

УДК 517.957

MSC2020 80A22+35K55+46N20

© А. Г. Подгаев¹, А. А. Подгаев², Т. Д. Кулеш¹

Теоремы компактности для исследования двухфазных задач типа Стефана

В стандартных теоремах компактности для функций из пространств Соболева с целыми показателями для компактности множества в нормах W_p^k обычно требуется его равномерная ограниченность в пространстве $W_{p_1}^{k+1}$. В работе при $k = 1$ рассматривается случай, когда равномерных оценок вторых производных во всей области определения не имеется. Однако они имеются для некоторой последовательности подобластей. Каждая из них определяется двумя кривыми. При этом с ростом номера кривые приближаются друг к другу так, что зазор где отсутствует равномерная оценка второй производной стремится к нулю. Необходимость таких теорем возникает при исследовании многофазных задач Стефана, в которых наблюдается такая ситуация при построении приближенных решений. Эти результаты позволяют совершать предельные переходы по приближенным решениям в двухфазных задачах с неизвестной границей, описывающих процессы перехода вещества из одного состояния в другое.

Ключевые слова: задачи Стефана, нецилиндрическая область, теорема компактности.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202507>

Введение

Различные задачи, в которых описываются процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями среды с поглощением или выделением скрытой теплоты, вследствие чего появляются неизвестные заранее границы фазовых переходов, называемых свободными границами, называют задачами Стефана. В таких задачах по самой их природе за счет потери или выделения тепла при переходе вещества из одного состояния в другое на границе фазового перехода происходит разрыв у

¹Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

²Новосибирский государственный университет, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1.

Электронная почта: 000210@pnu.edu.ru (А. Г. Подгаев), Podgaev@yandex.ru (А. А. Подгаев), 2015302323@pnu.edu.ru (Т. Д. Кулеш).

плотности потока тепла. Последний математически характеризуется разностью пределов нормальных производных от температуры на искомой границе. Таким образом, вторые производные в окрестности смены фаз не могут быть суммируемыми функциями. При построении приближенных решений к решению задачи итерационным процессом в последний вовлечена и неизвестная граница. Для предельного перехода, как и во многих нелинейных задачах, требуется сходимость в L_p первых производных. Поэтому основная цель исследования — доказать теорему компактности, позволяющую при исследованиях разрешимости многофазных задач с неизвестной границей и с условием типа условия Стефана на границах фаз, совершить предельный переход в итерационном процессе. Например в [1] показано применение подобной теоремы для однофазной задачи Стефана в случае, когда область делится одной кривой (своей для каждого приближенного решения) так, что с одной стороны от этой кривой функции последовательности тождественно равны нулю. Отсутствие таких результатов являлось препятствием при обосновании разрешимости таких задач и приводило к необходимости построения различных методик для преодоления трудностей предельных переходов. Это во многих случаях требовало сильных ограничений, налагаемых на входные данные. Конечно, теорема имеет и самостоятельный интерес и сформулирована независимо от возможных её применений.

Обоснование использует некоторые методы исследования компактности абстрактных функций из шкалы банаховых пространств [2, 3], которые, в свою очередь, являются обобщением теорем компактности из Aubin J. [4], Simon J. [5], Дубинского Ю.А. [6] на случай функций со значениями в семействе пространств. При этом в теоремах из [4–6] случай шкалы пространств вообще не рассматривался, но требования гладкости по пространственной и временной переменным также были различны. Шкала «возникает» естественным образом для функций $f(t, x)$, определенных в нецилиндрических областях, поскольку, например, при разных t соответствующие f имеют разные области определения по x . В отличие от [4–6] в [2] и [3] установлена только счетная компактность. В [7] рассмотрены близкие к двухфазным задачи, но в заданных областях (случай, когда последовательности кривых не зависят от n и совпадают). Результаты могут использоваться и при изучении уравнений со сменой направления эволюции. Постановки и методы исследования однофазных и многофазных задач Стефана приведены в [8].

1. Формулировка результата

Без уменьшения общности представлен вариант двух фаз. Рассматриваются последовательности функции u_n двух действительных переменных (x, t) . Чтобы технические подробности не заслонили существа доказательства, представлен случай, когда ограничения на старшие производные сформулированы для самого семейства u_n , а не для, например, $f(u_n)$, где f — некоторая заданная функция. Показатель суммируемости старших производных взят равным двум, но и здесь возможно рассмотрение общего случая.

Пусть для области $Q \subset R^2$, $Q = \{(x, t) : a < x < b, 0 < t < T\}$ имеется две последовательности кривых, заданных двумя последовательностями функций $x = s_n^-(t)$, $x = s_n^+(t)$; $t \in [0, T]$, для которых для всех t выполнено $a \leq s_n^\pm(t) \leq b$, и эти кривые определяют в области Q две последовательности подобластей $Q_n^\pm = Q \cap \{(x, t) : \pm x < \pm s_n^\pm(t)\}$. Отметим, что если, например, $s_n^-(t)$ и $s_n^+(t)$ не совпадают, то Q_n^+ и Q_n^- могут как пересекаться, так и не пересекаться. Будем предполагать, что $s_n^\pm(t)$ непрерывны, за исключением, быть может, зависящего от n конечного числа точек $A_n \subset [0, T]$, в которых разрывы первого рода. При этом

$$\sup_{t \in [0, T] \setminus \bigcup_n A_n} |s_n^\pm(t) - s(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Наличие возможных точек разрыва мы не исключаем в связи с дальнейшими применениями результата к исследованию задач со свободными границами.

Итак, пусть имеется последовательность определенных в Q функций $w_n(x, t)$. При указанных условиях на $s_n^\pm(t)$ справедлива

Теорема 1. Пусть для последовательности $w_n(x, t)$ существует постоянная c такая, что для всех n выполнены неравенства

$$\|w_n\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(a, b))} \leq c; \quad \|w_{nt}\|_{L_2(Q)} \leq c,$$

функции w_n имеют как в Q_n^+ , так и в Q_n^- вторые обобщенные производные по x , причем

$$\int_0^T \int_a^{s_n^+(t)} |w_{nxx}|^2 dx d\tau + \int_0^T \int_{s_n^-(t)}^b |w_{nxx}|^2 dx d\tau \leq c.$$

Тогда для любого $1 \leq q < 2$ последовательность w_n относительно компактна в $L_q(0, T; W_q^1(a, b))$.

2. Стационарный случай

Пусть на время s_n^+ и s_n^- — числовые последовательности, s — константа, $a \leq s_n^\pm \leq b$ и $s_n^\pm \rightarrow s$ при $n \rightarrow \infty$, и пусть число $0 < \nu < 1$ фиксировано.

Рассмотрим для заданного c множество G_c определённых на $[a, b]$ функций $w_n(x)$:

$$G_c = \left\{ w_n \in C^\nu([a, b]) : \int_a^b (|w_n|^2 + |w_{nx}|^2) dx \leq c, \right. \\ \left. \int_a^{s_n^+} |w_{nxx}|^2 dx + \int_{s_n^-}^b |w_{nxx}|^2 dx \leq c, \text{ где } a \leq s_n^\pm \leq b \text{ и } s_n^\pm \rightarrow s \text{ при } n \rightarrow \infty \right\}.$$

Заметим, что на всем промежутке $[a, b]$ функции w_n могут не иметь вторых суммируемых обобщенных производных.

Лемма 1. Для любого $c < \infty$ множество G_c для всех $q_0 : 1 \leq q_0 < 2$ относительно компактно в $W_{q_0}^1(a, b)$.

Доказательство. Определим числа

$$I_N^\pm = \inf_{n \geq N} \{s_n^\pm, n = 1, 2, 3, \dots\}, \quad S_N^\pm = \sup_{n \geq N} \{s_n^\pm, n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Тогда для всех N и всех $n \geq N$ выполняются неравенства

$$I_{N+1}^\pm \geq I_N^\pm, \quad S_N^\pm \geq S_{N+1}^\pm, \quad I_N^\pm \leq s_n^\pm \leq S_N^\pm \quad \text{и} \quad I_N^\pm \rightarrow s, \quad S_N^\pm \rightarrow s \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Функции $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ из пространства $W_2^1(a, b)$ начиная с $n \geq N$ принадлежат $W_2^2(a, I_N^+)$ и, в силу последней оценки в определении G_c , равномерно ограничены в норме $W_2^2(a, I_N^+)$. Поэтому существует подпоследовательность, для которой $w_n \rightarrow w$ в $W_2^1(a, I_1^+)$. Отбросим у этой последовательности первый элемент, если он оказался элементом w_1 . Оставшаяся часть будет состоять из функций, определенных в области $x \in (a, b)$ и равномерно ограниченных в норме $W_2^2(a, I_2^+)$. Поэтому у нее существует подпоследовательность, сходящаяся по норме $W_2^1(a, I_2^+)$ к той же самой функции. И так далее. Диагональная последовательность состоит из функций пространства $W_2^1(a, b)$ и обладает таким свойством, что для всех N ее “хвост”, начиная с номера N , равномерно ограничен в $W_2^2(a, I_N^+)$. Обозначим её $\{w_n\}_{n \in A}$, где A — некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Сохраняя для этой последовательности прежнее обозначение w_n , далее считаем, что $n \in A$.

Для построенной последовательности $\{w_n\}_{n \in A}$ проведем аналогичный проделанному выше выбор диагональной подпоследовательности, связанный с последовательностью I_N^- . Новая диагональная подпоследовательность состоит из функций пространства $W_2^1(a, b)$ и обладает таким свойством, что для всех N ее “хвост”, начиная с номера N , равномерно ограничен в $W_2^2(I_N^-, b)$. Сохраним для неё обозначение $\{w_n\}_{n \in B}$.

Аналогичные рассуждения, но уже для последовательности $\{w_n\}_{n \in B}$ проведем для промежутков (a, S_N^+) и (S_N^-, b) . В результате выделим подпоследовательность $\{w_n\}_{n \in C}$, которая ограничена по норме пространства $W_2^1(a, b)$ и обладает таким свойством, что для всех N ее “хвост”, начиная с номера N , равномерно ограничен в $W_2^2(a, S_N^+)$ и в $W_2^2(S_N^-, b)$.

Докажем, что она сходится в $W_{q_0}^1(a, b)$ для любого $1 \leq q_0 < 2$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $N_1(\varepsilon)$ так, чтобы для всех $n, m \in C$, $n, m \geq N_1$ выполнялись неравенства

$$|I_{N_1}^\pm - s_n^\pm| < \varepsilon, \quad |S_{N_1}^\pm - s_n^\pm| < \varepsilon, \quad |I_{N_1}^\pm - s_m^\pm| < \varepsilon, \quad |S_{N_1}^\pm - s_m^\pm| < \varepsilon, \quad |s_n^\pm - s_m^\pm| < \varepsilon.$$

Обозначим $I_N = \min(I_N^+, I_N^-)$, $S_N = \max(S_N^+, S_N^-)$ и представим (a, b) в виде $(a, I_{N_1}] \cup (I_{N_1}, S_{N_1}] \cup (S_{N_1}, b)$. Тогда имеем для всех $n \geq N_1, m \geq N_1$:

$$\int_a^b |w_{nx} - w_{mx}|^{q_0} dx \leq \int_a^{I_{N_1}} + \int_{I_{N_1}}^{S_{N_1}} + \int_{S_{N_1}}^b.$$

Оценим второе слагаемое

$$\int_{I_{N_1}}^{S_{N_1}} |w_{nx} - w_{mx}|^{q_0} dx \leq \left\{ \int_{I_{N_1}}^{S_{N_1}} |w_{nx} - w_{mx}|^2 dx \right\}^{\frac{q_0}{2}} |S_{N_1} - I_{N_1}|^\chi \leq (2c)^{\frac{q_0}{2}} (3\varepsilon)^\chi, \quad \chi > 0$$

в силу выбора N_1 . Оценим первое

$$\int_a^{I_{N_1}} |w_{nx} - w_{mx}|^{q_0} dx \stackrel{n, m \geq N_1}{\leq} (b - a)^{\frac{2-q_0}{2}} \|w_{nx} - w_{mx}\|_{L_2(a, I_{N_1})}^{q_0}. \quad (1)$$

Аналогично оценивается третье слагаемое

$$\int_{S_{N_1}}^b |w_{nx} - w_{mx}|^{q_0} dx \stackrel{n, m \geq N_1}{\leq} (b - a)^{\frac{2-q_0}{2}} \|w_{nx} - w_{mx}\|_{L_2(S_{N_1}, b)}^{q_0}. \quad (2)$$

Так как хвост диагональной последовательности $\{w_n\}_{n \in C}$ сходится в нормах $W_2^1(a, I_{N_1})$ и $W_2^1(S_{N_1}, b)$, то по $\varepsilon > 0$ найдется $N_2(\varepsilon)$ такое, что при $n, m \geq N_2$, $n, m \in C$ выполняются неравенства $\|w^n - w^m\|_{W_2^1(a, I_{N_1})} < \varepsilon$, $\|w^n - w^m\|_{W_2^1(S_{N_1}, b)} < \varepsilon$. Увеличив, если надо, $N_2(\varepsilon)$, считаем, что $N_2(\varepsilon) \geq N_1(\varepsilon)$. Отсюда следует, что правые части в (1) и (2) для $n, m \geq N_2(\varepsilon)$, $n, m \in C$ оцениваются через $\tilde{c}\varepsilon^{q_0}$. Поэтому,

$$\int_a^b |w_{nx} - w_{mx}|^{q_0} dx \leq \tilde{c}(2\varepsilon^{q_0} + (3\varepsilon)^\chi), \quad \tilde{c} = \max(4c^{\frac{q_0}{2}}, (b - a)^{\frac{2-q_0}{2}})$$

для всех $n, m \geq N_2(\varepsilon)$, $n, m \in C$. Относительная компактность G_c установлена. $\square$

3. Нестационарный случай

Пусть заданы последовательности функций $\{s_n^\pm(t)\}_{n=1}^\infty, t \in [0, T]$, описанные в разделе 1. По функциям двух переменных $w_n(x, t)$, определенным в области Q и имеющим суммируемые обобщенные производные $w_{nxx}(x, t)$ на каждой из нецилиндрических областей Q_n^+ и Q_n^- , определим для фиксированного c множество

$$F_c = \left\{ w_n : \|w_n\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(a, b))} \leq c, \|w_{nt}\|_{L_2(Q)} \leq c, \right. \\ \left. \int_0^T \int_a^{s_n^+(t)} w_{nxx}^2 dx dt + \int_0^T \int_{s_n^-(t)}^b w_{nxx}^2 dx dt \leq c \right\}. \quad (3)$$

Определим измеримые множества

$$S_n = \left\{ t \in [0, T] : \|w_n(\cdot, t)\|_{W_2^1(a, b)} \leq c < \infty, \right. \\ \left. \|w_{nxx}(\cdot, t)\|_{L_2(a, s_n^+(t))} + \|w_{nxx}(\cdot, t)\|_{L_2(s_n^-(t), b)} < \infty \right\}. \quad (4)$$

Мера S_n равна мере $[0, T]$, так как для w_n выполняется первая оценка при определении F_c и, в силу наличия третьей оценки, функции $\|w_{nxx}(\cdot, t)\|_{L_2(a, s_n^+(t))}$, $\|w_{nxx}(\cdot, t)\|_{L_2(s_n^-(t), b)}$, как функции t , почти всюду на $[0, T]$ конечны. Пусть ещё S_0 — объединение по n всех точек разрыва (первого рода) функций $s_n^\pm(t)$. Очевидно, что для множества $S = \bigcup_n S_n \setminus S_0$ имеем $S \subseteq [0, T]$ и мера S равна мере $[0, T]$.

Справедливо следующее утверждение, аналогичное леммам из [2].

Лемма 2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара положительных чисел $(c(\varepsilon), N(\varepsilon))$ таких, что для всех $t \in S$ и для всех натуральных n и m больших $N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \|w_n(\cdot, t) - w_m(\cdot, t)\|_{W_{q_0}^1(a, b)}^{q_0} &\leq \varepsilon \left(1 + \int_a^{s_n^+(t)} w_{nxx}^2(x, t) dx + \int_{s_n^-(t)}^b w_{nxx}^2(x, t) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_a^{s_m^+(t)} w_{mxx}^2(x, t) dx + \int_{s_m^-(t)}^b w_{mxx}^2(x, t) dx \right) + c(\varepsilon) \|w_n(\cdot, t) - w_m(\cdot, t)\|_{L_2(a, b)}^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не выполнено. Тогда будет существовать $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой пары положительных чисел (k, N) найдутся $t_{k, N} \in S$ и натуральные $n_{k, N} > N$ и $m_{k, N} > N$, для которых будет выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|w_{n_{k, N}}(\cdot, t_{k, N}) - w_{m_{k, N}}(\cdot, t_{k, N})\|_{W_{q_0}^1(a, b)}^{q_0} &> \varepsilon_0 \left(1 + \int_a^{s_{n_{k, N}}^+(t_{k, N})} w_{n_{k, N}xx}^2(x, t_{k, N}) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{s_{n_{k, N}}^-(t_{k, N})}^b w_{n_{k, N}xx}^2(x, t_{k, N}) dx + \int_a^{s_{m_{k, N}}^+(t_{k, N})} w_{m_{k, N}xx}^2(x, t_{k, N}) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{s_{m_{k, N}}^-(t_{k, N})}^b w_{m_{k, N}xx}^2(x, t_{k, N}) dx \right) + k \|w_{n_{k, N}}(\cdot, t_{k, N}) - w_{m_{k, N}}(\cdot, t_{k, N})\|_{L_2(a, b)}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Возьмем в паре $N = k$, где k натуральное, устремим k к ∞ и определим $\tilde{n}_k = n_{k, k}$, $\tilde{m}_k = m_{k, k}$, $\tilde{t}_k = t_{k, k}$. Тогда $\tilde{n}_k > k$, $\tilde{m}_k > k$. И, далее, без ограничения общности, считаем, что $\tilde{t}_k$ фундаментальная. А выбирая еще одну подпоследовательность, считаем также, что и $s(\tilde{t}_k)$ фундаментальная. В этих условиях соответствующие $\tilde{n}_k$ и $\tilde{m}_k$ также будут стремиться к ∞ . Обозначим $\varphi_k(x) = w_{\tilde{n}_k}(x, \tilde{t}_k)$, $\psi_k(x) = w_{\tilde{m}_k}(x, \tilde{t}_k)$, $\tilde{s}_k^{1\pm} = s_{\tilde{n}_k}^\pm(\tilde{t}_k)$, $\tilde{s}_k^{2\pm} = s_{\tilde{m}_k}^\pm(\tilde{t}_k)$. В этих обозначениях, вспоминая определения F_c и S , и учитывая первое неравенство в (4) неравенство (5) с некоторой константой c_1 можно

переписать в виде

$$c_1 \geq \|\varphi_k - \psi_k\|_{W_{q_0}^1(a,b)}^{q_0} > \varepsilon_0 \left(1 + \int_a^{\tilde{s}_k^{1+}} \varphi_{kxx}^2 dx + \int_{\tilde{s}_k^{1-}}^b \varphi_{kxx}^2 dx + \right. \\ \left. + \int_a^{\tilde{s}_k^{2+}} \psi_{kxx}^2 dx + \int_{\tilde{s}_k^{2-}}^b \psi_{kxx}^2 dx \right) + k \|\varphi_k - \psi_k\|_{L_2(a,b)}^2. \quad (6)$$

Покажем, что последовательности $\tilde{s}_k^{1\pm}, \tilde{s}_k^{2\pm}$ фундаментальные. Имеем

$$|\tilde{s}_k^{1\pm} - \tilde{s}_{k+m}^{1\pm}| = |s_{\tilde{n}_k}^{\pm}(\tilde{t}_k) - s_{\tilde{n}_{k+m}}^{\pm}(\tilde{t}_{k+m})| \leq \\ \leq |s_{\tilde{n}_k}^{\pm}(\tilde{t}_k) - s(\tilde{t}_k)| + |s(\tilde{t}_k) - s(\tilde{t}_{k+m})| + |s(\tilde{t}_{k+m}) - s_{\tilde{n}_{k+m}}^{\pm}(\tilde{t}_{k+m})| \leq \\ \leq \sup_{t \in [0, T] \setminus S_0} |s_{\tilde{n}_k}^{\pm}(t) - s(t)| + |s(\tilde{t}_k) - s(\tilde{t}_{k+m})| + \sup_{t \in [0, T] \setminus S_0} |s(t) - s_{\tilde{n}_{k+m}}^{\pm}(t)|,$$

где $S_0 = \bigcup_n A_n$. Аналогично устанавливается такое же неравенство для $\tilde{s}_k^{2\pm}$.

В силу наложенных условий на $s_n^{\pm}(t)$ первое и третье слагаемые справа стремятся к нулю, так как $\tilde{n}_k \rightarrow \infty$, а второе мало из-за фундаментальности последовательности $s(\tilde{t}_k)$.

Докажем, что $\tilde{s}_k^{1+}$ и $\tilde{s}_k^{1-}$ имеют один и тот же предел. Действительно,

$$|\tilde{s}_k^{1+} - \tilde{s}_k^{1-}| = |s_{\tilde{n}_k}^{+}(\tilde{t}_k) - s_{\tilde{n}_k}^{-}(\tilde{t}_k)| \leq |s_{\tilde{n}_k}^{+}(\tilde{t}_k) - s(\tilde{t}_k)| + |s(\tilde{t}_k) - s_{\tilde{n}_k}^{-}(\tilde{t}_k)| \leq \\ \leq \sup_{t \in [0, T] \setminus S_0} |s_{\tilde{n}_k}^{+}(t) - s(t)| + \sup_{t \in [0, T] \setminus S_0} |s(t) - s_{\tilde{n}_k}^{-}(t)| \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$. Аналогично устанавливаем, что $\tilde{s}_k^{2+}$ и $\tilde{s}_k^{2-}$ имеют один и тот же предел.

Обозначим $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{s}_k^{1\pm} = \tilde{s}_1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{s}_k^{2\pm} = \tilde{s}_2$ и вернемся к неравенству (6). Из первого условия для S_n в (4) и из (6) вытекает, что функции одной переменной φ_k и ψ_k принадлежат G_{c_2} с $c_2 = \max(c_1/\varepsilon_0, c)$. Тогда, в силу действия Леммы 1, примененной как к φ_k , так и к ψ_k , выбирая, если необходимо, подпоследовательность, можно считать, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$ и $\psi_k \rightarrow \psi$ в $W_{q_0}^1(a, b)$. Поэтому

$$\varphi_k - \psi_k \rightarrow \varphi - \psi \text{ в } W_{q_0}^1(a, b).$$

Из неравенства (6) следует, что $\|\varphi_k - \psi_k\|_{L_2(a,b)}^2 \leq c_1/k \rightarrow 0$, то есть $\varphi - \psi = 0$. Это противоречит условию $\|\varphi_k - \psi_k\|_{W_{q_0}^1(a,b)}^{q_0} > \varepsilon_0$, вытекающему из того же неравенства. $\square$

4. Доказательство теоремы 1

Интегрируя неравенство Леммы 2 по t , из (3) получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара положительных чисел $(c(\varepsilon), N(\varepsilon))$ таких, что для всех $t \in S$ и для всех

натуральных n и m больших $N(\varepsilon)$ верно неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \|w_n(\cdot, t) - w_m(\cdot, t)\|_{W_{q_0}^1(a,b)}^{q_0} dt &\leq \varepsilon \left(T + \int_0^T \int_a^{s_n^+(t)} w_{nxx}^2(x, t) dx dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{s_n^-(t)}^b w_{nxx}^2(x, t) dx dt + \int_0^T \int_a^{s_m^+(t)} w_{mxx}^2(x, t) dx dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{s_m^-(t)}^b w_{mxx}^2(x, t) dx dt \right) + c(\varepsilon) \int_0^T \|w_n(\cdot, t) - w_m(\cdot, t)\|_{L_2(a,b)}^2 dt \leq \\ &\leq \varepsilon(T + 2c) + c(\varepsilon) \int_0^T \|w_n(\cdot, t) - w_m(\cdot, t)\|_{L_2(a,b)}^2 dt. \end{aligned} \quad (7)$$

По определению множества F_c верна оценка $\|w_n\|_{W_2^1(Q)} \leq c$. Поэтому существует подпоследовательность w_n , сходящаяся сильно в $L_2(Q)$. Подбрав для этой подпоследовательности по заданному $\varepsilon > 0$ натуральное $N_1(\varepsilon)$ такое, чтобы при n и m больших $N_1(\varepsilon)$ последнее слагаемое в (7) было меньше ε видим, что при n и m больших $N_2(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N(\varepsilon))$ неравенство (7) гарантирует, что эта подпоследовательность будет также сходиться и по норме пространства $L_{q_0}(0, T; W_{q_0}^1(a, b))$.

Теорема 1 доказана. Отметим, что случай, когда имеется несколько пар функций типа $s_n^\pm(t)$, удовлетворяющих условиям пункта 1 (с разными пределами для разных пар), рассматривается по этой же схеме. Кроме того, аналогично можно установить компактность $w_n(x, t)$ в $W_q^p(Q)$, если в условиях заменить первые производные на p -е, а вторую по x — на $p+1$ -ю. Наконец без изменения доказательства утверждение Теоремы 1 останется в силе и в случае, когда $s_n^\pm$ могут иметь счетное число точек разрыва первого рода. Конечно, при соблюдении условия $\sup_{t \in [0, T] \setminus \bigcup_n A_n} |s_n^\pm(t) - s(t)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

По ходу доказательства можно также увидеть, что будет верна и следующая

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 оценку производной по t заменить на условие относительной компактности в $L_2(Q)$ множества функций $w_n(x, t)$, то будет верно утверждение теоремы 1.

Список литературы

- [1] Подгаев А. Г., Прудников В. Я., Кулеш Т. Д., “Глобальная разрешимость трёхмерной осесимметричной задачи Стефана для квазилинейного уравнения”, *Дальневосточный математический журнал.*, 2022, № 1, 61–75.
- [2] Podgaev A. G., “On Relative Compactness Set of Abstract Function from Scale of the Banach Spaces”, *Functional Analysis, Approximation Theory and Numerical Analysis*, Word Scientific Publishing Co, 1994, 219–236.
- [3] Подгаев А. Г., “Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **34:2**, (1993), 135–145.

- [4] Aubin J., “Un theoreme de compacte”, *Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris)*, **256**, (1963), 5042–5044.
- [5] Simon J., “Compact Sets in the $L_p(0, T; B)$ ”, *Annali di Matematica pura ed applicata (IV)*, **CXLVI**, (1987), 65–96.
- [6] Дубинский Ю. А., “Слабая сходимостъ в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях”, *Матем. сб.*, **67 (109)**:4, (1965).
- [7] Попов С. В., Шадрина А. И., “Контактные параболические краевые задачи для уравнений второго порядка”, *Математические заметки ЯГУ*, **16**:2, (2009), 66–77.
- [8] Мейрманов А. М., *Задача Стефана*, Наука, Новосибирск, 1986.

Поступила в редакцию
9 апреля 2024 г.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение от 28 февраля 2024 г. № 075-02-2024-1432 по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

*Podgaev A. G.*¹, *Podgaev A. A.*², *Kulesh T. D.*¹ Compactness theorems for problems with unknown boundary. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2025. V. 25. No 1. P. 81–89.

¹ Pacific National University, Khabarovsk, Russia

² Novosibirsk State University, Russia

ABSTRACT

In standard compactness theorems for functions from Sobolev spaces with integer exponents, compactness of a set in the W_p^k norms usually requires its uniform boundedness in the space $W_{p_1}^{k+1}$. The paper considers the case (for $k = 1$) when there are no uniform estimates of second derivatives throughout the entire domain of definition. However, they exist for sequences of subregions, each of which is determined by its own sequence of curves (in the flat case), which approach each other as the number increases.

The need for such theorems arises in the study of multiphase Stefan problems, in which such a situation is observed when constructing approximate solutions. These results make it possible to make limit transitions using approximate solutions in two-phase problems with an unknown boundary, which describe the processes of transition of matter from one state to another.

Key words: *Stefan’s problems, non-cylindrical domain, theorems of compactness.*