

УДК 517.95 + 519.63
MSC2020 35Q93 + 78A46 + 65N21

© А. В. Лобанов¹

Численная оптимизация в задачах дизайна многослойных оболочек, состоящих из гиперболических метаматериалов

Статья посвящена численному решению оптимизационных задач для трехмерной модели электростатики, возникающих при проектировании многослойных экранирующих или маскировочных устройств. Рассмотрены различные варианты дизайна оболочек. На основе анализа проведенных вычислительных экспериментов устанавливаются важные свойства оптимальных решений и показывается, что полученным оптимальным решениям отвечают экранирующие или маскировочные экранирующие устройства, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств.

Ключевые слова: *обратные задачи, оптимизационный метод, электростатическая маскировка, гиперболические метаматериалы, метод роя частиц.*

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202420>

Введение

На рубеже XX и XXI вв. появилось новое научное направление, связанное с математическим моделированием и созданием искусственных структурированных композитов или композитных сред, обладающих необычными свойствами, которые редко или никогда не наблюдаются в природе. Впервые о материалах, обладающих необычными свойствами, а именно отрицательным показателем преломления, было сказано в работе советского ученого В. Г. Веселаго [1]. Однако работу В. Г. Веселаго приняли как гипотетическую, так как у всех известных материалов того времени показатель преломления был положителен и, не было найдено ни одного материала с подходящими электромагнитными свойствами. Позднее благодаря научно-техническому прогрессу в таких областях как математика, физика, оптика и материаловедение, появились работы по созданию композитных сред, некоторые из которых могут демонстрировать отрицательное преломление [2, 3] и рассеивать электромагнитные волны совершенно не так, как известные материалы. Такие композитные среды в научной литературе получили название метаматериалы [4].

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: lobanov@iam.dvo.ru

Интерес научной общественности к метаматериалам демонстрирует устойчивый рост, о чем свидетельствует большое число публикаций по указанной тематике. Этот интерес усиливается, с одной стороны, вследствие новизны, важности и сложности рассматриваемых математических и прикладных задач, а с другой стороны, — из-за возможности приложения полученных результатов в ряде важных прикладных областей. В качестве примера можно отметить, что большую известность получили эксперименты с оптическими иллюзиями [5], разработка СВЧ-устройств с расширенными или совершенно новыми функциональными возможностями [6], применение в технике антенн и излучателей [7], задачи маскировки материальных тел от акустических и электромагнитных волн, различного рода физических полей, в том числе тепловых, магнитных, электрических и других [8,9]. Среди большого количества работ в области маскировки материальных тел стоит отметить статьи [10,11], в которых для решения задач электрической маскировки используются радиально-анизотропные материалы. Отметим также работы [12–18], в которых в качестве маскировочных устройств используются слоистые цилиндрические или сферические оболочки, где отдельные слои заполнены либо метаматериалами, либо природными средами, параметры которых определяются с помощью оптимизационного метода.

За прошедший период с 2000 года по настоящее время было предложено и изготовлено большое количество метаматериалов, но особую роль заняли «гиперболические среды», или «гиперболические метаматериалы», — сильно анизотропные среды, в которых компоненты диагональных тензоров диэлектрической или магнитной проницаемости имеют противоположные знаки [19]. Эти материалы представляют большой практический интерес, связанный не только со сравнительной простотой изготовления, но и с необычными оптическими свойствами. К настоящему времени известны два основных метода получения гиперболических метаматериалов. В первом случае гиперболический отклик достигается за счет чередования слоев диэлектрика и металла, а во втором — за счет металлических стержней, помещенных в диэлектрическую матрицу [20–22].

В рамках нашего исследования будет рассмотрена задача дизайна, когда для экранирования или маскировки от электростатического поля используется многослойная оболочка, состоящая из гиперболических метаматериалов. Так же, как и в [12–16], для решения рассматриваемых задач дизайна экранирующих или маскирующих устройств мы разработаем численный алгоритм на основе метода оптимизации решения обратных задач с использованием метода численной оптимизации — «метода роя частиц» (см. [23]). Используя предложенный алгоритм, с помощью вычислительных экспериментов покажем, что высокие характеристики проектируемых экранирующих или маскирующих устройств могут быть достигнуты при использовании как однослойных анизотропных оболочек, состоящих из гиперболических метаматериалов с высоким коэффициентом анизотропии, так и многослойных изотропных оболочек.

1. Постановка прямой и обратной задач электростатики в трехмерном пространстве

Пусть в \mathbb{R}^3 задано постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_a = -\text{grad}U_a$, которое соответствует электрическому потенциалу U_a , описываемому в сферических координатах r, θ, φ по формуле $U_a(r, \theta) = -E_a(r/b)\cos\theta$, где $E_a = E_a^0 \cdot b = \text{const}$, $b = \text{const}$. Предположим, что в пространство, заполненное однородной средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 > 0$, помещен объект, заполненный средой, диэлектрическая проницаемость которой ε отличается от ε_0 . Тогда поле U_a изменяется и принимает вид $U = U_a + U_s$. Здесь U_s — возмущение поля U_a , вызванное помещением объекта в \mathbb{R}^3 , которое будем называть рассеянным электростатическим откликом объекта. Для нахождения отклика U_s необходимо сформулировать прямую задачу электростатики, соответствующую рассматриваемому нами сценарию помещения объекта в \mathbb{R}^3 . Будем считать, что роль размещаемого объекта играет пара (Ω, ε) . Здесь $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$ — сферический слой, описываемый в сферических координатах (r, θ, φ) , a и b — внутренний и внешний радиусы слоя (см. рисунок 1а), а ε — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей Ω . Диэлектрическая проницаемость ε в сферических координатах r, θ описывается диагональным тензором $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_t)$. Здесь ε_r (или ε_t) — радиальная (или тангенциальная) компонента тензора ε .

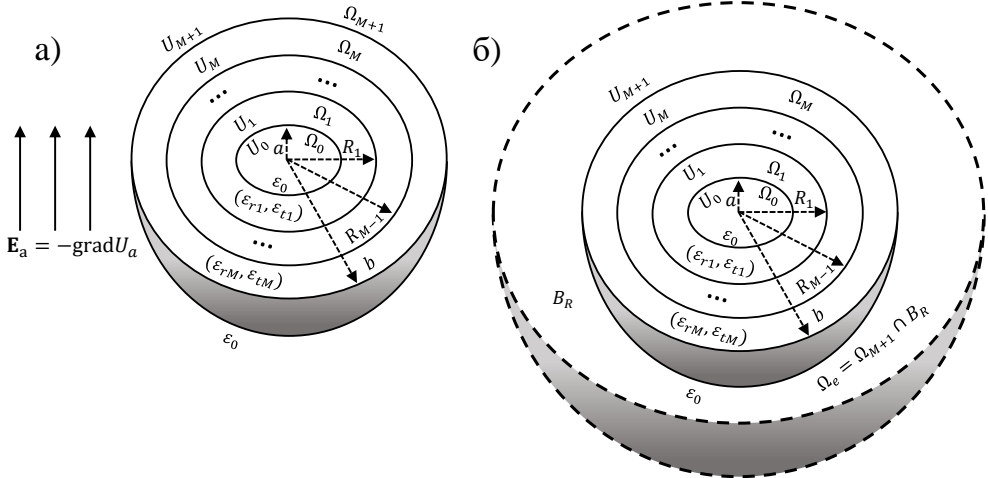


Рис. 1. а) Схематическое изображение внешнего электрического поля \mathbf{E}_a и многослойной сферической оболочки (Ω, ε) , погруженной в свободное пространство; б) Схематическое изображение шара B_R , содержащего многослойную сферическую оболочку (Ω, ε) .

Будем учитывать, что среда, занимающая область Ω , кусочно-однородна в том смысле, что область Ω можно разбить на конечное число M элементарных сфери-

ческих слоев

$$\Omega_m = \{R_{m-1} < r = |\mathbf{x}| < R_m\}, \quad m = \overline{1, M}, \quad R_0 = a, \quad R_M = b \quad (1)$$

равной ширины $d = (b-a)/M$. Каждый слой заполнен однородной анизотропной средой, диэлектрическая проницаемость которой описывается диагональным тензором в сферических координатах $\varepsilon_m = \text{diag}(\varepsilon_{rm}, \varepsilon_{tm}, \varepsilon_{tm})$, $m = \overline{1, M}$. Здесь ε_{rm} (или ε_{tm}) – радиальная или тангенциальная компонента тензора ε_m . Далее для описания кусочно-однородной среды, заполняющей Ω , будем использовать вектор $\mathbf{e} = (e_{r1}, e_{t1}; \dots; e_{rM}, e_{tM})$, составленный из компонент $\varepsilon_{rm}, \varepsilon_{tm}$ тензоров диэлектрической проницаемости ε_m отдельных слоев Ω_m , $m = \overline{1, M}$, а пару (Ω, \mathbf{e}) будем называть электрической оболочкой. Помимо множеств (1), определим множества (см. рисунок 1а)

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < a\} \quad \text{и} \quad \Omega_{M+1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| > b\}$$

и обозначим через U_m сужение $U|_{\Omega_m}$ полного поля $U = U_a + U_s$ на подобласть Ω_m , $m = \overline{0, M+1}$. С учетом этих обозначений прямая задача нахождения электростатического отклика U_s сводится к нахождению всех $M+2$ полей U_m в области Ω_m , $m = \overline{0, M+1}$ путем решения следующей задачи электростатики:

$$\Delta U_0 = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \Delta U_{M+1} = 0 \text{ в } \Omega_{M+1}, \quad \text{div}(\varepsilon_m \text{grad} U_m) = 0 \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \quad (2)$$

$$\text{grad} U_m \times \mathbf{n} - \text{grad} U_{m+1} \times \mathbf{n} = 0 \text{ при } r = R_m, \quad (3)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial U_0}{\partial r} = \varepsilon_{r1} \frac{\partial U_1}{\partial r} \text{ при } r = R_0, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{rm} \frac{\partial U_m}{\partial r} = \varepsilon_{r(m+1)} \frac{\partial U_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = \overline{1, M-1},$$

$$\varepsilon_{rM} \frac{\partial U_M}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{\partial U_{M+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_M, \quad (5)$$

$$U_0(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow 0, \quad U_{M+1}(\mathbf{x}) \rightarrow U_a(\mathbf{x}) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

рассматриваемой во всем пространстве \mathbb{R}^3 , а \mathbf{n} – единичный вектор внешней к Ω нормали.

Рассуждая, как в [12], можно показать, что решение $U = (U_0, U_1, \dots, U_{M+1})$ задачи (2)–(6) существует и единственно. Более того, используя метод разделения переменных, поля U_0, U_1, \dots, U_{M+1} можно явно выразить в виде

$$U_0(r, \theta) = \alpha_0 (r/b) \cos \theta \text{ в } \Omega_0, \quad (7)$$

$$U_m(r, \theta) = \left(\alpha_m (r/b)^{\nu_m} + \beta_m (b/r)^{\nu_m+1} \right) \cos \theta \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \quad (8)$$

$$U_{M+1}(r, \theta) = \left(-E_a (r/b) + \beta_{M+1} (r/b)^{-2} \right) \cos \theta \text{ в } \Omega_{M+1}. \quad (9)$$

Здесь $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_M, \beta_M, \beta_{M+1}$ – неизвестные коэффициенты, ν_m – коэффициент анизотропии среды в подобласти Ω_m , определяемой по формуле

$$\nu_m = (1/2) \times (\sqrt{1 + 8 \times (\varepsilon_{tm}/\varepsilon_{rm})} - 1). \quad (10)$$

Легко проверить, что все функции U_m , $m = \overline{0, M+1}$, определенные в (7)–(9), удовлетворяют всем уравнениям в (2) и условиям (6) для любых значений коэффициентов α_m , β_m . Осталось выбрать их так, чтобы выполнялись граничные условия (3)–(5).

Подставляя (7)–(9) в (3)–(5), приходим к системе $2M+2$ линейных алгебраических уравнений относительно $2M+2$ неизвестных коэффициентов α_0 , α_m , β_m , β_{M+1} , $m = \overline{1, M}$:

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \alpha_1 (R_M/R_0)^{1-\nu_1} - \beta_1 (R_M/R_0)^{\nu_1+2} &= 0, \\ \varepsilon_0 \alpha_0 - \alpha_1 \varepsilon_{r1} \nu_1 (R_M/R_0)^{1-\nu_1} + \beta_1 \varepsilon_{r1} (\nu_1 + 1) (R_M/R_0)^{\nu_1+2} &= 0, \\ \alpha_m + \beta_m (R_M/R_m)^{2\nu_m+1} - \alpha_{m+1} - \beta_{m+1} (R_M/R_m)^{2\nu_{m+1}+1} &= 0, \\ \alpha_m \varepsilon_{rm} \nu_m - \beta_m \varepsilon_{rm} (\nu_m + 1) (R_M/R_m)^{2\nu_m+1} - \alpha_{m+1} \varepsilon_{r(m+1)} \nu_{m+1} + \\ + \beta_{m+1} \varepsilon_{r(m+1)} (\nu_{m+1} + 1) (R_M/R_m)^{2\nu_{m+1}+1} &= 0, \quad m = \overline{1, M-1}, \\ \alpha_M + \beta_M - \beta_{M+1} = -E_a, \quad \alpha_M \varepsilon_{rM} \nu_M - \beta_M \varepsilon_{rM} (\nu_M + 1) + 2\varepsilon_0 \beta_{M+1} &= -\varepsilon_0 E_a. \end{aligned} \quad (11)$$

Решив систему (11) и подставив найденные значения α_0 , α_m , β_m , β_{M+1} в (7)–(9), найдем соответствующие поля U_0 в Ω_0 , U_m в Ω_m , $m = \overline{1, M}$ и U_{M+1} в Ω_{M+1} , образующие искомое решение задачи (2)–(6).

Теперь сформулируем обратные задачи для рассматриваемой электростатической модели, возникающие при дизайне устройств, служащих для электрической маскировки или экранирования. Для этого обозначим через $U[\mathbf{e}] = (U_0[\mathbf{e}], U_1[\mathbf{e}], \dots, U_{M+1}[\mathbf{e}])$, где $\mathbf{e} = (\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{t1}; \dots; \varepsilon_{rM}, \varepsilon_{tM})$, решение задачи (2)–(6), соответствующее тензорам диэлектрической проницаемости ε_m в Ω_m и постоянной диэлектрической проницаемости ε_0 в Ω_0 и Ω_{+1} . Пусть B_R – шар достаточно большого радиуса R , содержащий внутри себя Ω , $\Omega_e = \Omega_{M+1} \cap B_R$ (см. рисунок 16). Первая обратная задача, называемая задачей электрической маскировки, состоит в нахождении вектора диэлектрической проницаемости $\mathbf{e} = (\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{t1}; \dots; \varepsilon_{rM}, \varepsilon_{tM})$ на основе условий

$$\nabla U_0[\mathbf{e}] = 0, \quad \text{т.е. } U_0[\mathbf{e}] = \text{const в } \Omega_0, \quad U_{M+1}[\mathbf{e}] = U_a \text{ в } \Omega_e. \quad (12)$$

В случае, когда вектор \mathbf{e} находится из выполнения только первого условия в (12), соответствующую обратную задачу называют задачей экранирования. Сформулированные выше обратные задачи относятся к классу переопределенных математических задач, точные решения которых в общем случае не существуют, поэтому в следующем разделе заменим обратные задачи приближенными постановками с использованием метода оптимизации. В результате будут получены конечномерные экстремальные задачи, для численного решения которых применим метод оптимизации – метод роя частиц (МРЧ) (см. [23]).

2. Оптимизационный метод

В соответствии с методом оптимизации (см. [17]) заменим сформулированные выше обратные задачи электрической маскировки и экранирования надлежащими экстремальными задачами. С этой целью введем два функционала качества, отвечающие первому или второму условию в (12):

$$J_i(\mathbf{e}) = \frac{\|\nabla U_0[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_0)}}{\|\nabla U_a\|_{L^2(\Omega_0)}}, \quad J_e(\mathbf{e}) = \frac{\|U_{M+1}[\mathbf{e}] - U_a\|_{L^2(\Omega_e)}}{\|U_a\|_{L^2(\Omega_e)}}. \quad (13)$$

Здесь, в частности,

$$\begin{aligned} \|U_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} |U_a|^2 d\mathbf{x}, & \|\nabla U_a\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} |\nabla U_a|^2 d\mathbf{x}, \\ \|U_{M+1}[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} |U_{M+1}|^2 d\mathbf{x}, & \|\nabla U_0[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} |\nabla U_0[\mathbf{e}]|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Кроме того, для получения регуляризованных решений рассматриваемых задач определим в пространстве \mathbb{R}^{2M} ограниченное множество

$$K = \left\{ \mathbf{e} = (\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{t1}; \dots; \varepsilon_{rM}, \varepsilon_{tM}) \in \mathbb{R}^{2M} : \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_{tm}, \varepsilon_{rm} \leq \varepsilon_{\max} \right\}, \quad (14)$$

которое ниже будет играть роль набора управлений в общем анизотропном случае. Из определения (14) множества K следует, что каждый из его элементов $\mathbf{e} \equiv (\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{t1}; \dots; \varepsilon_{rM}, \varepsilon_{tM}) \in K$ соответствует маскировочному (или экранирующему) устройству в виде сферической материальной оболочки (Ω, \mathbf{e}) , заполненной допустимой кусочно-неоднородной анизотропной средой, описываемой вектором \mathbf{e} . В случае изотропного сценария, когда $\varepsilon_{rm} = \varepsilon_{tm} = \varepsilon_m$ для всех $m = \overline{1, M}$, множество (14) преобразуется и примет вид

$$K = \left\{ \mathbf{e} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M) \in \mathbb{R}^M : \varepsilon_{\min} < \varepsilon_m < \varepsilon_{\max}, m = \overline{1, M} \right\}. \quad (15)$$

Множество (15) будет играть роль множества управлений при решении задач дизайна изотропных устройств маскировки или экранирования.

Ниже рассмотрим две конечномерные экстремальные задачи:

$$J_i(\mathbf{e}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{e} \in K, \quad (16)$$

$$J(\mathbf{e}) \equiv 0.5[J_i(\mathbf{e}) + J_e(\mathbf{e})] \rightarrow \inf, \quad \mathbf{e} \in K, \quad (17)$$

которые являются оптимизационными аналогами сформулированных выше обратных задач. Обозначим через \mathbf{e}^{opt} оптимальное решение задачи (17). Если также выполняется условие $J(\mathbf{e}^{opt}) = 0$, то это означает, согласно (13) и (17), что \mathbf{e}^{opt} — точное решение задачи маскировки. Однако такая ситуация для задачи маскировки может возникнуть лишь в исключительных случаях [17]. Поэтому основной целью при решении задачи (17) будет поиск таких параметров искомой оболочки в

виде вектора $\mathbf{e}^{opt} \in K$, для которых $J(\mathbf{e}^{opt})$ принимает достаточно малое значение порядка 10^{-n} , $n = 6, 7, \dots$, что соответствует высокой эффективности маскировки. Аналогичная ситуация имеет место и для задачи экранирования (16): чем меньше значение $J_i(\mathbf{e}^{opt})$ для $\mathbf{e}^{opt} \in K$ задачи (16), тем выше эффективность экранирования при дизайне оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{opt})$.

3. Метод роя частиц

Для решения поставленных экстремальных задач (16) и (17) мы применим метод глобальной оптимизации — метод роя частиц (МРЧ) [23]. Напомним, что для минимизации функционалов $J_i(\mathbf{e})$ и $J_e(\mathbf{e})$ в (13) были разработаны градиентные методы, однако следует отметить, что градиентные методы имеют ряд недостатков: во-первых, медленную скорость сходимости; во-вторых, решения, полученные градиентными методами, могут описывать локальный минимум, который может сильно отличаться от искомого глобального минимума. От этих недостатков в некоторой степени свободны методы глобальной минимизации и, в частности, МРЧ благодаря точечной настройки основных параметров, входящих в указанный метод. Эффективность МРЧ была продемонстрирована в работах [15–18], посвященных разработке численных алгоритмов решения задач тепловой, магнитной и электрической маскировок. Подробное описание основных шагов этого алгоритма применительно к задачам маскировки и экранирования можно найти в [17]. В классическом МРЧ частицы перемещаются и коммуницируют в пространстве поиска решений. Для частицы с точкой положения \mathbf{e}_j и скоростью \mathbf{v}_j обновление ее скорости на новом временном шаге происходит в два этапа по двум формулам:

$$\mathbf{v}_j^{i+1} = \omega \mathbf{v}_j^i + c_p d_p (\mathbf{p}_j^i - \mathbf{e}_j^i) + c_g d_g (\mathbf{p}_g - \mathbf{e}_j^i), \quad \mathbf{e}_j^{i+1} = \mathbf{v}_j^{i+1} + \mathbf{e}_j^i,$$

где \mathbf{v}_j^{i+1} — j -я компонента скорости при i -ой итерации, \mathbf{e}_j^i — j -я координата частицы при i -ой итерации, \mathbf{p}_j^i — j -я координата решения, найденного частицей, \mathbf{p}_g — координата лучшего решения, найденного всеми частицами, c_p , c_g — весовые коэффициенты, подобранные под конкретную задачу, d_p , d_g — случайные числа в интервале $(0,1)$. Поиск оптимальных параметров МРЧ ω , c_p , c_g , d_p и d_g представляет собой отдельную актуальную область исследований [24].

Отметим, что в предыдущих работах автора [15, 18] параметры МРЧ ω , c_p , c_g , d_p , d_g принимали рекомендованные в статье [25] значения: $\omega = 0.729$, $c_p = 1.49445$, $c_g = 1.49445$, $d_p, d_g \sim N(0,1)$. Такой выбор значений параметров МРЧ был обоснован тем, что именно эти значения показали высокую эффективность при решении ряда задач поиска минимума.

Новизна настоящей работы заключается в том, что здесь будут использоваться другие значения параметров МРЧ, рекомендованные в статье [26]: $c_p = 1.5$, $c_g = 1.5$, $d_p, d_g \sim N(0,1)$, а параметр ω будет являться переменной величиной $\omega = 0.4 + 0.5 \cdot (i/L)$, где i — текущая итерация, L — общее количество итераций. Идея динамической ω заключается в том, что, когда лучшие положения частиц становятся ближе друг к другу, вес инерции увеличивается, чтобы предотвратить преждевременную сходи-

мость алгоритма. Об остальных достоинствах данного подхода можно прочитать в статье [26].

4. Результаты численного моделирования

Обсудим в этом разделе результаты численного решения рассматриваемых задач дизайна устройств электрической маскировки и экранирования с использованием разработанного оптимизационного алгоритма на основе МРЧ для следующих исходных данных: $a = R_a = 0.035$ м, $b = R_b = 0.05$ м, $R = 0.1$ м, $\varepsilon_0 = 1$, размер роя частиц $N = 25$, количество итераций $L = 50$. Внешнее приложенное электрическое поле \mathbf{E}_a имеет вид $\mathbf{E}_a = -\text{grad}U_a$, где $U_a(r, \theta) = -E_a(r/b)\cos\theta$ для $E_a = E_a^0 \cdot b = \text{const}$, $E_a^0 = 1$ В/м. Целью численных экспериментов было исследование зависимости свойств решений задач (16) и (17) от количества слоев M проектируемой оболочки, а также от выбора множества управления K в (14) или в (15) и, в частности, от значения $|\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min}|$, называемого контрастом среды с диэлектрическими проницаемостями ε_{\max} и ε_{\min} . В случае однородной анизотропной среды вместо контраста будем использовать понятие степени анизотропии ν , которое определяется по формуле (10). Для удобства разделим совокупность всех вычислительных экспериментов на две группы: первая группа соответствует задачам экранирования и маскировки для анизотропного сценария, а вторая группа соответствует изотропному сценарию.

Первый тест связан с решением экстремальной задачи (16) с использованием МРЧ в случае полностью анизотропной многослойной оболочки (Ω, \mathbf{e}) для следующей пары значений ε_{\min} и ε_{\max} (выполняющих роль гиперболического метаматериала):

$$\varepsilon_{\min} = -2 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\max} = -0.02. \quad (18)$$

Оптимизационный анализ для различных значений $M = \overline{1, 16}$ показал, что оптимальные значения $(\varepsilon_{rm}^{opt}, \varepsilon_{tm}^{opt})$, $m = \overline{1, M}$, диэлектрических проницаемостей каждого слоя, найденные с помощью МРЧ, совпадают с парой $(\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$, определенной в (18), для любого $M = \overline{1, 16}$. Следовательно, минимизатор \mathbf{e}^{opt} задачи (16), соответствующий паре (18), имеет вид $\mathbf{e}^{opt} = (\varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min}; \varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min}; \dots; \varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min})$, а величина $J_i(\mathbf{e}^{opt})$, имеющая смысл экранирующей эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{opt})$, равна 1.526×10^{-2} . Это означает, что экранирующая оболочка, спроектированная с помощью МРЧ, представляет собой единый анизотропный образец, для которого глобальные диэлектрические проницаемости ε_r^{opt} , ε_t^{opt} и минимальное значение $J_i(\mathbf{e}^{opt})$ задаются для любого числа слоев $M = \overline{1, 16}$ соотношениями

$$\varepsilon_r^{opt} = \varepsilon_{\max}, \quad \varepsilon_t^{opt} = \varepsilon_{\min} \quad \text{в } \Omega, \quad J_i(\mathbf{e}^{opt}) = 1.526 \times 10^{-2}. \quad (19)$$

Значение $J_i(\mathbf{e}^{opt})$ в (19) соответствует низкой эффективности экранирования спроектированной анизотропной оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{opt})$. Таким образом, решение задачи (16) в случае анизотропного сценария для пары параметров $\varepsilon_{\min} = -2$ и $\varepsilon_{\max} = -0.02$ не обеспечивает высоких экранирующих характеристик. Причиной низких характеристик экранирования является малость коэффициента анизотропии $\nu = 13.651$ оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{opt})$.

Для повышения экранирующих характеристик проектируемой оболочки необходимо увеличить коэффициент анизотропии ν . В этом можно убедиться, проанализировав результаты вычислительных экспериментов для пары

$$\varepsilon_{\min} = -32 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\max} = -0.02 \quad (20)$$

с коэффициентом анизотропии $\nu = 56.07$. Как показал оптимизационный анализ, оптимальные значения диэлектрических проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, снова совпадают в каждом слое с новой парой $(\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$ для любого $M = \overline{1, 16}$. Это соответствует заполнению всех слоев проектируемой оболочки одной и той же анизотропной средой, так что глобальные диэлектрические проницаемости ε_r^{opt} , ε_t^{opt} и минимальное значение $J_i(\mathbf{e}^{opt})$ для всех $M = \overline{1, 16}$ имеют вид

$$\varepsilon_r^{opt} = \varepsilon_{\max}, \quad \varepsilon_t^{opt} = \varepsilon_{\min} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad J_i(\mathbf{e}^{opt}) = 1.610 \times 10^{-7}. \quad (21)$$

Значение $J_i(\mathbf{e}^{opt})$ в (21) соответствует высоким экранирующим характеристикам спроектированной анизотропной оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{opt})$. Таким образом, решение задачи (16) для случая анизотропного сценария при использовании пары (20) обеспечивает высокие характеристики экранирования за счет высокого значения коэффициента анизотропии $\nu = 56.07$ оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{opt})$. Но это не обеспечивает простоты его технической реализации из-за анизотропии спроектированного экранирующего устройства.

Обсудим теперь результаты вычислительных экспериментов для тестов второй группы, соответствующих M -слоистой изотропной оболочке. Напомним, что в этом случае набор управлений определяется по формуле (15), а в качестве нижней и верхней границ $(\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$ множества K будем использовать следующую пару значений:

$$\varepsilon_{\min} = -0.002 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\max} = 30. \quad (22)$$

Здесь $\varepsilon_{\min} = -0.002$ описывает диэлектрическую проницаемость некоторого легированного полимера [27], а $\varepsilon_{\max} = 30$ описывает диэлектрическую проницаемость конденсаторной керамики.

Оптимизационный анализ задачи экранирования (16) показал, что оптимальное решение $\mathbf{e}^{opt} \equiv (\varepsilon_1^{opt}, \varepsilon_2^{opt}, \dots, \varepsilon_M^{opt})$, полученное с помощью МРЧ для случая изотропного сценария, обладает двумя важными свойствами. Первое свойство заключается в том, что для оптимального решения справедлив аналог так называемого свойства «релейности». Согласно этому свойству каждая компонента ε_m^{opt} , $m = \overline{1, M}$ оптимального решения \mathbf{e}^{opt} принимает одно из двух значений ε_{\min} или ε_{\max} , которые являются границами множества K , определенного в (15). При этом компоненты ε_m^{opt} оптимального решения \mathbf{e}^{opt} строго чередуются, т.е. выполняется соотношение

$$\varepsilon_1^{opt} = \varepsilon_3^{opt} = \dots = \varepsilon_{M-1}^{opt} = \varepsilon_{\min}, \quad \varepsilon_2^{opt} = \varepsilon_4^{opt} = \dots = \varepsilon_M^{opt} = \varepsilon_{\max}. \quad (23)$$

Второе важное свойство состоит в том, что при увеличении количества слоев M минимальное значение $J_i^{opt} = J_i(\mathbf{e}^{opt})$ снижается. Наглядное подтверждение этих свойств представлено в таблице 1.

Таблица 1. Результаты решения задачи экранирования для $\varepsilon_{\min} = -0.002$, $\varepsilon_{\max} = 30$; $R_a = 0.035$, $R_b = 0.050$, $R = 0.1$, Контраст = 15000.

M	ε_1^{opt}	ε_2^{opt}	ε_{M-1}^{opt}	ε_M^{opt}	$J_i(\mathbf{e}^{opt})$	$J_e(\mathbf{e}^{opt})$	$J(\mathbf{e}^{opt})$
2	-0.002	30			4.36×10^{-3}	2.05×10^{-1}	1.05×10^{-1}
6	-0.002	30	-0.002	30	2.84×10^{-6}	1.12×10^{-1}	5.61×10^{-2}
10	-0.002	30	-0.002	30	4.17×10^{-8}	5.59×10^{-2}	2.80×10^{-2}
14	-0.002	30	-0.002	30	4.39×10^{-9}	1.70×10^{-2}	8.50×10^{-3}
16	-0.002	30	-0.002	30	2.66×10^{-9}	1.23×10^{-3}	6.14×10^{-4}

В таблице 1 представлены результаты решения задачи (16) для пары (22) в виде оптимальных значений ε_1^{opt} , ε_2^{opt} , ε_{M-1}^{opt} , ε_M^{opt} диэлектрических проницаемостей первых и последних слоев оболочки, а также значений $J_i(\mathbf{e}^{opt})$, $J_e(\mathbf{e}^{opt})$, $J(\mathbf{e}^{opt})$ функционалов J_i , J_e , J для оптимального решения \mathbf{e}^{opt} задачи (16). Анализ таблицы 1 показывает, что значения ε_1^{opt} , ε_2^{opt} , ε_{M-1}^{opt} , ε_M^{opt} точно удовлетворяют соотношению (23). Кроме того, при увеличении количества слоев M от 2 до 16 значение $J_i(\mathbf{e}^{opt})$ уменьшается с 4.363×10^{-3} до 2.662×10^{-9} , что соответствует очень высокой экранирующей способности оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{opt})$. В то же время значения $J_e(\mathbf{e}^{opt})$ и $J(\mathbf{e}^{opt})$, приведенные в двух последних столбцах таблицы 1 относительно велики, поскольку при решении задачи экранирования минимизируется именно функционал $J_i(\mathbf{e})$.

Обратимся теперь к задаче маскировки (17). Анализ вычислительных экспериментов показал, что вышеупомянутые два свойства справедливы для оптимальных решений, но с двумя отличиями. Во-первых, эти свойства выполняются при выполнении дополнительного условия $|\varepsilon_{\min} \cdot \varepsilon_{\max}| \leq \varepsilon_0^2$. Второе отличие состоит в том, что соотношение (23) выполняется для всех компонент ε_m^{opt} оптимального решения \mathbf{e}^{opt} , за исключением последней компоненты ε_M^{opt} , которая может принимать значение, промежуточное между ε_{\min} и ε_{\max} .

Наглядным подтверждением этих свойств является таблица 2. Из таблицы 2 следует, что при увеличении M от 2 до 16 значение $J(\mathbf{e}^{opt})$ уменьшается с 7.893×10^{-3}

Таблица 2. Результаты решения задачи маскировки для $\varepsilon_{\min} = -0.002$, $\varepsilon_{\max} = 30$; $R_a = 0.035$, $R_b = 0.050$, $R = 0.1$, Контраст = 15000.

M	ε_1^{opt}	ε_2^{opt}	ε_{M-1}^{opt}	ε_M^{opt}	$J_i(\mathbf{e}^{opt})$	$J_e(\mathbf{e}^{opt})$	$J(\mathbf{e}^{opt})$
2	-0.002	3.414			1.58×10^{-2}	3.31×10^{-8}	7.89×10^{-3}
6	-0.002	30	-0.002	10.36	4.70×10^{-6}	1.32×10^{-9}	2.35×10^{-6}
10	-0.002	30	-0.002	17.72	5.20×10^{-8}	8.37×10^{-10}	2.64×10^{-8}
14	-0.002	30	-0.002	25.54	4.67×10^{-9}	4.86×10^{-9}	4.77×10^{-9}
16	-0.002	30	-0.002	29.69	2.67×10^{-9}	7.27×10^{-10}	1.70×10^{-9}

до 1.700×10^{-9} , что соответствует высокой маскировочной эффективности оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{e}^{opt})$. В этом случае оптимальные значения ε_1^{opt} , ε_2^{opt} , ε_{M-1}^{opt} , а также промежуточные значения ε_m^{opt} , $2 < m < M - 1$, подчиняются свойству в (23), а оптимальное значение ε_M^{opt} последней компоненты ε_M увеличивается с 3.413 до 29.69 при изменении M от 2 до 16.

Анализ показывает, что таблица 1, соответствующая задаче экранирования, отличается от таблицы 2, отвечающей задаче маскировки, только значением диэлектрической проницаемости последнего слоя ε_M^{opt} . Если для задачи экранирования $\varepsilon_M^{opt} = \varepsilon_{\max}$, в соответствии с правилом релейности, то для задачи маскировки последняя диэлектрическая проницаемость ε_M^{opt} принимает некоторое промежуточное значение из интервала $(\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$. Именно в этом и заключается особенность задачи маскировки и ее главное отличие от задачи экранирования. С одной стороны, из-за этого эффективность маскировки сильно зависит от диэлектрической проницаемости ε_M^{opt} последнего слоя. С другой стороны, это позволяет существенно упростить решение задачи маскировки. Действительно, поскольку по свойству релейности первые $M - 1$ слои состоят из чередующихся материалов с диэлектрическими проницаемостями ε_{\min} и ε_{\max} , то для нахождения искомого оптимального решения нет необходимости решать общую M -мерную задачу (17), а достаточно решить соответствующую однопараметрическую экстремальную задачу относительно последнего управления. Стоит отметить, что в случае, когда найденное значение ε_M^{opt} не соответствует какому-либо хорошо известному материалу, возникает чисто техническая трудность, связанная с созданием этого материала. Однако эта трудность не является принципиальной ввиду достигнутых к настоящему времени больших успехов в создании метаматериалов с заданными диэлектрическими свойствами [22, 27].

Чтобы подтвердить высокую точность и эффективность разработанного итерационного алгоритма, приведем ниже графики зависимости минимальных значений функционалов качества $J_i(\mathbf{e}^{opt})$ и $J(\mathbf{e}^{opt})$ из таблиц 1, 2 от номера итерации i для различных случаев $M = \{2, 4, 6, 12, 16\}$.

На рисунке 2 из графиков итерационного процесса алгоритма на основе метода роя частиц для задачи экранирования видно, что для поиска минимума требуется не более 20 итераций. Кроме того, увеличение числа слоев M в оболочке приводит к уменьшению искомого минимального значения $J_i(\mathbf{e}^{opt})$ функционала J_i , т.е. к увеличению экранирующей эффективности проектируемой оболочки.

На рисунке 3 из графиков итерационного процесса алгоритма на основе метода роя частиц для задачи полной маскировки видно, что для поиска минимума требуется большее количество итераций, чем для задачи экранирования, например, если для задачи экранирования при $M = 16$ требуется 18 итераций, то для задачи маскировки при $M = 16$ требуется 35 итераций. Кроме того, увеличение числа слоев M приводит к уменьшению искомого минимального значения $J(\mathbf{e}^{opt})$, т.е. к увеличению маскировочной эффективности проектируемой оболочки.

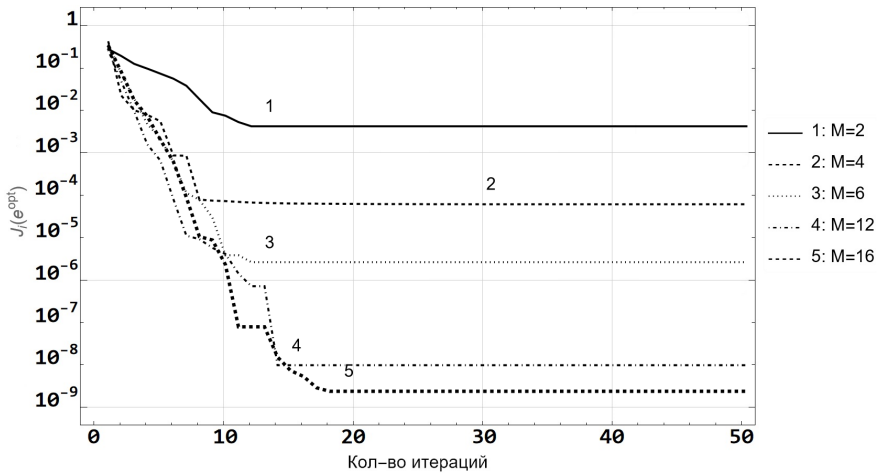


Рис. 2. Графики зависимости минимальных значений $J_i(e^{opt})$ от номера итерации i для различных случаев $M = \{2, 4, 6, 12, 16\}$ из таблицы 1.

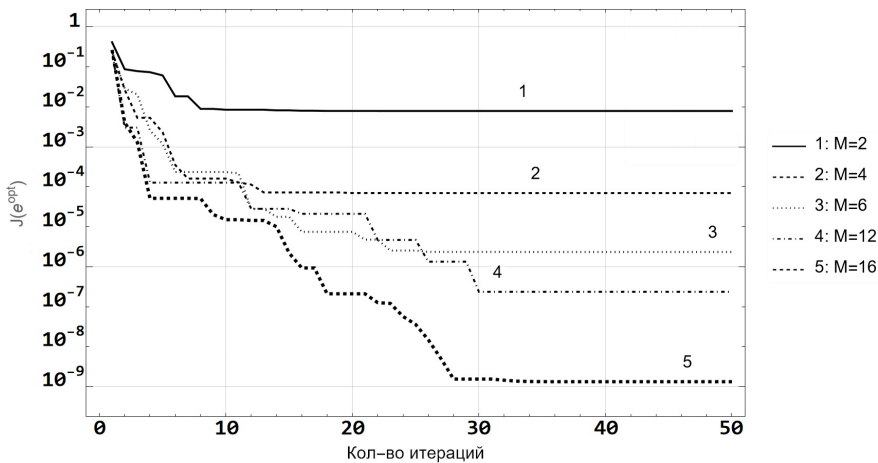


Рис. 3. Графики зависимости минимальных значений $J(e^{opt})$ от номера итерации i для различных случаев $M = \{2, 4, 6, 12, 16\}$ из таблицы 2.

Заключение

Рассмотрены обратные задачи для трехмерной модели электростатики, возникающие при разработке технологий дизайна устройств электрической маскировки и экранирования. В отличие от предыдущих работ автора [15, 18], в этой работе была рассмотрена ситуация, когда для маскировки используются так называемые гиперболические метаматериалы. Последний термин означает, что в этих сильно анизотропных средах компоненты диагональных тензоров диэлектрической или магнитной проницаемости имеют противоположные знаки. Для решения рассматриваемых обратных задач были развиты численные алгоритмы, являющиеся модификациями разработанных в [15, 18] численных алгоритмов, основанных на оптимизационном методе решения обратных задач и методе роя частиц в качестве метода численной оптимизации. Проведенные численные эксперименты показали, что высокие характеристики спроектированных маскирующих или экранирующих устройств могут быть достигнуты при использовании как однослойных анизотропных оболочек, состоящих из гиперболических метаматериалов с высоким коэффициентом анизотропии, так и многослойных изотропных оболочек, состоящих из нескольких изотропных сферических слоев Ω_m , $m = \overline{1, M}$, каждый из которых заполнен однородной средой с некоторой постоянной отрицательной диэлектрической проницаемостью ε_m . В случае изотропных оболочек построенные оптимальные решения $\mathbf{e}^{opt} \equiv (\varepsilon_1^{opt}, \varepsilon_2^{opt}, \dots, \varepsilon_M^{opt})$ обладают свойством релейности, согласно которому для любого числа слоев M каждая компонента ε_m^{opt} оптимального решения \mathbf{e}^{opt} (за исключением последней компоненты ε_M^{opt} в задаче маскировки) принимает одно из двух значений ε_{\min} и ε_{\max} , которые являются границами множества управления K в (15). Приведенные результаты достаточно близки к результатам, полученным в [15, 18], при использовании эллиптических метаматериалов. Таким образом можно сделать вывод о том, что применение гиперболических метаматериалов в качестве маскировочных сред при решении рассматриваемых в статье задач не дает каких-либо преимуществ по сравнению со случаем эллиптических метаматериалов в плане повышения маскировочной или экранирующей эффективности проектируемых оболочек. Более того, если учесть трудности, связанные с технической реализацией гиперболических метаматериалов, то предпочтение с точки зрения использования в качестве маскировочных средств следует отдавать эллиптическим метаматериалам.

Тем не менее можно предложить путь к повышению маскировочной эффективности используемых гиперболических метаматериалов. Он основан на использовании гиперболических метаматериалов с близкими к нулю диэлектрическими проницаемостями. Теоретическому анализу задач маскировки и экранирования в этом случае автор собирается посвятить отдельную работу.

Список литературы

- [1] Веселаго В. Г., “Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ ”, *Успехи физических наук*, **92**, (1967), 517–526.
- [2] Pendry J. B., “Negative refraction makes a perfect lens”, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, (2000), 3966–3969.

- [3] Shalaev V. M., “Optical negative-index metamaterials”, *Nature Photonics*, **1**, (2007), 41–48.
- [4] Liu Y., Zhang X., “Metamaterials: a new frontier of science and technology”, *Chem. Soc. Rev.*, **40**, (2011), 2494–2507.
- [5] Lai Y., Ng J., Chen H. Y., Han D. Z., “Optical illusion effects created by using metamaterials”, *Proceedings of the 2009 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*, Italy, 2009.
- [6] Вендик И. Б., Вендик О. Г., “Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот (Обзор)”, *Журнал технической физики*, **83**:1, (2013), 3–28.
- [7] Слюсар В., “Метаматериалы в антенной технике: история и основные принципы”, *Электроника: НТБ*, **7**, (2009), 70–79.
- [8] Pendry J. B., Wood B., “Metamaterials at zero frequency”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, **19**, (2007), 076208:1–9.
- [9] Gomory F., Solovyyov M., Souc J., Navau C., “Experimental realization of a magnetic cloak”, *Science*, **335**, (2012), 1466–1468.
- [10] Kettunen H., Wallen H., Sihvola A., “Cloaking and magnifying using radial anisotropy”, *Journal of Applied Physics*, **114**, (2013), 110–122.
- [11] Batool S., Nisar M., Frezza F., Mangini F., “Cloaking using the anisotropic multilayer sphere”, *Photonics*, **7**, (2020), 1–12.
- [12] Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э., “Теоретический анализ задачи магнитной маскировки на основе оптимизационного метода”, *Дифференциальные уравнения*, **54**:9, (2018), 1155–1166.
- [13] Алексеев Г. В., Терешко Д. А., “Моделирование и оптимизация в задачах проектирования сферических слоистых тепловых оболочек”, *Прикладная механика и техническая физика*, **60**:2, (2019), 158–168.
- [14] Алексеев Г. В., Терешко Д. А., “Оптимизационный метод в осесимметричных задачах электрической маскировки материальных тел”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **59**:2, (2019), 217–234.
- [15] Алексеев Г. В., Лобанов А. В., “Оптимизационный анализ задач электростатической маскировки”, *Сибирский журнал промышленной математики*, **23**:4, (2020), 5–17.
- [16] Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э., “Численный анализ трехмерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **61**:2, (2021), 224–238.
- [17] Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А., *Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2021.
- [18] Alekseev G. V., Lobanov A. V., “Optimization method for solving cloaking and shielding problems for a 3D model of electrostatics”, *Mathematics*, **11**:6, (2023), 1395.
- [19] Poddubny A., Iorsh I., Belov P., Kivshar Y., “Hyperbolic metamaterials”, *Nature Photon*, **7**, (2013), 948–957.
- [20] Shekhar P., Atkinson J., Zubin J., “Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications”, *Nano Convergence*, **1**:14, (2014), 1–17.
- [21] Ferrari L., Wu C., Lepage D., Zhang X., “Hyperbolic metamaterials and their applications”, *Progress in Quantum Electronics*, **40**, (2015), 1–40.
- [22] Давидович М. В., “Гиперболические метататериалы: получение, свойства, применения, перспективы”, *Успехи физических наук*, **189**:12, (2019), 1249–1284.
- [23] Poli R., Kennedy J., Blackwell T., “Particle swarm optimization: An overview”, *Swarm Intell.*, **1**, (2007), 33–57.
- [24] Wang D., Tan D., Liu L., “Particle swarm optimization algorithm: an overview”, *Soft*

- Computing*, **22**, (2018), 387–408.
- [25] Bai Z., Li W., Wang L., “Emittance optimization using particle swarm algorithm”, *Proc. IPAC2011*, **1**, (2011), 2271–2273.
- [26] Kessentini S., Barchiesi D., “Particle swarm optimization with adaptive inertia weight”, *International Journal of Machine Learning and Computing*, **5:5**, (2015), 368–373.
- [27] Gordon K., Kang J., Park C., Lillehei P., “A novel negative dielectric constant material based on phosphoric acid doped poly (benzimidazole)”, *Journal of Applied Polymer Science*, **125:4**, (2012), 2977–2985.

Поступила в редакцию
14 июля 2024 г.

Работа выполнена в рамках государственного
задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

*Lobanov A. V.*¹ Numerical optimization in problems of design multilayer cloaking shells consisting of hyperbolic metamaterials. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2024. V. 24. No 2. P. 220–234.

¹Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

The article is devoted to the numerical modeling of optimization problems for a 3D model of electrostatics that arise when designing multilayer shielding or cloaking devices. Various shell design options are considered. Based on the analysis of the computational experiments carried out, important properties of optimal solutions are established and it is shown that the resulting optimal solutions correspond to shielding or cloaking devices that have the highest efficiency in the class of devices under consideration.

Key words: *inverse problems, optimization method, electrostatic cloaking, hyperbolic metamaterials, particle swarm optimization method.*