Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 2. С. 170–177

УДК 517.95
MSC2020 35J60 + 80A23

© Г. В. Гренкин[1]

Идентификация тепловых источников в модели сложного теплообмена

Рассматривается задача восстановления мощностей источников тепла при заданных их объемных плотностях и известных значениях средней температуры в рамках модели сложного теплообмена. Предложен алгоритм для численного решения этой задачи. Получены условия единственности решения.

Ключевые слова: *радиационный теплообмен, обратная задача, интегральное переопределение.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202415

Введение

Настоящая статья посвящена исследованию стационарной модели сложного теплообмена на основе диффузионного (P_1) приближения. В работах [1, 2] рассматривалась обратная задача восстановления мощностей тепловых источников при заданных их объемных плотностях и известных значениях функционалов источников на поле температуры. Установлено, что обратная задача имеет по крайней мере одно решение, и получены условия единственности решения, которые выполняются при достаточно большом коэффициенте температуропроводности.

Целью настоящей работы ставим исследование вопроса численного решения данной задачи, принимая во внимание возможную неединственность решения. Будет использована покоординатная версия алгоритма, предложенного в [3].

Отметим, что для аналогичных обратных задач для нестационарных уравнений сложного теплообмена однозначная разрешимость доказана [4]. Сходные обратные задачи, относящиеся к модели переноса кислорода в тканях мозга, исследовались в работах [5, 6], и для нестационарных уравнений также доказана безусловная единственность решения [7]. Вопросы численного решения обсуждались в работах [3,8,9]. Другие обратные задачи этого класса решались в [10–12].

[1] Владивостокский государственный университет, 690014, г. Владивосток, ул. Гоголя, 41. Электронная почта: `Gleb.Grenkin@vvsu.ru`

1. Обратная задача

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — липшицева ограниченная область с границей Γ, в которой происходит процесс радиационно-кондуктивного теплообмена, описываемый функциями: θ — установившегося поля температуры, φ — поля интенсивности излучения, усредненной по всем направлениям. Установившийся процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i, \tag{1}$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = 0 \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0 \ \text{ на } \Gamma. \tag{3}$$

Здесь величины θ и φ являются нормированными. Положительные постоянные параметры a,b,α,κ_a характеризуют радиационно-термические свойства среды, граничные функции β,γ характеризуют отражающие свойства границы. Через $\partial/\partial n$ обозначена производная в направлении внешней нормали.

Для нахождения неизвестных интенсивностей источников тепла q_i для поля температуры задается интегральное переопределение

$$(f_j,\theta) = r_j, \ j = 1,\dots,m. \tag{4}$$

Здесь $f_j\in V'$ — заданные функционалы, выражающие объемные плотности источников.

Для формализации краевой задачи будем использовать пространство Соболева $V=H^1(\Omega)$. Через (f,v) обозначаем значение функционала $f\in V'$ на элементе $v\in V$ и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, если $f,v\in L^2(\Omega)$. Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют таким условиям:

(i) $\beta,\gamma\in L^\infty(\Gamma)$, $\beta\geqslant\beta_0>0$, $\gamma\geqslant\gamma_0>0$, $0\leqslant\theta_b\in L^\infty(\Gamma)$,

(ii) $f_j\in V'$, f_j линейно независимы.

Определим операторы $A_1,A_2\colon V\to V'$ и функционалы $h_1,h_2\in V'$ по формулам:

$$(A_1\theta,v) = a(\nabla\theta,\nabla v) + \int_\Gamma \beta\theta v\,d\Gamma, \quad (A_2\varphi,v) = \alpha(\nabla\varphi,\nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v\,d\Gamma,$$

$$(h_1,v) = \int_\Gamma \beta\theta_b v\,d\Gamma, \quad (h_2,v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v\,d\Gamma.$$

Определение 1. Пара $\{\theta,\varphi\}$ называется слабым решением задачи (1)–(3), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = \sum_{i=1}^{m} q_i f_i + h_1, \quad A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3\theta) = h_2.$$

Определение 2. Вектор $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ вместе с парой $\{\theta, \varphi\}$ есть решение обратной задачи (1)–(4), если для слабого решения $\{\theta = \theta(\mathbf{q}), \varphi = \varphi(\mathbf{q})\}$ выполняются равенства

$$F_j(\mathbf{q}) \equiv (f_j, \theta) = r_j, \ j = 1, \ldots, m.$$

В [1] представлены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (i), (ii). Для любых чисел q_j слабое решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (i), (ii). Существует решение обратной задачи* (1)–(4).

2. Свойства обратной задачи

Компоненты градиента функции $F_j(\mathbf{q})$ определяются по формуле

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = (f_j, P[\theta(\mathbf{q})]f_i),$$

где $P[\theta]\colon V' \to V$ — оператор, который по функции g дает компоненту $u = P[\theta]\mathrm{g}$ решения линеаризованной системы

$$A_1 u + b\kappa_a(4|\theta|^3 u - z) = \mathrm{g}, \quad A_2 z + \kappa_a(z - 4|\theta|^3 u) = 0. \tag{5}$$

Также введем оператор $Q[\theta]\colon V' \to V$, который по функции g дает функцию $Q[\theta]\mathrm{g} = A_1^{-1} A_2 z$, где z — другая компонента решения той же системы. Поскольку система (5) имеет единственное решение [13], то операторы $P[\theta]$, $Q[\theta]$ определены корректно.

Введем функцию

$$G_j(\mathbf{q}) = (f_j, A_1^{-1}(A_2\varphi(\mathbf{q}) - h_2)),$$

а также функцию

$$S_j(\mathbf{q}) = F_j(\mathbf{q}) + bG_j(\mathbf{q}).$$

Заметим, что (ср. [3])

$$\frac{\partial G_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = (f_j, Q[\theta(\mathbf{q})]f_i), \quad \frac{\partial S_j(\mathbf{q})}{\partial q_i} = (f_j, A_1^{-1} f_i).$$

Предположим далее, что

(iii) $f_j \in L^2(\Omega)$, $f_j \geqslant 0$.

Введем на множестве источников отношение, зависящее от поля $\theta = \theta(\mathbf{q})$: пусть $(i,j) \in D[\theta]$, если выполнено *условие директивности*

$$(f_i, Q[\theta]f_i) > (f_i, Q[\theta]f_j)\frac{(f_i, A_1^{-1} f_j)}{(f_j, A_1^{-1} f_j)}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия (i)–(iii), причем при заданном векторе $\mathbf{q}$ и соответствующем ему поле $\theta = \theta(\mathbf{q})$ выполнено $(i,j) \in D[\theta]$. Тогда если при малом приращении вектора $\mathbf{q}$ общая энергия в j-м источнике $S_j(\mathbf{q})$ не уменьшается, а интенсивность i-го источника q_i растет, то величина $G_i(\mathbf{q})$ при этом увеличивается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (6) сводится к положительной ориентации векторов ∇G_i и ∇S_j с независимыми переменными q_i, q_j. Поэтому если вектор $\mathbf{d}$ таков, что $\nabla S_j(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{d} > 0$ и $d_i > 0$, то $\nabla G_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{d} > 0$. Отсюда вытекает утверждение леммы. $\square$

Лемма 2. *Для любой функции* $\mathrm{g} \in V'$ *выполнено* $(\mathrm{g}, Q[\theta]\mathrm{g}) \geqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнений (5) следует, что

$$(\mathrm{g}, Q[\theta]\mathrm{g}) = (\mathrm{g}, A_1^{-1}A_2 z) = (A_1 u + bA_2 z, A_1^{-1}A_2 z) = (A_2 z, u) + b(A_2 z, A_1^{-1}A_2 z).$$

Здесь второе слагаемое неотрицательно. Далее докажем неотрицательность первого слагаемого, которая сводится к неравенству

$$\kappa_a(4|\theta|^3 u, (A_2 + \kappa_a I)^{-1} u) \leqslant (4|\theta|^3 u, u).$$

Определим скалярное произведение $[u, v] = (4|\theta|^3 u, v)$ и оператор $T\colon V \to V$ по формуле $((Tu, v)) = [u, v]$, где $((u, v)) = (A_2 u, v)$.

Поскольку оператор T самосопряженный и компактный, применим теорему Гильберта–Шмидта и разложим функции по базису из собственных функций оператора T, откуда получим утверждение леммы:

$$\kappa_a[(A_2 + \kappa_a I)^{-1} u, u] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_a}{\lambda_k + \kappa_a} c_k^2 w_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 w_k = [u, u].$$

$\square$

Лемма 3. *Если* $(i, j) \notin D[\theta]$, *то* $(j, i) \in D[\theta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности считаем, что

$$(f_i, A_1^{-1} f_i) = (f_j, A_1^{-1} f_j) = 1, \quad (f_i, A_1^{-1} f_j) = c \in [0, 1).$$

Требуется доказать, что если $(f_i, Q[\theta]f_i) \leqslant c(f_i, Q[\theta]f_j)$, то $(f_j, Q[\theta]f_j) > c(f_j, Q[\theta]f_i)$.

В силу леммы 2

$$\begin{gathered} 0 \leqslant (f_i - cf_j, Q[\theta](f_i - cf_j)) = \\ = \big[(f_i, Q[\theta]f_i) - c(f_i, Q[\theta]f_j)\big] + \big[c^2(f_j, Q[\theta]f_j) - c(f_j, Q[\theta]f_i)\big] < \\ < \big[(f_i, Q[\theta]f_i) - c(f_i, Q[\theta]f_j)\big] + \big[(f_j, Q[\theta]f_j) - c(f_j, Q[\theta]f_i)\big], \end{gathered}$$

и из неположительности первого слагаемого следует положительность второго. $\square$

Замечание 1. Уменьшение радиационной энергии $bG_j(\mathbf{q})$ в j-м источнике при увеличении общей энергии $S_j(\mathbf{q})$ означает преувеличение тепловой энергии $F_j(\mathbf{q})$ по сравнению с предполагаемым из линейной модели теплопроводности.

3. Алгоритм решения обратной задачи

Приведем покоординатную версию алгоритма решения обратной задачи [3].
Инициализация: $\{q_j\}$ таковы, что $F_j(\mathbf{q})\leqslant r_j$ для всех $j=1..m$
На каждой итерации:
для $j=1..m$:
$s_j \leftarrow s_j+(r_j-F_j(\mathbf{q}))$
Осуществить преобразование координат $\{s_j\}\to\{q_i\}$, решив систему линейных алгебраических уравнений $s_j=\sum\limits_{i=1}^{m} q_i(f_j,A_1^{-1}f_i)+(f_j,A_1^{-1}h_1)$
Условие окончания итераций: $r_j-F_j(\mathbf{q})<\varepsilon$ для всех $j=1..m$

Ограничимся рассмотрением случая двух источников: $m=2$ — и предположим выполнение условия директивности в обе стороны: $(1,2),(2,1)\in D[\theta(\mathbf{q})]$ для всех $\mathbf{q}$. Отметим, что при выполнении условия (iii) функции $F_j(\mathbf{q})$ покоординатно монотонны.

В дополнение к условию директивности потребуем выполнения *условия монотонности*, также зависящего от поля $\theta=\theta(\mathbf{q})$, при $i\neq j$:

$$(f_i,P[\theta]f_i) > (f_i,P[\theta]f_j)\frac{(f_i,A_1^{-1}f_j)}{(f_j,A_1^{-1}f_j)}, \tag{7}$$

которое будет гарантировать единственность точки пересечения линий уровня функций S_j и F_i.

На рис. 1 представлен результат вычислительного эксперимента на таких же данных, как и в [9], — показаны линии уровня функций F_1 и F_2 в координатах s_1,s_2, где $s_j=S_j(\mathbf{q})$. Можно увидеть, что линии уровня выражаются монотонными функциями. В данном случае возможно применение алгоритма глобального поиска, осуществляющего покоординатный линейный поиск. Что касается нашего покоординатного алгоритма, то при соблюдении свойства директивности знак разности $r_j-F_j(\mathbf{q})$ сохраняется в процессе выполнения алгоритма. Следовательно, алгоритм порождает монотонные и ограниченные последовательности приближений $s_1^{(k)},s_2^{(k)}$.

4. Единственность решения обратной задачи

Рассмотрим случай $m=2$ и предположим, что
(iv) $\beta/a=\gamma/\alpha$.
В этом случае $A_1=aA$, $A_2=\alpha A$, где оператор $A\colon V\to V'$ определятся формулой

$$(Au,v)=(\nabla u,\nabla v)+\int\limits_{\Gamma}\frac{\beta}{a}uv\,d\Gamma.$$

Докажем, что в области, где выполняется физичное условие $\theta>0$, выполняется условие монотонности (7). При выполнении этого условия можно утверждать монотонность линий уровня функций F_j в координатах s_i. Отсюда вытекает, что для любых двух решений $\mathbf{q}',\mathbf{q}''$ обратной задачи выполняется $S_j(\mathbf{q}')\leqslant S_j(\mathbf{q}'')$ или

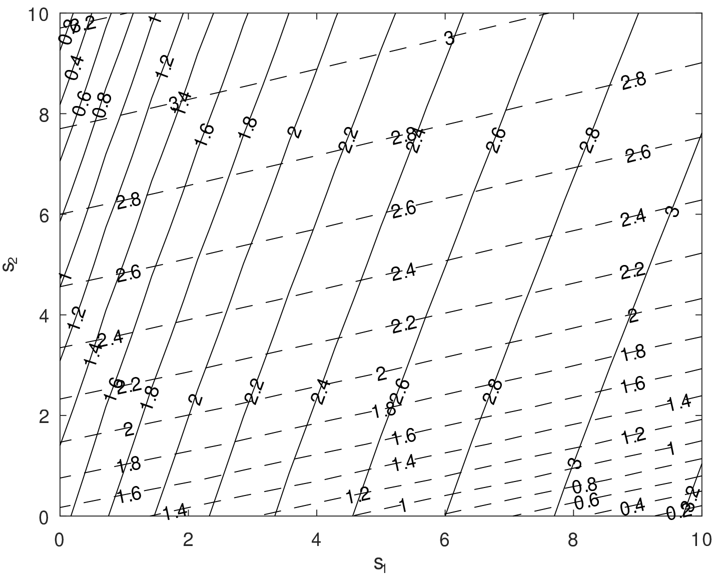

Рис. 1. Линии уровня функций F_j (сплошная линия — $j = 1$, штриховая линия — $j = 2$).

$S_j(\mathbf{q}') \geqslant S_j(\mathbf{q}'')$. В этом случае наш алгоритм должен сойтись к решению с минимальными S_j.

Зафиксируем индексы $i \neq j$ и найдем минимум функции

$$R(\mathbf{q}) = (f_i, P[\theta]f_i)(f_j, A^{-1}f_j) - (f_i, P[\theta]f_j)(f_i, A^{-1}f_j).$$

Без ограничения общности можно считать, что $(f_j, A^{-1}f_j) = 1$, $(f_1, A^{-1}f_2) = c$, где $c \in [0,1]$. Тогда $R(\mathbf{q}) = (f_i, P[\theta]f_i) - c(f_i, P[\theta]f_j)$. В силу существования равенства $(f_i, P[\theta]f_j) + b(f_i, Q[\theta]f_j) = \dfrac{1}{a}(f_j, A^{-1}f_i)$ и положительности обоих слагаемых в этом равенстве, первое слагаемое ограниченно, отсюда следует, что функция R ограничена снизу.

В точке минимума выполняются равенства

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial q_i^2} - c\frac{\partial^2 F_i}{\partial q_i \partial q_j} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial q_i \partial q_j} - c\frac{\partial^2 F_i}{\partial q_j^2} = 0.$$

Домножим второе равенство на c и вычтем из первого. Придем к соотношению

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial q_i^2} - 2c\frac{\partial^2 F_i}{\partial q_i \partial q_j} + c^2\frac{\partial^2 F_i}{\partial q_j^2} = 0.$$

Справедливо равенство

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{q})}{\partial q_i \partial q_k} = -12b\alpha\kappa_a(f_j, P[\theta]A(\alpha A + \kappa_a I)^{-1}(|\theta|\theta u_i u_k)),$$

где $\theta = \theta(\mathbf{q})$, $u_i = P[\theta] f_i$. Следовательно,

$$(f_i, P[\theta] A(\alpha A + \kappa_a I)^{-1}(|\theta|\theta(u_i - cu_j)^2)) = 0.$$

Заметим, что оператор $T[\theta] = P[\theta] A(\alpha A + \kappa_a I)^{-1}$ действует следующим образом: функция $\mathrm{g} = T[\theta] h$ является решением уравнения

$$a\alpha A\mathrm{g} + a\kappa_a \mathrm{g} + 4b\alpha\kappa_a|\theta|^3\mathrm{g} = h,$$

поэтому из равенства $(f_i, T[\theta](|\theta|\theta(u_i - cu_j)^2)) = 0$ следует, что $u_i - cu_j = 0$ в области, где $f_i > 0$. Значит, минимум функции R равен 0.

Список литературы

[1] Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., “Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange”, *J. Math. Anal. Appl.*, **460**:2, (2018), 737–744.

[2] Чеботарев А. Ю., “Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **61**:2, (2021), 303–311.

[3] Гренкин Г. В., “Единственность решения обратной задачи для модели сложного теплообмена”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **21**:1, (2024), 98–104.

[4] Chebotarev A. Yu., Pinnau R., “An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:1, (2019), 314–327.

[5] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., “An inverse problem for equations of cerebral oxygen transport”, *Appl. Math. Comput.*, **402**, (2021), 126154.

[6] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., “Inverse problem for a linearized model of oxygen transport in brain”, 2020 Days on Diffraction (DD), 2020, 44–49.

[7] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Turova V., Sidorenko I., “Non-stationary model of cerebral oxygen transport with unknown sources”, *Mathematics*, **9**:8, (2021), 910.

[8] Гренкин Г. В., “Управление нагревом области в рамках модели сложного теплообмена”, *Информатика и системы управления*, 2024, № 1 (79), 121–125.

[9] Гренкин Г. В., “Численное решение обратной задачи восстановления тепловых источников”, *Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета*, **16**:2, (2024), 161–170.

[10] Urinov A. K., Azizov M. S., “Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part”, *Lobachevskii J. Math.*, **42**, (2021), 632–640.

[11] Baranchuk V. A., Pyatkov S. G., “On some inverse problems of recovering sources in stationary convection-diffusion models”, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:3, (2023), 1111.

[12] Kovtanyuk A., Chebotarev A., Astrakhantseva A., “Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation”, *J Inverse Ill Posed Probl.*, **29**:3, (2021), 467–476.

[13] Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., Grenkin G. V., Botkin N. D., “Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model”, *Appl. Math. Comput.*, **289**, (2016), 371–380.

Поступила в редакцию
6 апреля 2024 г.

Grenkin G. V.[1] Identification of heat sources in a complex heat transfer model. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 2. P. 170–177.

[1] Vladivostok State University, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

The problem of recovering the intensities of heat sources with given volume densities and known values of average temperature is considered within the complex heat transfer model. An algorithm for the numerical solution of this problem is proposed. The conditions for the uniqueness of the solution are obtained.

Key words: *radiative heat transfer, inverse problem, integral overdetermination.*