Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 1. С. 96–106

УДК 517.51
MSC2020 42B30 + 46E30

© Д. В. Прохоров[1]

О пространствах, ассоциированных к пространству Харди

В работе дано описание ассоциированных пространств и вторых ассоциированных пространств к пространству Харди на $\mathbb{R}^n$. Доказаны также некоторые результаты об ассоциированных пространствах к пространству $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Ключевые слова: *пространства Харди,* BMO*, ассоциированные пространства.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202409

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$. Под кубом понимаем замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям.

Через $\mathcal{L}^n$ обозначим n-мерную меру Лебега на $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}^n$ обозначает комплексное векторное пространство всех $\mathcal{L}^n$-измеримых функций $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$. Для $p\in[1,\infty]$ определим сопряженный параметр $p'\in[1,\infty]$, положив $p':=\frac{p}{p-1}$ при $p\in(1,\infty)$, $p':=\infty$ при $p=1$, $p':=1$ при $p=\infty$. Пространства $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ определяются стандартным образом:

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f\in\mathfrak{M}^n \,\middle|\, \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}<\infty \right\},$$
$$L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f\in\mathfrak{M}^n \,\middle|\, \|f\chi_K\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}<\infty,\ \forall \text{ компакта } K\subset\mathbb{R}^n \right\},$$

где

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} := \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^p\,d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{p}}, & p\in[1,\infty),\\ \mathcal{L}^n\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|, & p=\infty. \end{cases}$$

Пусть символ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ обозначает пространство всех быстро убывающих функций $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — его сопряженное. Если $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и существует $\ell_u\in\mathfrak{M}^n$ такая,

[1] Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65. Электронная почта: prohorov@as.khb.ru

что
$$u(\phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \ell_u \phi \, d\mathcal{L}^n, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

то функцию ℓ_u будем называть плотностью функционала u. Если $Y \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что для каждого $u \in Y$ существует ℓ_u, то определим $\ell_{[Y]} := \{\ell_u \,|\, u \in Y\}$. Для $f \in \mathfrak{M}^n$ символом J_f обозначим функционал
$$J_f(\phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \phi \, d\mathcal{L}^n, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

если $J_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Фиксируем функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, для которой $\kappa_\varphi := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mathcal{L}^n \neq 0$. Пространством Харди на $\mathbb{R}^n$ называют
$$H^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \exists \ell_u \in L_1(\mathbb{R}^n),\, \mathcal{M}_\varphi \ell_u \in L_1(\mathbb{R}^n) \right\},$$

где
$$(\mathcal{M}_\varphi f)(x) := \sup_{t>0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} t^n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\, dy \right|, \quad f \in L_1(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Норма на $H^1(\mathbb{R}^n)$ задается равенством $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} := \|\mathcal{M}_\varphi \ell_u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$. Для $f \in \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$ также положим $\|f\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}} := \|J_f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$. Определение пространства $H^1(\mathbb{R}^n)$ не зависит от выбора функции φ, а нормы $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$, построенные по разным φ_1 и φ_2 ($\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\kappa_{\varphi_1} \neq 0$ и $\kappa_{\varphi_2} \neq 0$), эквивалентны. Свойства пространства $H^1(\mathbb{R}^n)$ детально описаны в монографии [1, Chapter III, IV]. В теоремах 1–3 приведены формулировки тех свойств $H^1(\mathbb{R}^n)$, которые будем использовать.

Теорема 1. *(i) Для $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ выполнено $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \ell_u \, d\mathcal{L}^n = 0$ и*
$$\|\ell_u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|\kappa_\varphi|} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) Пусть $p \in (1, \infty]$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f \, d\mathcal{L}^n = 0$, $\operatorname{supp} f \subset Q$ для некоторого куба Q. Тогда $J_f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ и $\|J_f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_1^*(n,p,\varphi) \mathcal{L}^n(Q)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$.

Важную роль в теории пространств Харди играет разложение на атомы элемента пространства. Функция $a \in \mathfrak{M}^n$ называется атомом (связанным с кубом Q), если (i) носитель a содержится в Q, (ii) $\mathcal{L}^n(Q)\|a\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant 1$ и (iii) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} a \, d\mathcal{L}^n = 0$. Заметим, что $J_a \in H^1(\mathbb{R}^n)$ для любого атома a в силу теоремы 1(ii). Элемент J_a также будем называть атомом. Через $H^1_{atom}(\mathbb{R}^n)$ обозначим подпространство $H^1(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех конечных линейных комбинаций атомов $J_a \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. *Пусть* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(i) *Если существуют последовательность атомов* $\{b_i\}_1^\infty$ *и последовательность чисел* $\{\lambda_i\}_1^\infty \subset \mathbb{C}$ *такие, что* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i J_{b_i} \to u$ *при* $j \to \infty$ *в слабой** *топологии пространства* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *то* $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{j} \lambda_i J_{b_i} - u \right\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{1}$$

и

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_1^*(n, \infty, \varphi) \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|.$$

(ii) *Если* $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, *то существуют константа* $c_2^*(n,\varphi) > 0$, *последовательность атомов* $\{b_i\}_1^\infty$ *и последовательность* $\{\lambda_i\}_1^\infty \subset \mathbb{C}$ *такие, что выполнено* (1) *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leqslant c_2^*(n, \varphi) \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Сопряженное к $H^1(\mathbb{R}^n)$ пространство описывается в терминах элементов пространства $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, определение которого дано ниже.

Для $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{L}^n$-измеримого $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим $\operatorname{Avg}_E(f) := \frac{1}{\mathcal{L}^n(E)} \int\limits_E f \, d\mathcal{L}^n$. По определению полагают

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} := \sup_Q \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \int\limits_Q |f - \operatorname*{Avg}_Q (f)| \, d\mathcal{L}^n, \quad f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

где супремум берется по всем кубам Q, и

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} < \infty \Big\}.$$

Символ $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ обозначает замыкание по $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$-норме пространства $C_c(\mathbb{R}^n)$ всех непрерывных функций с компактными носителями.

Теорема 3. (i) *Для* $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *существует единственный функционал* $\Upsilon \in (H^1(\mathbb{R}^n))^*$ *такой, что равенство*

$$\Upsilon(J_a) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f a \, d\mathcal{L}^n \tag{2}$$

выполнено для любого атома $J_a \in H^1(\mathbb{R}^n)$. *При этом имеет место оценка*

$$\|\Upsilon\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))^*} \leqslant c_2^*(n, \varphi) \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) *Для* $\Upsilon \in (H^1(\mathbb{R}^n))^*$ *существует* $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *такая, что равенство* (2) *выполнено для любого атома* $J_a \in H^1(\mathbb{R}^n)$. *При этом имеет место оценка*

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 4 c_1^*(n, 2, \varphi) \|\Upsilon\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))^*}.$$

Описание ассоциированных пространств

Аккуратная теория пространств, ассоциированных к Банаховым функциональным пространствам, изложена в книге [2, Chapter 1]. Для неидеальных пространств можно рассмотреть два типа ассоциированных пространств [3, 4].

Пусть X — векторное подпространство пространства $\mathfrak{M}^n$ и топология на X задана при помощи полунормы $p_X : X \to [0,\infty)$. «Сильное» ассоциированное пространство определяется равенством

$$X'_{\mathrm{s}} := (X, p_X)'_{\mathrm{s}} := \left\{ \mathrm{g} \in \mathfrak{M}^n \,\middle|\, \exists C_{\mathrm{s}}(\mathrm{g}) > 0 : \int\limits_{\mathbb{R}^n} |h\mathrm{g}|\, d\mathcal{L}^n \leqslant C_{\mathrm{s}}(\mathrm{g})\, p_X(h), \quad \forall h \in X \right\},$$

а «слабое» ассоциированное пространство равенством

$$X'_{\mathrm{w}} := (X, p_X)'_{\mathrm{w}} := \left\{ \mathrm{g} \in \mathfrak{M}^n \,\middle|\, f\mathrm{g} \in L_1(\mathbb{R}^n),\ \forall f \in X \right.$$
$$\left. \&\ \exists C_{\mathrm{w}}(\mathrm{g}) > 0 : \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} h\mathrm{g}\, d\mathcal{L}^n \right| \leqslant C_{\mathrm{w}}(\mathrm{g})\, p_X(h), \quad \forall h \in X \right\}.$$

Ясно, что $X'_{\mathrm{s}} \subset X'_{\mathrm{w}}$. Пространство X'_{w} изоморфно подпространству пространства X^*, состоящего из всех непрерывных линейных функционалов вида $f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{g}\, d\mathcal{L}^n$, $f \in X$. Также положим $\|\mathrm{g}\|_{X'_{\mathrm{s}}} := \inf C_{\mathrm{s}}(\mathrm{g})$ для $\mathrm{g} \in X'_{\mathrm{s}}$, и $\|\mathrm{g}\|_{X'_{\mathrm{w}}} := \inf C_{\mathrm{w}}(\mathrm{g})$ для $\mathrm{g} \in X'_{\mathrm{w}}$.

Так как у каждого элемента пространства $H^1(\mathbb{R}^n)$ существует плотность, то имеет смысл рассматривать ассоциированные к $H^1(\mathbb{R}^n)$ пространства, а именно

$$(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}} := \left\{ \mathrm{g} \in \mathfrak{M}^n \,\middle|\, \|\mathrm{g}\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}}} := \sup_{u \in H^1(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}\ell_u|\, d\mathcal{L}^n}{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}} < \infty \right\},$$

$$(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}} := \left\{ \mathrm{g} \in \mathfrak{M}^n \,\middle|\, \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}\ell_u|\, d\mathcal{L}^n < \infty,\ \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^n) \right.$$
$$\left. \&\ \|\mathrm{g}\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} := \sup_{u \in H^1(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}\ell_u\, d\mathcal{L}^n \right|}{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}} < \infty \right\}.$$

Для «сильного» ассоциированного к $H^1(\mathbb{R}^n)$ пространства справедлив следующий результат.

Теорема 4. *Имеет место эквивалентность* $\mathrm{g} \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}} \Leftrightarrow \mathrm{g} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. *Кроме того,*

$$\|\mathrm{g}\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}}} \leqslant \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|\kappa_\varphi|} \|\mathrm{g}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad \|\mathrm{g}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_1^*(n, \infty, \varphi) \|\mathrm{g}\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}}}.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{g} \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}}$. Для произвольного куба Q с центром в точке x положим

$$E_Q := [(Q-x)\cap\mathbb{R}^n_+] + x, \quad a_Q := \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)}(\chi_{Q\setminus E_Q} - \chi_{E_Q}). \tag{3}$$

Тогда a_Q есть атом, связанный с кубом Q. Так как $J_{a_Q} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, то $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}a_Q|\,d\mathcal{L}^n < \infty$. Откуда вытекает, что $\mathrm{g} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть x_0 — произвольная точка Лебега функции $|\mathrm{g}|$, $I(x_0,l)$ обозначает куб с центром в точке x_0 и длиной ребра l. Тогда

$$|\mathrm{g}(x_0)| = \lim_{l\to 0+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(I(x_0,l))} \int\limits_{I(x_0,l)} |\mathrm{g}|\,d\mathcal{L}^n = \lim_{l\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}a_{I(x_0,l)}|\,d\mathcal{L}^n \leqslant c_1^*(n,\infty,\varphi)\,\|\mathrm{g}\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}}}.$$

Таким образом, $\mathrm{g} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\|\mathrm{g}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_1^*(n,\infty,\varphi)\|\mathrm{g}\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}}}$.

Пусть теперь $\mathrm{g} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Для произвольного $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ в силу теоремы $1(i)$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}\ell_u|\,d\mathcal{L}^n \leqslant \|\mathrm{g}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\|\ell_u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|\kappa_\varphi|}\|\mathrm{g}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Следующие лемма и теорема содержат описание «слабого» ассоциированного к $H^1(\mathbb{R}^n)$ пространства.

Лемма 1. *Имеет место эквивалентность* $\mathrm{g} \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}} \Leftrightarrow$

$$\mathrm{g} \in \left\{ h \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \int\limits_{\mathbb{R}^n} |h\ell_u|\,d\mathcal{L}^n < \infty,\ \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^n) \right\}. \tag{4}$$

И для любого $\mathrm{g} \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ *справедливы оценки*

$$\frac{1}{4c_1^*(n,2,\varphi)}\|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\mathrm{g}\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} \leqslant c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть выполнено (4). Обозначим $\mathrm{g}^{(1)} := \mathrm{Re}\,\mathrm{g}$ и $\mathrm{g}^{(2)} := \mathrm{Im}\,\mathrm{g}$. Для $j \in \{1,2\}$, $k \in \mathbb{N}$ и $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ положим

$$\mathrm{g}_k^{(j)}(x) := \begin{cases} \mathrm{g}^{(j)}(x), & |\mathrm{g}^{(j)}(x)| < k, \\ k, & \mathrm{g}^{(j)}(x) > k, \\ -k, & \mathrm{g}^{(j)}(x) < -k; \end{cases} \qquad \Upsilon_k^{(j)}(u) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}_k^{(j)}\ell_u\,d\mathcal{L}^n.$$

Заметим, что $\mathrm{g}_k^{(j)} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ и $\|\mathrm{g}_k^{(j)}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 3\|\mathrm{g}^{(j)}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$. Так как $\mathrm{g}_k^{(j)} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\Upsilon_k^{(j)} \in (H^1(\mathbb{R}^n))^*$ и по теореме $3(i)$

$$|\Upsilon_k^{(j)}(u)| \leqslant c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}_k^{(j)}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant 3c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}^{(j)}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Далее, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}^{(j)}\ell_u|\, d\mathcal{L}^n \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}\ell_u|\, d\mathcal{L}^n < \infty$ и по теореме Лебега об ограниченной сходимости при $k \to \infty$ получим

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}^{(j)}\ell_u\, d\mathcal{L}^n\right| \leqslant 3c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}^{(j)}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Откуда

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}\ell_u\, d\mathcal{L}^n\right| \leqslant 6c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)},$$

то есть $\mathrm{g} \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$. Тогда функционал $\Upsilon : H^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, определяемый формулой

$$\Upsilon(u) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}\ell_u\, d\mathcal{L}^n, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^n),$$

принадлежит $(H^1(\mathbb{R}^n))^*$, и теорема 3 влечет оценки (5). □

Теорема 5. $(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}} = \big(L_\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\big)$.

Доказательство. По лемме 1 достаточно доказать, что если $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и выполнено $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f\ell_u|\, d\mathcal{L}^n < \infty$ для всех $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, то $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Предположим, что $f \notin L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Символом E_f обозначим множество всех точек Лебега функции $|f|$. Так как $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E_f) = 0$. Соотношение $f \notin L_\infty(\mathbb{R}^n)$ влечет существование счетного множества точек $\{x_j\}_1^\infty \subset E_f$ таких, что $|f(x_k)| \geqslant k^2$ для $k \in \mathbb{N}$. Множество $\{x_j\}_1^\infty$ либо имеет точку сгущения, либо не ограничено. В обоих случаях существует подпоследовательность $\{x_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ и множество кубов $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ с такими свойствами: x_{j_k} есть центр куба I_k, $I_k \cap I_{k'} = \emptyset$ при $k \neq k'$, $\frac{1}{\mathcal{L}^n(I_k)} \int\limits_{I_k} |f|\, d\mathcal{L}^n \geqslant \frac{|f(x_{j_k})|}{2}$. Заметим, что $|f(x_{j_k})| \geqslant k^2$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Для $k \in \mathbb{N}$ пусть a_{I_k} обозначает функцию, построенную, как в (3), для куба $Q := I_k$. Положим $h(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} a_{I_k}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$, для любого $k \in \mathbb{N}$ функция a_{I_k} есть атом, и для $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} h\phi\, d\mathcal{L}^n - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} a_{I_k}\right] \phi\, d\mathcal{L}^n\right| \leqslant \|\phi\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int\limits_{I_k} |a_{I_k}|\, d\mathcal{L}^n \leqslant$$

$$\leqslant \|\phi\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Применяя теорему 2(i), получим $J_h \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |fh|\, d\mathcal{L}^n \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{I_k} |fh|\, d\mathcal{L}^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \mathcal{L}^n(I_k)} \int\limits_{I_k} |f|\, d\mathcal{L}^n \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

и мы получили противоречие. □

Следующая теорема описывает вторые ассоциированные пространства.

Теорема 6. *(i)* $\mathrm{g} \in ((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{s}} \Leftrightarrow \mathrm{g} = 0$ $\mathcal{L}^n$*-п.в. на* $\mathbb{R}^n$.

(ii) $((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}} = \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$.

Доказательство. *(i)*. Для $\mathrm{g} \in ((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{s}}$ равенство $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}f|\, d\mathcal{L}^n = 0$ необходимо для любой $f \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ со свойством $\|f\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} = 0$. Так как $\chi_{\mathbb{R}^n}$ принадлежит $(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ и $\|\chi_{\mathbb{R}^n}\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} = 0$, то $\mathrm{g} = 0$ $\mathcal{L}^n$-п.в. на $\mathbb{R}^n$.

(ii). Пусть $\mathrm{g} \in ((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}$. По определению пространства $(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ для любой $f \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ выполнено $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}f|\, d\mathcal{L}^n < \infty$ и

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}f\, d\mathcal{L}^n \right| \leqslant \|\mathrm{g}\|_{((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}} \|f\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}}.$$

Так как $\chi_{\mathbb{R}^n} \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ и $\|\chi_{\mathbb{R}^n}\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} = 0$, то $\mathrm{g} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}\, d\mathcal{L}^n = 0$.

Обозначим $M := c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}\|_{((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}}$. Для функции $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ положим $\Lambda f := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{g}\, d\mathcal{L}^n$. Тогда справедлива оценка $|\Lambda f| \leqslant M\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$, и по теореме Хана–Банаха [5, 3.3] существует линейное продолжение $\tilde{\Lambda}$ на $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ функционала Λ с сохранением оценки $|\tilde{\Lambda} f| \leqslant M\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ для любой $f \in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$. В силу [6, Theorem (4.1)] существуют константы $\tilde{c}_1(n,\varphi) > 0$, $\tilde{c}_2(n,\varphi) > 0$ и функция $\tilde{\mathrm{g}} \in \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$ такие, что $\tilde{\Lambda}\phi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi\tilde{\mathrm{g}}\, d\mathcal{L}^n$ для $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ и

$$\tilde{c}_1(n,\varphi)\|\tilde{\mathrm{g}}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}} \leqslant \|\tilde{\Lambda}\|_{(\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n))^*} \leqslant \tilde{c}_2(n,\varphi)\|\tilde{\mathrm{g}}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}}.$$

Тогда

$$\|\tilde{\mathrm{g}}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}} \leqslant \frac{1}{\tilde{c}_1(n,\varphi)}\|\tilde{\Lambda}\|_{(\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n))^*} \leqslant \frac{M}{\tilde{c}_1(n,\varphi)}.$$

Откуда $\tilde{\Lambda}\phi = \Lambda\phi$ для любой $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, то есть $\tilde{\mathrm{g}} = \mathrm{g}$ $\mathcal{L}^n$-п.в. на $\mathbb{R}^n$. Это влечет $\mathrm{g} \in \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$ и $\|\mathrm{g}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}} \leqslant \frac{1}{\tilde{c}_1(n,\varphi)} c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}\|_{((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}}$.

Имеет место обратное вложение $\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]} \subset ((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}$, ибо для любого $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f\ell_u|\, d\mathcal{L}^n < \infty, \quad \forall\, f \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$$

и выполнено

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\ell_u\, d\mathcal{L}^n \right| \leqslant \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}}, \quad \forall\, f \in (H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}.$$

Кроме того, $\|\ell_u\|_{((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}} \leqslant \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$. □

Далее в работе получены описания пространств, ассоциированных к $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 7. *(i)* $(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}} \subsetneq \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$ *и для* $\mathrm{g} \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ *выполнено неравенство*

$$\|\mathrm{g}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}} \leqslant \frac{4c_1^*(n,2,\varphi)c_2^*(n,\varphi)}{\tilde{c}_1(n,\varphi)}\|\mathrm{g}\|_{(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}}.$$

(ii) $\mathrm{g} \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}} \Leftrightarrow$

$$\mathrm{g} \in \left\{ h \in \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]} \,\middle|\, \int\limits_{\mathbb{R}^n} |hf|\, d\mathcal{L}^n < \infty, \quad \forall\, f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \right\}. \tag{6}$$

Кроме того, для $\mathrm{g} \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ *имеют место оценки*

$$\frac{\tilde{c}_1(n,\varphi)}{4c_1^*(n,2,\varphi)c_2^*(n,\varphi)}\|\mathrm{g}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}} \leqslant \|\mathrm{g}\|_{(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} \leqslant 6c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}}.$$

(iii) Пусть

$$Y := \left\{ h \in \bigcup_{p\in(1,\infty]} L_p(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \operatorname{supp} h \text{ компакт в } \mathbb{R}^n,\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} h\, d\mathcal{L}^n = 0 \right\}.$$

Тогда $Y \subsetneq (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ *и замыкание* Y *в пространстве* $\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$ *совпадает с* $\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$.

Доказательство. *(i)*. Для произвольной $\mathrm{g} \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ имеем

$$\|\mathrm{g}\|_{(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} \geqslant \sup_{f\in L_\infty(\mathbb{R}^n):\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\neq 0} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}f\, d\mathcal{L}^n\right|}{\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{f\in L_\infty(\mathbb{R}^n):\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\neq 0} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}f\, d\mathcal{L}^n\right|}{4c_1^*(n,2,\varphi)\|f\|_{(H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}}} = \frac{1}{4c_1^*(n,2,\varphi)}\|\mathrm{g}\|_{((H^1(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\tilde{c}_1(n,\varphi)}{4c_1^*(n,2,\varphi)c_2^*(n,\varphi)}\|\mathrm{g}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}}.$$

Пример [1, IV, 6.2] показывает, что $(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}} \neq \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$.

(ii). Пусть выполнено (6). Фиксируем произвольную $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Приближая функцию f функциями из $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$, как при доказательстве леммы 1, получим оценку

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{g}f\, d\mathcal{L}^n\right| \leqslant 6c_2^*(n,\varphi)\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\|\mathrm{g}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}}.$$

Откуда $\mathrm{g} \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ и $\|\mathrm{g}\|_{(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} \leqslant 6c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}}$.

(iii). Пусть $p \in (1,\infty]$, $h \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} h \subset Q$ для некоторого куба Q, и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} h d\mathcal{L}^n = 0$. Фиксируем произвольную $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Так как (см. [1, IV, 1.3]) $f \in L_{p'}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |fh|\, d\mathcal{L}^n < \infty$ и в силу [1, IV, 1.3] имеем

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} fh\, d\mathcal{L}^n \right| = \left| \int\limits_{Q} \Big(f - \operatorname*{Avg}_{Q}(f) \Big) h\, d\mathcal{L}^n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \int\limits_{Q} \left| f - \operatorname*{Avg}_{Q}(f) \right|^{p'} d\mathcal{L}^n \right]^{\frac{1}{p'}} \|h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}^n(Q)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant c(n,p) \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}^n(Q)^{\frac{1}{p'}}.$$

Полученная оценка влечет $h \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$.

Для $k \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\mathrm{g}(x) := \Big[\chi_{\mathbb{R}^n_+}(x) - \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+}(x) \Big] (1 + |x|)^{-(n+1)}, \quad \lambda_k := 2^{n(k+2)} (1 + 2^k)^{-(n+1)},$$
$$a_k(x) := 2^{-n(k+2)} (1 + 2^k)^{n+1} \mathrm{g}(x) \chi_{\{y \in \mathbb{R}^n : |y| \in [2^k, 2^{k+1})\}}(x).$$

Тогда $\mathrm{g} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, каждая a_k является атомом и $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda_k| < \infty$. Так как при $m \to \infty$ и $k \to -\infty$ имеем $\sum\limits_{j=k}^{m} \lambda_j J_{a_j} \to J_{\mathrm{g}}$ в слабой* топологии пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то $J_{\mathrm{g}} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ в силу теоремы 2(i). Следовательно, $\mathrm{g} \in \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$ и $\mathrm{g} \notin Y$, ибо $\operatorname{supp} \mathrm{g}$ не является компактом в $\mathbb{R}^n$. Однако в силу [1, IV, 1.1.4] для любой $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f\mathrm{g}|\, d\mathcal{L}^n < \infty$, и теорема 7$(ii)$ влечет $\mathrm{g} \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$.

Так как $\ell_{[H^1_{atom}(\mathbb{R}^n)]} \subset Y$, то замыкание Y в пространстве $\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$ совпадает с $\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$. □

Следствие 1. *Пространство* $(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ *не является полным.*

Доказательство. Предположим, что $(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ полное. Фиксируем произвольную $\mathrm{g} \in \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$. По теореме 2$(ii)$ существует $\{\mathrm{g}_k\}_1^\infty \subset \ell_{[H^1_{atom}(\mathbb{R}^n)]}$ со свойством $\|\mathrm{g}_k - \mathrm{g}\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}} \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда $\{\mathrm{g}_k\}_1^\infty$ является последовательностью Коши в $\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$. В силу теоремы 7$(iii)$ $\{\mathrm{g}_k\}_1^\infty$ является последовательностью Коши и в пространстве $(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$. По предположению существует $\mathrm{g}_0 \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ такая, что $\|\mathrm{g}_k - \mathrm{g}_0\|_{(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} \to 0$ при $k \to \infty$. Применяя теорему 7(i), имеем $\|\mathrm{g}_k - \mathrm{g}_0\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}} \to 0$ при $k \to \infty$, то есть $\mathrm{g} = \mathrm{g}_0 \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$. Получили противоречие. □

Теорема 8. (i) $\mathrm{g} \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}} \Leftrightarrow \mathrm{g} = 0$ $\mathcal{L}^n$*-п.в. на* $\mathbb{R}^n$.
(ii) $((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}} = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.
(iii) $((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{s}} = L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. (i). Для $\mathrm{g} \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{s}}$ равенство $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}f|\, d\mathcal{L}^n = 0$ необходимо для любой $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ со свойством $\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = 0$. В случае $f = \chi_{\mathbb{R}^n}$ имеем $\mathrm{g} = 0$ $\mathcal{L}^n$-п.в. на $\mathbb{R}^n$.

(ii). Фиксируем произвольную функцию $\mathrm{g} \in ((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}$. Обозначим $M := 6c_2^*(n,\varphi)\|\mathrm{g}\|_{((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}}$. Для любой $f \in \ell_{[H^1_{atom}(\mathbb{R}^n)]} \subset (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ положим $\Lambda f := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{g}\, d\mathcal{L}^n$. Заметим, что

$$|\Lambda f| \leqslant \|\mathrm{g}\|_{((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}} \|f\|_{(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}} \leqslant M\|f\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}}.$$

По теореме Хана–Банаха [5, 3.3] существует линейное продолжение $\tilde{\Lambda}$ на $\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$ функционала Λ с сохранением оценки: $|\tilde{\Lambda} f| \leqslant M\|f\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}}$, $f \in \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}$. В силу теоремы 3$(ii)$ существует $\tilde{\mathrm{g}} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\tilde{\Lambda} f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\tilde{\mathrm{g}}\, d\mathcal{L}^n$ для $f \in \ell_{[H^1_{atom}(\mathbb{R}^n)]}$, и справедлива оценка

$$\|\tilde{\mathrm{g}}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 4c_1^*(n,2,\varphi)\|\tilde{\Lambda}\|_{(\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]})^*} \leqslant 4c_1^*(n,2,\varphi)M.$$

Тогда $\tilde{\Lambda} f = \Lambda f$ для $f \in \ell_{[H^1_{atom}(\mathbb{R}^n)]}$. Так как

$$\Big\{D^i f \,\Big|\, f \in C_c^1(\mathbb{R}^n),\ i \in \{1,\ldots,n\}\Big\} \subset \ell_{[H^1_{atom}(\mathbb{R}^n)]},$$

то существует (см. [7, 1.1.11], ибо равны нулю все обобщенные производные первого порядка функции $\tilde{\mathrm{g}} - \mathrm{g}$) константа $\lambda \in \mathbb{C}$ такая, что $\tilde{\mathrm{g}} - \mathrm{g} = \lambda$ $\mathcal{L}^n$-п.в. на $\mathbb{R}^n$. Следовательно, $\mathrm{g} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 24c_2^*(n,\varphi)c_1^*(n,2,\varphi)\|\mathrm{g}\|_{((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}}.$$

Для доказательства обратного вложения фиксируем произвольную $\mathrm{g} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Для любой $f \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$ теорема 7(ii) влечет $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f\mathrm{g}|\, d\mathcal{L}^n < \infty$ и

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{g}\, d\mathcal{L}^n\right| \leqslant \|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}},$$

то есть $\mathrm{g} \in ((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}$ и $\|\mathrm{g}\|_{((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{w}}} \leqslant \|\mathrm{g}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$.

(iii). Фиксируем произвольную $\mathrm{g} \in ((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{s}}$. Аналогично доказательству теоремы 4 имеем

$$\|\mathrm{g}\|_{((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{s}}} \geqslant \sup_{f \in H^1_{atom}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{g}f|\, d\mathcal{L}^n}{6c_2^*(n,\varphi)\|f\|_{\ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]}}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{6c_2^*(n,\varphi)c_1^*(n,\infty,\varphi)}\|\mathrm{g}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Фиксируем теперь произвольную $\mathrm{g} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Для любой $f \in (\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}$, учитывая $(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}} \subset \ell_{[H^1(\mathbb{R}^n)]} \subset L_1(\mathbb{R}^n)$, имеет место оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f\mathrm{g}|\, d\mathcal{L}^n \leqslant \|\mathrm{g}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\mathrm{g}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} 4c_1^*(n,2,\varphi)c_2^*(n,\varphi)}{|\kappa_\varphi|\,\tilde{c}_1(n,\varphi)}\|f\|_{(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}}},$$

то есть $\mathrm{g} \in ((\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n))'_{\mathrm{w}})'_{\mathrm{s}}$. □

Список литературы

[1] Stein E. M., *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[2] Bennett C., Sharpley R., *Interpolation of operators*, Academic Press, Inc., Boston, 1988.

[3] Prokhorov D. V., “On the dual spaces for weighted altered Cesàro and Copson spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **514**:2, (2022), article 126325.

[4] Прохоров Д. В., Степанов В. Д., Ушакова Е. П., “Характеризация функциональных пространств, ассоциированных с весовыми пространствами Соболева первого порядка на действительной оси”, *УМН*, **74**:6(450), (2019), 119–158.

[5] Рудин У., *Функциональный анализ*, Мир, М, 1975.

[6] Coifman R. R., Weiss G., “Extensions of Hardy spaces and their use in analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**, (1977), 569–645.

[7] Мазья В. Г., *Пространства С. Л. Соболева*, ЛГУ, Л., 1985.

Поступила в редакцию
8 ноября 2023 г.

Prokhorov D. V.[1] On the associated spaces of the Hardy space. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 1. P. 96–106.

[1] Computing Center, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Russia

ABSTRACT

Characterizations of the associated spaces and second associated spaces of the Hardy space on $\mathbb{R}^n$ are given. Some results on the associated spaces of the $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ space are proved also.

Key words: *Hardy spaces,* BMO*, associated spaces.*