0^\infty(0,T;V)$, заключаем, что в смысле распределений на $(0,T)$ справедливо равенство

$$-p'+Ap-f\cdot h'(\hat{y})p+\hat{u}\cdot p=-q. \tag{13}$$

Из этого равенства, поскольку $p\in L^2(0,T;V)$, вытекает, что $p'\in L^2(0,T;V')$. Кроме того, из (11), (13) вытекает равенство $(p(T)+q_T,z(T))-(p(0),z(0))+(z(0),q)=0$ для всех $z\in Y$. Поэтому $p(T)=-q_T$.

Таким образом, из условий (11), (12) получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (i)–(ii), (j)–(jv) и условие (v). Если $\{\hat{y},\hat{u}\}$ — решение задачи (CP), то существует единственная функция $p\in Y$ такая, что*

$$-p'+Ap-f\cdot h'(\hat{y})p+\hat{u}\cdot p=-q,\quad p(T)=-q_T. \tag{14}$$

и при этом

$$\int\limits_0^T(\xi+(\hat{y},p))(v-\hat{u})dt\geqslant 0\quad\forall v\in U_{ad}.$$

4. Примеры

Распределенное наблюдение на подобласти. Пусть

$$J(y,u)=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_0}(y-y_d)^2dx+\lambda|u|^2\right)dt,\quad u\in U_{ad}=U=L^2(0,T). \tag{15}$$

Здесь Ω_0 — подобласть Ω, $y_d\in L^2(Q)$, $\lambda=\text{const}>0$. Из теорем 2, 3 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (i)–(ii). Тогда существует* $\{\hat{y}, \hat{u}\}$ — *решение задачи* (CP) *с целевым функционалом* (15), *для которого найдется единственная функция* $p \in Y$ *такая, что*

$$-\,p' + Ap - f \cdot h'(\hat{y})p + \hat{u} \cdot p = \,-\,\chi_0(y - y_d), \quad p(T) = 0,$$

и при этом $\lambda\hat{u} = \,-\,(\hat{y}, p)$. *Здесь* $\chi_0 = 1$ *в* Ω_0 *и* $\chi_0 = 0$ *в* $\Omega \setminus \Omega_0$.

Финальное наблюдение. Пусть

$$\begin{gathered} J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(y\,\big|_{t\,=\,T} - y_d\right)^2 dx, \\ u \in U_{ad} = \Big\{v \in U,\ u_1(t) \leqslant v \leqslant u_2(t),\, t \in (0,T)\Big\}. \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $y_d \in H, u_1, u_2 \in L^2(0,T)$ — заданные функции, $0 \leqslant u_1(t) < u_2(t)$. Применяя к задаче оптимального управления теоремы 2, 3, получаем релейность оптимального управления.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия (i)–(ii). Тогда существует* $\{\hat{y}, \hat{u}\}$ — *решение задачи* (CP) *с целевым функционалом* (16), *для которого найдется единственная функция* $p \in Y$ *такая, что*

$$-\,p' + Ap - f \cdot h'(\hat{y})p + \hat{u} \cdot p = 0, \quad p(T) = y_d - y(T)$$

и при этом

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{если } (p(t), \hat{y}(t)) < 0; \\ u_2(t), & \text{если } (p(t), \hat{y}(t)) > 0. \end{cases}$$

Список литературы

[1] S. T. Rutherford, B. L. Bassler, “Bacterial quorum sensing: its role in virulence and possibilities for its control”, *Cold Spring Harb. Perspect. Med.*, **2** (2012), a012427.

[2] A. K. Bhardwa, K. Vinothkumar, N. Rajpara, “Bacterial quorum sensing inhibitors: attractive alternatives for control of infectious pathogens showing multiple drug resistance”, *Recent Pat. Antiinfect. Drug Discov.*, **8** (2013), 68–83.

[3] C. Kuttler, A. Maslovskaya, “Hybrid stochastic fractional-based approach to modeling bacterial quorum sensing”, *Math. Model.*, **93** (2021), 360–375.

[4] A. Maslovskaya, C. Kuttler, A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, “Opyimal multiplicative control of bacterial quorum sensing under external enzyme impact”, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **17** (2022), 29.

[5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, Москва, 1974.

[6] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999.

[7] J-L Lions, E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, New York, 1972.

Поступила в редакцию
3 мая 2023 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00087.

Chebotarev A. Yu. Optimal multiplicative control of a semilinear parabolic equation. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 2. P. 270–277.

[1] Far Eastern Federal University, Far Eastern Center for Research and Education in Mathematics, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

An analysis of optimal control problems for a nonlinear parabolic initial-boundary value problem that models the dynamics of the collective behavior of a bacterial community is presented. Estimates for the solution of the initial-boundary value problem are obtained, the solvability of control problems is proved, and optimality conditions are derived. The weak ¡¡bang-bang¿¿ principle is set for the problem with the final observation.

Key words: *optimal control problems, optimality system, semilinear parabolic equation, multiplicative control.*