Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24. № 2. С. 259–267

УДК 517.95
MSC2020 35J61, 35Q79

© А. А. Пищиков[1], А. Ю. Чеботарев[1]

Анализ полулинейной эллиптической краевой задачи и его приложения

Рассматривается стационарная модель типа реакции-диффузии в трёхмерной области. Найдены достаточные условия существования и единственности слабого решения поставленной краевой задачи. В качестве примеров рассмотрены диффузионные модели сложного теплообмена и переноса кислорода в биотканях.

Ключевые слова: *стационарные модели диффузии-реакции, слабое решение, однозначная разрешимость, уравнения сложного теплообмена.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202423

1. Введение. Постановка краевой задачи

В работе рассматривается анализ краевой задачи для системы эллиптических полулинейных уравнений, моделирующих стационарные процессы типа реакции-диффузии. Интерес к подобным задачам связан с их прикладной значимостью. На основе представленных новых априорных оценок слабого решения задачи доказана ее однозначная разрешимость. Данный результат является обобщением известных результатов для краевых задач, возникающих при моделировании сложного теплообмена в однородной среде (P_1-приближение для уравнения переноса излучения) [1–4], а также для гомогенизированных моделей переноса кислорода в тканях мозга [5, 6]. В качестве нового приложения рассмотрены уравнения сложного теплообмена в неоднородной среде, учитывающие внутреннюю диссипацию энергии, и уравнения переноса кислорода с внутренними источниками.

В ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-\div(a\nabla u) + f_1(u) = F(u,v) + h_1, \quad -\div(b\nabla v) + f_2(v) = -F(u,v) + h_2, \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$a\partial_n u + \alpha(u - u_b)\Big|_\Gamma = 0, \quad b\partial_n v + \beta(v - v_b)\Big|_\Gamma = 0. \quad (2)$$

[1] ДВФУ, Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, 690922, Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Электронная почта: `chebotarev.ayu@dvfu.ru` (А. Ю. Чеботарев).

Здесь a, b, α, β, u_b, v_b — заданные положительные функции, определенные на Ω и Γ соответственно; $f_{1,2}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — возрастающие функции с ограниченной производной, $F:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — локально-липшицева функция; $h_{1,2}$ — функции, моделирующие источники.

Статья организована следующим образом. В втором параграфе приводится формализация краевой задачи (1), (2), дается определение слабого решения и выводится уравнение с компактным оператором. Разрешимость краевой задачи доказана в параграфе 3 на основе принципа Лере–Шаудера. Теорема единственности решения представлена в параграфе 4. В пятом параграфе рассмотрены приложения для модели сложного теплообмена с внутренней диссипацией и для модели переноса кислорода с внутренними источниками.

2. Формализация задачи

Далее через L^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$ обозначаем пространство Лебега, а через H^s — пространство Соболева W_2^s, $V=H^1(\Omega)$. Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_V$ — нормы в H и V соответственно; (u,v) — скалярное произведение в H, если $u,v\in H$.

Пусть исходные данные задачи (1), (2) удовлетворяют условиям

(i) $a,b\in L^\infty(\Omega)$, $a\geqslant a_0$, $b\geqslant b_0$; α, β, u_b, $v_b\in L^\infty(\Gamma)$, $\alpha\geqslant\alpha_0$, $\beta\geqslant\beta_0$, $0\leqslant u_b\leqslant M_1$, $0\leqslant v_b\leqslant M_2$;

(ii) $f_{1,2}\in C^1(\mathbb{R})$, $f_{1,2}(-s)=-f_{1,2}(s)$, $|f_{1,2}(s)|\leqslant k_0, 0\leqslant f'_{1,2}(s)\leqslant k_1$;

(iii) $h_{1,2}\in L^\infty(\Omega)$, $0\leqslant h_1\leqslant f_1(M_1)$, $0\leqslant h_2\leqslant f_2(M_2)$.

Здесь a_0, b_0, α_0, β_0, k_0, $k_1=Const>0$.

Кроме того, функция $F:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такова, что для всех $u,v,u_{1,2},v_{1,2}\in V$

$$F(u,v)\in L^{6/5}(\Omega). \tag{C1}$$

$$\begin{aligned}\big\|F(u_1,v)-F(u_2,v)\big\|_{L^{6/5}(\Omega)} &\leqslant C_1\big(\,\|u_{1,2}\|_V\,,\|v\|_V\,\big)\,\|u_1-u_2\|_{L^{6-\varepsilon_1}(\Omega)}\,,\\ \big\|F(u,v_1)-F(u,v_2)\big\|_{L^{6/5}(\Omega)} &\leqslant C_2\big(\,\|v_{1,2}\|_V\,,\|u\|_V\,\big)\,\|v_1-v_2\|_{L^{6-\varepsilon_2}(\Omega)}\,.\end{aligned} \tag{C2}$$

Здесь $\varepsilon_{1,2}\in(0,\ 6/5)$.

Существует возрастающая функция $\mathrm{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что

$$\begin{aligned}&F(t_1,t_2)\big(t_1-\mathrm{g}(t_2)\big)\leqslant 0\quad\forall t_1,t_2,\ \mathrm{g}(0)=0,\ \mathrm{g}(M_2)=M_1;\\ &0<\mathrm{g}'(t)\leqslant C(M)\ \forall t,\ |t|\geqslant M.\end{aligned} \tag{C3}$$

$$\begin{aligned}&F(t_1,s_1)-F(t_2,s_2)=w_1(t_1,t_2)(t_1-t_2)-w_2(s_1,s_2)(s_1-s_2),\\ &\text{где } w_1(t_1,t_2)\leqslant 0,\ w_2(s_1,s_2)\leqslant 0.\end{aligned} \tag{C4}$$

В дальнейшем предполагаем выполнение указанных условий (i)–(iii), (C1)–(C4).

Сформулируем понятие слабого решения краевой задачи.

Определение. Пара $\{u,v\} \in V \times V$ называется слабым решением задачи (1), (2), если

$$(a\nabla u, \nabla\zeta) + \big(f_1(u), \zeta\big) + \int\limits_\Gamma \alpha(u-u_b)\zeta \; d\Gamma = \big(F(u,v)+h_1, \zeta\big) \quad \forall\zeta \in V, \tag{3}$$

$$(b\nabla v, \nabla\eta) + \big(f_2(v), \eta\big) + \int\limits_\Gamma \beta(v-v_b)\eta \; d\Gamma = \big(-F(u,v)+h_2, \eta\big) \quad \forall\eta \in V. \tag{4}$$

Уравнения (3), (4) выводятся стандартным образом, путём умножения (1) на тестовые функции $\zeta \in V$, $\eta \in V$ и интегрирования по частям в Ω с учетом краевых условий (2).

2.1. Сведение к уравнению с компактным оператором

В пространстве $W = V \times V$ определим скалярное произведение

$$((y,z)) = (a\nabla u, \nabla\zeta) + (b\nabla v, \nabla\eta) + \int\limits_\Gamma (\alpha u\zeta + \beta v\eta) \; d\Gamma.$$

Здесь $y = \{u,v\}$, $z = \{\zeta,\eta\}$, $\|y\|_W^2 = ((y,y))$.

Определим нелинейный оператор $\mathcal{F}\colon\ W \to W$, используя следующее равенство, справедливое для всех $y,z \in W$:

$$\big((\mathcal{F}(y),z)\big) = \int\limits_\Gamma \big(\alpha u_b\zeta + \beta v_b\eta\big)\, d\Gamma - \big(f_1(u),\zeta\big) - \big(f_2(v),\eta\big) +$$
$$+ \big(h_1,\zeta\big) + \big(h_2,\eta\big) + \int\limits_\Omega F(u,v)(\zeta-\eta)\, dx.$$

Вариационные равенства (3), (4) принимают вид $((y,z)) = \big((\mathcal{F}(y),z)\big)$ $\forall z \in W$. Таким образом, пара $y = \{u,v\} \in W$ будет слабым решением задачи (1), (2), если и только если $y \in W$ — неподвижная точка оператора $\mathcal{F}$,

$$y = \mathcal{F}(y). \tag{5}$$

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{F}$ является вполне непрерывным.*

Доказательство. Пусть $y_1 = \{u_1,v_1\}\,, y_2 = \{u_2,v_2\}\,, z = \{\zeta,\eta\}$. Оценим разность

$$\big((\mathcal{F}(y_1) - \mathcal{F}(y_2), z)\big) = \int\limits_\Omega \big(F(u_1,v_1) - F(u_2,v_2)\big)(\zeta-\eta)\; dx +$$
$$+ \big(f_1(u_2) - f_1(u_1), \zeta\big) + \big(f_2(v_2) - f_2(v_1), \eta\big) \leqslant$$
$$\leqslant \|\eta-\zeta\|_{L^6(\Omega)} \big\|F(u_1,v_1) - F(u_2,v_2)\big\|_{L^{6/5}(\Omega)} + k_1\big(\,\|\zeta\|\,\|u_1-u_2\| + \|\eta\|\,\|v_1-v_2\|\,\big).$$

Из условий (C2) и непрерывности вложения $V\subset L^p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant 6$ следует неравенство

$$\big(\big(\mathcal{F}(y_1)-\mathcal{F}(y_2),z\big)\big)\leqslant C\left(\|u_1-u_2\|_{L^{p_1}(\Omega)}+\|v_1-v_2\|_{L^{p_2}(\Omega)}\right)\|z\|_W\,.$$

Здесь $1\leqslant p_{1,2}<6$, $C>0$ зависит только от Ω, $\|u_{1,2}\|_V$, $\|v_{1,2}\|_V$. Подставим в последнее неравенство $z=\mathcal{F}(y_1)-\mathcal{F}(y_2)$. Тогда

$$\big\|\mathcal{F}(y_1)-\mathcal{F}(y_2)\big\|_W\leqslant C\left(\|u_1-u_2\|_{L^{p_1}(\Omega)}+\|v_1-v_2\|_{L^{p_2}(\Omega)}\right).$$

Из полученной оценки следует непрерывность оператора $\mathcal{F}$, а с учетом компактности вложения $V\subset L^{p_{1,2}}(\Omega)$ — его компактность. □

3. Теорема существования решения

Для доказательства существования неподвижной точки оператора $\mathcal{F}$ достаточно, в соответствии с принципом Лере–Шаудера, показать равномерную по λ ограниченность множества решений семейства операторных уравнений

$$y=\lambda\mathcal{F}(y),\ \ \lambda\in(0,1].$$

Данное равенство эквивалентно следующим соотношениям для $y=\{u,v\}$:

$$(a\nabla u,\nabla\zeta)+\lambda\big(f_1(u),\zeta\big)+\int\limits_\Gamma\alpha(u-\lambda u_b)\zeta\,d\Gamma=\lambda\big(F(u,v)+h_1,\zeta\big)\quad\forall\zeta\in V,\qquad(6)$$

$$(b\nabla v,\nabla\eta)+\lambda\big(f_2(v),\eta\big)+\int\limits_\Gamma\beta(v-\lambda v_b)\eta\,d\Gamma=\lambda\big(-F(u,v)+h_2,\eta\big)\quad\forall\eta\in V.\qquad(7)$$

Сначала получим априорные оценки для u, v в $L^\infty(\Omega)$. Положим $\zeta=\max\{0,u-M_1\}$ в (6) и $\eta=\max\{0,\mathrm{g}(v)-M_1\}$ в (7) и сложим равенства.

$$(a\nabla\zeta,\nabla\zeta)+\int\limits_{\Omega,\ \mathrm{g}(v)>M_1}b|\nabla\eta|^2\mathrm{g}'(v)\,dx+\int\limits_{\Gamma,\ u>M_1}\alpha(u-\lambda u_b)(u-M_1)\,d\Gamma+$$

$$+\int\limits_{\Gamma,\mathrm{g}(v)>M_1}\beta(v-\lambda v_b)\big(\mathrm{g}(v)-M_1\big)d\Gamma-\lambda\big(F(u,v),\max\{0,u-M_1\}-\max\{0,\mathrm{g}(v)-M_1\}\big)+$$

$$+\lambda\big(f_1(u)-f_1(M_1),\max\{0,u-M_1\}\big)+\lambda\big(f_2(v)-f_2(M_2),\max\{0,\mathrm{g}(v)-M_1\}\big)=$$
$$=\lambda\big(h_1-f_1(M_1),\max\{0,u-M_1\}\big)+\lambda\big(h_2-f_2(M_2),\max\{0,\mathrm{g}(v)-M_1\}\big)\leqslant 0.$$

Заметим, учитывая монотонность функций f_1, f_2, g, что все слагаемые в левой части полученного равенства неотрицательны. Поэтому $\eta=\zeta=0$, и тогда $u\leqslant M_1$, $v\leqslant M_2$.

Аналогично получаются оценки снизу. Достаточно положить в (6), (7) $\zeta=\zeta_{\min}=$ $=\min\{0,u+\varepsilon\}$, $\eta=\eta_{\min}=\min\{0,\mathrm{g}(v)+\varepsilon\}$ и получить $\eta_{\min}=\zeta_{\min}=0$; $u\geqslant-\varepsilon$, $\mathrm{g}(v)\geqslant-\varepsilon$. В силу произвольности ε получаем, что $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$.

Теперь получим равномерную по λ оценку y в пространстве W. Определим элемент $\tilde{y}\in W$ такой, что $\forall z=\{\zeta,\eta\}$

$$((\tilde{y}, z)) = \int\limits_{\Gamma} \big(\alpha u_b \zeta + \beta v_b \eta\big)\, d\Gamma + \big(h_1, \zeta\big) + \big(h_2, \eta\big).$$

Тогда из равенства $y=\lambda\mathcal{F}(y)$ получаем

$$\|y\|_W^2 = \lambda\,((\mathcal{F}(y), y)) = \lambda\,((\tilde{y}, y)) + \lambda(F(u,v), u-v) - \lambda\big(f_1(u), u\big) - \big(f_2(v), v\big).$$

Учтем неотрицательность величин $\big(f_1(u),u\big)$, $\big(f_2(v),v\big)$ и неравенства $0\leqslant u\leqslant M_1$, $0\leqslant v\leqslant M_2$. Тогда

$$\|y\|_W^2 \leqslant \frac{1}{2}\,\|y\|_W^2 + \frac{1}{2}\,\|\tilde{y}\|_W^2 + M_3|\Omega|.$$

Здесь $M_3=\max\{F(u,v)(u-v)\colon\ 0\leqslant u\leqslant M_1, 0\leqslant v\leqslant M_2\}$, $|\Omega|$ — объем Ω.

В результате имеем равномерную по λ ограниченность $\|y\|_W^2\leqslant\|\tilde{y}\|_W^2+2M_3|\Omega|$, из которой следует существование решения уравнения (5) и, значит, разрешимость задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(iii),* (C1)–(C3). *Тогда существует слабое решение задачи* (1), (2).

4. Однозначная разрешимость

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i)–(iii),* (C1)–(C4) *и при этом либо хотя бы одна из функций f_1, f_2 строго возрастает, либо $f_1 = f_2 = 0$ и a, $b = Const > 0$. Тогда существует ровно одно слабое решение задачи* (1), (2).

Доказательство. Разрешимость следует из теоремы 1. Покажем единственность решения. Предположим, что существует два решения: $\{u_1, v_1\}$ и $\{u_2, v_2\}$. Обозначим $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$. Из (3), (4) следуют равенства $\forall\ \zeta,\ \eta \in V$

$$(a\nabla u, \nabla\zeta) + \big(f_1(u_1) - f_1(u_2), \zeta\big) + \int\limits_{\Gamma} \alpha u\zeta\, d\Gamma = \int\limits_{\Omega} \big(F(u_1, v_1) - F(u_2, v_2)\big)\zeta\, dx, \qquad (8)$$

$$(b\nabla v, \nabla\eta) + \big(f_2(v_1) - f_2(v_2), \eta\big) + \int\limits_{\Gamma} \beta v\eta\, d\Gamma = -\int\limits_{\Omega} \big(F(u_1, v_1) - F(u_2, v_2)\big)\eta\, dx. \qquad (9)$$

Введём аппроксимацию функции sign с параметром $\varepsilon>0$:

$$\operatorname{sign}_\varepsilon t = \begin{cases} -1, & t \leqslant -\varepsilon, \\ t/\varepsilon, & -\varepsilon < t < \varepsilon, \\ 1, & t \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

В равенствах (8), (9) положим $\zeta = \operatorname{sign}_\varepsilon u$, $\eta = \operatorname{sign}_\varepsilon v$. Тогда

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega,\ |u|<\varepsilon} a\nabla u\cdot\nabla u\,dx + \big(f_1(u_1)-f_1(u_2),\operatorname{sign}_\varepsilon u\big) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma,\ |u|<\varepsilon}\alpha u^2\,d\Gamma + \int\limits_{\Gamma,\ |u|\geqslant\varepsilon}\alpha|u|\,d\Gamma =$$

$$= \int\limits_\Omega \big(F(u_1,v_1)-F(u_2,v_2)\big)\operatorname{sign}_\varepsilon u\,dx,$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega,\ |v|<\varepsilon} b\nabla v\cdot\nabla v\,dx + \big(f_2(v_1)-f_2(v_2),\operatorname{sign}_\varepsilon v\big) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma,\ |v|<\varepsilon}\beta v^2\,d\Gamma + \int\limits_{\Gamma,\ |v|\geqslant\varepsilon}\beta|v|\,d\Gamma =$$

$$= -\int\limits_\Omega \big(F(u_1,v_1)-F(u_2,v_2)\big)\operatorname{sign}_\varepsilon v\,dx.$$

Складывая полученные уравнения, исключая неотрицательные слагаемые с $1/\varepsilon$ и переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получим

$$\int\limits_\Gamma \big(\alpha|u|+\beta|v|\big)\,d\Gamma + \big(f_1(u_1)-f_1(u_2),\operatorname{sign} u\big) + \big(f_2(v_1)-f_2(v_2),\operatorname{sign} v\big) +$$

$$+\big(F(u_1,v_1)-F(u_2,v_2),\operatorname{sign} v-\operatorname{sign} u\big)\leqslant 0.$$

Отметим, что каждое слагаемое в неравенстве неотрицательно: второе и третье в силу свойств функций $f_{1,2}$, а четвёртое — в силу условия (C4). Поэтому $u|_\Gamma = v|_\Gamma = 0$. Далее пусть, например, функция f_1 строго возрастает. Из равенства нулю второго слагаемого в полученном неравенстве следует, что $u=0$, и из (8) выводим $F(u_1,v_1)-F(u_2,v_2)=0$. Тогда из (9) следует, что $v=0$. Случай строгого возрастания функции f_2 рассматривается аналогично.

Пусть теперь $f_1=f_2=0$ и a, $b=Const>0$. В (8), (9) положим $\zeta=\eta=au+bv$ и сложим полученные равенства. Тогда $\big(\nabla(au+bv),\nabla(au+bv)\big)=0$, и поэтому $v=-au/b$. Из условия (C4) получаем

$$\big(F(u_1,v_1)-F(u_2,v_2)\big)u = w_1(u_1,u_2)u^2 + aw_2(v_1,v_2)u^2/b\leqslant 0.$$

Поэтому, полагая $\zeta=u$ в (8), получим $u=0$, а тогда $v=0$. $\square$

5. Приложения

5.1. Модель сложного теплообмена с внутренней диссипацией

Анализ краевых задач для стационарной диффузионной модели [1], описывающей радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в ограниченной трехмерной области, представлен в [2–4]. Рассмотрим обобщение этой модели, включающее внутреннюю диссипацию энергии, а также ненулевые внутренние источники. Соответствующая краевая задача в ограниченной липшицевой области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с границей Γ имеет вид

$$-\div(a\nabla\theta)+f(\theta)=F(\theta,\varphi)+h,\quad \div(b\nabla\varphi)=F(\theta,\varphi),\qquad x\in\Omega; \tag{10}$$

$$a\partial_n\theta+\alpha(\theta-\theta_b)\Big|_\Gamma=0,\quad b\partial_n\varphi+\beta(\varphi-\theta_b^4)\Big|_\Gamma=0. \tag{11}$$

Здесь θ — нормализованная температура и φ — нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям;

$$F(\theta,\varphi)=c\Big(\varphi-|\theta|^4\operatorname{sign}\theta\Big);\ \ f(\theta)=\mu_0\theta/(\theta_0+\theta),\ \text{если}\ \theta\geqslant 0,\ f(-\theta)=-f(\theta),$$

где $\mu_0=Const$ – максимальное значение скорости диссипации, θ_0 – фиксированное значение температуры. Положительные параметры a, b, c, α и β, описывающие свойства среды, определены в [3].

Пусть данные задачи (10), (11) удовлетворяют условиям

(j) $a,\ b\in L^\infty(\Omega),\ a\geqslant a_0,\ b\geqslant b_0;\ \alpha,\ \beta,\ \theta_b,\in L^\infty(\Gamma),\ \alpha\geqslant\alpha_0,\ \beta\geqslant\beta_0,\ 0\leqslant\theta_b\leqslant M$. Здесь $a_0,\ b_0,\ \alpha_0,\ \beta_0=Const>0$.

(jj) $h\in L^\infty(\Omega),\ 0\leqslant h\leqslant f(M)$.

Пара $\{\theta,\varphi\}\in V\times V$ называется слабым решением задачи (10), (11), если

$$(a\nabla\theta,\nabla\zeta)+\big(f(\theta),\zeta\big)+\int\limits_\Gamma\alpha(\theta-\theta_b)\zeta\,d\Gamma=c\big(\varphi-|\theta|^4\operatorname{sign}\theta,\zeta\big)+(h,\zeta)\quad\forall\zeta\in V,$$

$$(b\nabla\varphi,\nabla\eta)+\int\limits_\Gamma\beta(\varphi-\theta_b^4)\eta\,d\Gamma=c\big(|\theta|^4\operatorname{sign}\theta-\varphi,\eta\big)\quad\forall\eta\in V.$$

Нетрудно проверить, что для функции F в постановке задачи (10), (11) справедливы условия (C1)–(C4), причем для проверки (C3) достаточно положить $\mathrm{g}(\varphi)=|\varphi|^{\frac14}\operatorname{sign}\varphi$. Таким образом, из теоремы 2 и с учетом оценок, полученных при доказательстве теоремы 1, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (j)–(jj). Тогда слабое решение задачи* (10), (11) *существует, единственно и удовлетворяет оценкам*

$$0\leqslant\theta\leqslant M,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant M^4.$$

5.2. Модель переноса кислорода с внутренними источниками

В работе [5] предложена гомогенизированная модель переноса кислорода в тканях мозга. Анализ возникающей стационарной краевой задачи, не содержащей внутренних источников кислорода, представлен в [6]. Модель с внутренними источниками имеет вид

$$-\div(a\nabla\varphi)=F(\varphi,\theta),\quad -\div(b\nabla\theta)+\mu(\theta)=-F(\theta,\varphi)+h,\quad x\in\Omega; \tag{12}$$

$$a\partial_n\varphi+\alpha(\varphi-\varphi_b)\Big|_\Gamma=0,\quad b\partial_n\theta+\beta\big(\theta-z(\varphi_b)\big)\Big|_\Gamma=0. \tag{13}$$

Здесь φ — концентрация кислорода в крови, θ — концентрация кислорода в тканях, μ — скорость метаболизма (потребления) кислорода в тканях, связанная с функционированием мозга. Функция F определяется равенством $F(\varphi,\theta)=A\big(\theta-z(\varphi)\big)$, где z — функция обратная к нечетной, возрастающей функции f, определяемой на положительной полуоси формулой

$$f(s)=s+\frac{Bs^r}{s^r+C}.$$

Функция μ также является нечетной, возрастающей — такой, что $\mu(\theta) = \dfrac{\mu_0\theta}{\theta+\theta_0}$ для $\theta \geqslant 0$. Здесь A, B, C, μ_0, $\theta_0 = \mathrm{Const} > 0$, $r = \mathrm{Const} > 1$.

Пусть данные удовлетворяют условиям

(k) $a, b \in L^\infty(\Omega)$, $a \geqslant a_0$, $b \geqslant b_0$; α, β, $\varphi_b \in L^\infty(\Gamma)$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\beta \geqslant \beta_0$, $0 \leqslant \varphi_b \leqslant M$, a_0, b_0, α_0, $\beta_0 = Const > 0$.

(kk) $h \in L^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant h \leqslant \mu(M)$.

Пара $\{\varphi, \theta\} \in V \times V$ называется слабым решением задачи (12), (13), если

$$(a\nabla\varphi, \nabla\zeta) + \int\limits_\Gamma \alpha(\varphi - \varphi_b)\zeta\, d\Gamma = A\big(\theta - z(\varphi), \zeta\big) \quad \forall \zeta \in V,$$

$$(b\nabla\theta, \nabla\eta) + \big(\mu(\theta), \eta\big) + \int\limits_\Gamma \beta\big(\theta - z(\varphi_b)\big)\eta\, d\Gamma = -A\big(\theta - z(\varphi), \eta\big) + (h, \eta) \quad \forall \eta \in V.$$

Для функции F в постановке задачи (12), (13) справедливы условия (C1)–(C4), причем для проверки (C3) достаточно положить $\mathrm{g}(s) = f(s)$, $s \in \mathbb{R}$. На основании теоремы 2 получаем утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (k)–(kk). Тогда существует единственное слабое решение задачи* (12), (13).

Список литературы

[1] Modest M. F., *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, 2003.

[2] Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю., “Стационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:4, (2014), 191–199.

[3] Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю., “Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:5, (2016), 816–823.

[4] Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., “Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer”, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6, (2017), 2511-2519.

[5] Valabregue R., Aubert A., Burger J., Bittoun J., Costalat R., “Relation between cerebral blood flow and metabolism explained by a model of oxygen exchange”, *J. Cereb. Blood Flow Metab.*, **23**, (2003), 536–545.

[6] Kovtanyuk Andrey E., Chebotarev Alexander Yu., Botkin Nikolai D., Turova Varvara L., Sidorenko Irina N., Lampe Renee, “Continuum model of oxygen transport in brain”, *J. Math. Anal. Appl.*, **474**, (2019), 1352–1363.

Поступила в редакцию
14 марта 2024 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00087.

Pishchikov A. A.[1], *Chebotarev A. Yu.*[1] Analysis of semilinear elliptic boundary value problem and its applications. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2024. V. 24. No 2. P. 259–267.

[1] Far Eastern Federal University, Far Eastern Center for Research and Education in Mathematics, Vladivostok, Russia

ABSTRACT

A stationary model of the reaction-diffusion type in a three-dimensional domain is considered. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a weak solution to the posed boundary value problem are found. As an example, diffusion models of complex heat exchange and oxygen transfer in biological tissues are considered.

Key words: *stationary diffusion-reaction models, weak solution, unique solvability, radiative heat transfer equations.*