Эллиптические системы функций

Быковский В.А.

Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН

22 октября 2014

Определение 1. Пусть f и g голоморфные на всей плоскости комплексного переменного функции (целые), тождественно не равные нулю, для которых существует представление

$$f(v+w)g(v-w) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v)\beta_j(w) \quad (\forall v, w \in \mathbb{C}) \qquad (1)$$

с некоторыми $\alpha_i, \beta_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и при этом натуральное n — минимально. В таком случае назовём пару (f, g) эллиптической системой функций ранга $R(f, g) = n$.

Замечание 1. С помощью замены $w \to -w$ получаем, что пары (f, g) и (g, f) только одновременно могут быть эллиптическими системами (ЭС) одного и того же ранга.

Замечание 2. Так как в представлении (1) n — минимально, то наборы $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ состоят из линейно независимых функций.
Из замечания 2 следует, что найдутся два набора комплексных чисел

$$\{v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\} \quad \text{и} \quad \{w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}\},$$

для которых (индукция по n)

$$det \begin{pmatrix} (\alpha_i(v^{(j)})) \\ 1 \le i, j \le n \end{pmatrix} \ne 0 \quad \text{и} \quad det \begin{pmatrix} (\beta_i(w^{(j)})) \\ 1 \le i, j \le n \end{pmatrix} \ne 0.$$

Подставляя в (1) $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ вместо v, а также $w^{(1)}, \dots, w^{(n)}$ вместо w, получим две системы линейных уравнений, из которых находим, что

$$\alpha_i(v) = \sum_{j=1}^{n} a_i^{(j)}\, f(v + w^{(j)})\, g(v - w^{(j)}) \qquad (2)$$

$$\beta_i(w) = \sum_{j=1}^{n} b_i^{(j)}\, f(v^{(j)} + w)\, g(v^{(j)} - w) \qquad (3)$$

с некоторыми $a_i^{(j)}, b_i^{(j)} \in \mathbb{C}$.

Замечание 3. Пусть (f, g) — ЭС и v_0, w_0, A, B, C, D, E — произвольные комплексные числа. Тогда пара $(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ определяемая по формулам

$$\widetilde{f}(z) = e^{Az^2+Bz+D} f(z+v_0), \quad \widetilde{g}(z) = e^{Az^2+Cz+E} f(z+w_0)$$

также ЭС того же ранга.

Определение 2. Эллиптические системы (f, g) и $(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ мы будем называть эквивалентными с символической записью $(f, g) \sim (\widetilde{f}, \widetilde{g})$.

Замечание 4. С помощью (2) и (3) нетрудно показать, что найдутся положительные постоянные c_1 и c_2, такие что

$$|\, f(z)\,| \le e^{c_1|z|^2+c_2} \quad \text{и} \quad |\, g(z)\,| \le e^{c_1|z|^2+c_2}.$$

То есть, f и g — целые функции порядка не более 2.

Замечание 5. С помощью (2) и (3) можно показать (Mario Bonk, Math. Ann., 298, 591-610,1994), что если (f,g) — ЭС, то (f,f) и (g,g) также ЭС с рангами, не превосходящими $R^6(f,g)$.

Замечание 6.

1) Для $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ $\quad T_\lambda f(z) = f(\lambda z)$. (f, g) — ЭС $\Leftrightarrow$ $(T_\lambda f, T_\lambda g)$ — ЭС.

2) (f, g) — ЭС $\Leftrightarrow$ $(T_{-1}f, g)$ — ЭС $\Leftrightarrow$ $(f, T_{-1}g)$ — ЭС.

3) (f_1, g_1) — ЭС и (f_2, g_2) — ЭС. Тогда $(f_1 f_2, g_1 g_2)$ — ЭС ранга не больше $R(f_1, g_1)R(f_2, g_2)$.

4) (f, g_1) и (f, g_2) — ЭС и $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$ с $\eta_1 g_1 + \eta_2 g_2 \not\equiv 0$. Тогда $(f, \eta_1 g_1 + \eta_2 g_2)$ — ЭС ранга не больше $R(f, g_1) + R(f, g_2)$.

5) (f, g) — ЭС $\Rightarrow$ (f, g') и (f', g) — ЭС ранга не больше $2R(f, g)$.

Пример 1. Пусть (f, g) — ЭС и g не имеет нулей. Тогда для некоторых $A, B, C \in \mathbb{C}$

$$g(z) = e^{Az^2+Bz+C}.$$

С учётом предыдущего, без ограничения общности можно считать, что $g = \mathbf{1}$ (тождественная единица).
Получается функциональное уравнение

$$f(w+v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(w)\beta_i(v),$$

решённое T. Levi-Civita (R.C. Accad. Lincei (2) 22 (1913), 181-183).

Ответ:

$$f(z) = \sum_{l=1}^{k} P_l(z) e^{A_l z}$$

с различными комплексными A_l и полиномами P_l, для которых

$$\sum_{l=1}^{k} (degP_l - 1) = R(f, \mathbf{1}) = n.$$

Замечание 7. Из вышеупомянутого результата следует, что все ЭС ранга 1 эквиваленты паре $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$.

Зафиксируем $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}$. В соответствии с (1) построим функцию $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n+1}$ по формуле

$$F(w) = \begin{pmatrix} f(w+v_0)g(w-v_0) \\ \dots \\ f(w+v_n)g(w-v_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1(w) \begin{pmatrix} \beta_1(v_0) \\ \dots \\ \beta_1(v_n) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_j(w) \begin{pmatrix} \beta_j(v_0) \\ \dots \\ \beta_j(v_n) \end{pmatrix} + \alpha_n(w) \begin{pmatrix} \beta_n(v_0) \\ \dots \\ \beta_n(v_n) \end{pmatrix}.$$

Для фиксированных $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ $(n+1)$-мерные векторы $F(w_0), F(w_1), \dots, F(w_n)$ лежат в n-мерном подпространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Поэтому

$$D_{f,g}\begin{pmatrix} w_0, w_1, \dots, w_n \\ \dots \\ v_0, v_1, \dots, v_n \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} f(w_0+v_0)g(w_0-v_0) & \dots & f(w_0+v_n)g(w_0-v_n) \\ \dots & f(w_i+v_j)g(w_i-v_j) & \dots \\ f(w_n+v_0)g(w_n-v_0) & \dots & f(w_n+v_n)g(w_n-v_n) \end{pmatrix} = 0.$$

Последнее равенство с минимально возможным n можно принять за определение эллиптических систем.

Пример 2. Эллиптические системы ранга 2.

В работе R. Rochberg and L. A. Rubel, A function equation. Indiana Univ. Math J. 41 (1992), 363 - 376

были найдены все остальные эллиптические системы ранга 2 отличные от тех, которые появляются в Примере 1.

Они доказали, что любая эллиптическая система ранга 2 с входящими в неё функциями, у которых имеются нули, эквивалентна системе вида (σ, σ).

Здесь

$$\sigma(z)=\sigma_\Gamma(z)=z\prod_{w\in\Gamma\setminus\{0\}}\left(1-\frac{z}{w}\right)e^{\frac{z}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2}$$

— сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с решеткой Г.
В вырожденных случаях:
1) для $\Gamma=\{0\}$ $\quad\sigma_\Gamma(z)=z$;
2) для $\Gamma=\{mw|m\in\mathbb{Z}\}$ с $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\sigma_\Gamma(z)=z\prod_{w\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(1-\frac{z}{nw}\right)e^{\frac{z}{nw}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{nw}\right)^2}=\frac{w}{\pi}\sin\frac{\pi z}{w}e^{\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{z}{w}\right)^2}.$$

Сигма-функция — нечётная целая функция с простыми нулями в узлах решётки Г.

Для нечётной функции g

$$D_{f,g}\begin{pmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ z_0, z_2, z_3 \end{pmatrix} =$$

$$= f(z_2+z_3)g(z_2-z_3)W_{f,g}(z_0,z_1,z_2,z_3) = 0,$$

где

$$\begin{gathered} W_{f,g}(z_0,z_1,z_2,z_3) = f(z_0+z_1)g(z_0-z_1)f(z_2+z_3)g(z_2-z_3)+ \\ +f(z_0+z_2)g(z_0-z_2)f(z_3+z_1)g(z_3-z_1)+ \\ +f(z_0+z_3)g(z_0-z_3)f(z_1+z_2)g(z_1-z_2) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Последнее равенство при $f = g$ превращается в “трёхчленное уравнение”, которому удовлетворяет сигма-функция Вейерштрасса

$$\begin{aligned} f(z+z_1)f(z-z_1)f(z_2+z_3)f(z_2-z_3)+ \\ +f(z+z_2)f(z-z_2)f(z_3+z_1)f(z_3-z_1)+ \\ +f(z+z_3)f(z-z_3)f(z_1+z_2)f(z_1-z_2)=0. \end{aligned} \tag{5}$$

K. Weierstrass, Zur Theorie der Jacobischer Funktionen von mehreren Veranderlichen. Sitzungsber.Konigl. Acad. Wiss. 1882, p. 505-508 [Werke Bd. 3, pp. 155-159].
В той же самой работе Вейерштрасс заметил, что не существует других решений (5) в целых функциях $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Deslisle A. (Bestimmung der allgemeinsten der Funktionalgleichung der σ-Funktion genugenden Funktion. Math.Ann. 30, 91-119 (1887)) попытался доказать это, но его рассуждения содержали пробелы.

Наконец, полное доказательство было дано Гурвицом (Uber der Weierstrass'sche σ-Funktion, pp. 133-141. Berlin 1914. Ges. Abh., Bd. 2, pp. 722-730. Boston Basel Stuttgart: Birkhauser 1932.)

Для функции g с $g(0)=0$

$$D_{f,g}\begin{pmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix} =$$

$$= f(z_1+z_2)g(z_1-z_2)f(z_2+z_3)g(z_2-z_3)f(z_3+z_1)g(z_3-z_1)+$$

$$+f(z_1+z_3)g(z_1-z_3)f(z_2+z_1)g(z_2-z_1)f(z_3+z_2)g(z_3-z_2) =$$

$$= f(z_1+z_2)f(z_1+z_3)f(z_2+z_3)\times$$

$$\times(g(z_1-z_2)g(z_2-z_3)g(z_3-z_1)+g(z_1-z_3)g(z_2-z_1)g(z_3-z_2)) = 0.$$

Положим $\psi(z) = -\frac{g(z)}{g(-z)}$.
Тогда $\psi(z_1-z_2) = \psi(z_1-z_3)\cdot\psi(z_3-z_2)$

$$\Downarrow$$

$$\psi(z) = e^{2\lambda z},$$

$$h(z) = g(z)e^{-\lambda z} = -g(-z)e^{\lambda z} = -h(-z),$$

$$g(z) = e^{\lambda z} h(z),$$

где $h(z)$ — нечётная функция.
В соответствии с замечанием 6 и только что доказанным свойством в ЭС ранга 2 можно считать, что обе функции f и g — нечётные.
Положим в формуле (4) $z_0 = -z_1$. Тогда для нечётных f и g оно эквивалентно тождеству

$$f(-z_1 + z_2)g(-z_1 - z_2)f(z_3 + z_1)g(z_3 - z_1) +$$

$$+ f(-z_1 + z_3)g(-z_1 - z_3)f(z_1 + z_2)g(z_1 - z_2) = 0.$$

Положив

$$\psi(z) = f(z)/g(z)$$

преобразуем его к виду

$$\psi(z_1 - z_2)\psi(z_3 + z_1) = \psi(z_3 - z_1)\psi(z_1 + z_2).$$

При $z_2 = 0$ оно превращается в равенство

$$\psi(z_3 + z_1) = \psi(z_3 - z_1),$$

из которого следует, что $\psi(z)$ есть некоторая константа c и $f(z) = cg(z)$.
Таким образом, мы показали, что результат Рочберга и Рубеля 1992 года — прямое следствие теоремы Гурвитца 1914 года.

Пример 3. ЭС ранга 3.
Нетрудно проверить, что для нечётной функции g выполняется равенство

$$D_{f,g}\begin{pmatrix} z_1, z_2, z_3, z_4 \\ z_0, z_2, z_3, z_4 \end{pmatrix} =$$

$$= W_{f,g}(z_0, z_2, z_3, z_4) W_{f,g}(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Из него следует

ТЕОРЕМА

Не существует ЭС ранга 3, у которых хотя бы одна из составляющих пару функций нечётна.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В работе Бухштабера и Лейкина (Труды МИАН, Успехи мат. наук, 2005 год) было выписано трилинейное функциональное уравнение

$$f_1(u+z)f_2(v+z)f_3(u+v-z) = \varphi_1(u,v)\psi_1(z)+\ldots+\varphi_n(u,v)\psi_n(z)$$

с целыми функциями f_1, f_2, f_3, отличными от тождественного нуля.

Опираясь на ранее предшествующие результаты и сформулированную теорему в нетривиальном случае, когда f_3 имеет хотя бы один нуль, все решения трилинейного уравнения можно представить в виде

$$f_j(z) = e^{Az^2+B_jz+C_j}\sigma(z+z_j), \quad j = 1,2,3$$

с произвольными комплексными $A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, z_1, z_2, z_3$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!