УДК 511.9

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ МИНКОВСКОГО [1]

О. А. Горкуша (г. Хабаровск)

Аннотация

Мы исследуем статистические свойства эллиптических дробей, которые являются частным случаем дробей Минковского. Главный результат этой работы — доказательство асимптотической формулы для математического ожидания случайной величины $\nu(c/d)$, когда переменные c и d меняются в пределах $1 \le c \le d \le R$, $R \to \infty$, $\nu(c/d)$ — длина эллиптической дроби числа c/d.

Основные обозначения

1. Запись $[A]$ означает характеристическую функцию условия A.

2. Запись $[x]$ означает целую часть числа x.

3. Запись $\{x\}$ означает дробную часть числа x, то есть $\{x\} = x - [x]$.

4. Запись $\sum^*_{1\le k\le n} f(k)$ — сумма всех $f(k)$, таких, что индекс k взаимно прост с n.

5. Константа Эйлера
$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right).$$

6. Дзета-функция Римана:
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

7. Функция Эйлера $\varphi(n)$ — количество взаимно простых с n чисел, не превосходящих n.

8. Функция Мебиуса $\mu(n)$, которая определяется следующим образом:
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 1, \\ (-1)^k & \text{если } n = p_1\cdot\ldots\cdot p_k, \\ 0 & \text{если } p^2|n. \end{cases}$$

9. Дилогарифм Эйлера
$$Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}dt.$$

[1]Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, гранты № 09-01-12129-офи-м, № 10-01-98001-р-сибирь-а.

§1. Введение

Нерегулярную непрерывную дробь, определяемую двумя числовыми последовательностями $\{a_n\}_{n\ge 0}$ и $\{b_n\}_{n\ge 1}$ будем записывать в виде

$$\left[a_0; \frac{a_i}{b_i}\right]_{i\ge 1}. \tag{1}$$

Часто оказывается, что величины a_1, b_1, a_2, b_2 определяются особенным образом. В этом случае применяем обозначения

$$\left[a_0; \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_i}{b_i}\right]_{i\ge 2}, \quad \left[a_0; \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_i}{b_i}\right]_{i\ge 3}. \tag{2}$$

Далее будем рассматривать только те дроби, для которых $a_0 = 0$, $a_i \in \{-1, 1\}$, $b_i \in \mathbf{N}$. Для $n \ge 2$ конечная непрерывная дробь

$$\frac{A_n}{B_n} = \left[0; \frac{a_i}{b_i}\right]_{i=1}^{n-1} \tag{3}$$

называется подходящей дробью непрерывной дроби (1), (2) с номером n, а числа A_n и B_n — числитель и знаменатель подходящей дроби A_n/B_n. Из равенства (3) и из начальных условий

$$A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ B_0 = 0,\ B_1 = 1$$

мы получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= b_n A_n + a_n A_{n-1} \quad \text{для } n \ge 1, \\ B_{n+1} &= b_n B_n + a_n B_{n-1} \quad \text{для } n \ge 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Если каждое число a_i равно 1, то выражения (1), (2) называются регулярной непрерывной дробью и обозначаются $[0; b_1, b_2, \dots]$, а последовательность подходящих дробей регулярной непрерывной дроби — через P_n/Q_n.

Пусть $r \in \mathbf{Q}$ и $r \in (0, 1/2)$. Хорошо известно, что r имеет единственное представление в виде конечной регулярной непрерывной дроби $r = [0; b_1, \dots, b_s]$ длины $s = s(r)$ с $b_s > 1$. Согласно теореме Лагранжа о наилучших приближениях, дроби P_i/Q_i с $i \ge 1$ есть наилучшие приближения числа r. Это замечание приводит к следующей интерпретации наилучших приближений числа r.

Построим решетку Γ_r на плоскости с базисом $(1, 0)$, $(-r, 1)$.

Определение 1. Будем говорить, что точка $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ решетки Γ_r — *локальный минимум* этой решетки, если прямоугольник $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \big| |x| < |\gamma_1|,\ |y| < |\gamma_2|\}$ не содержит никаких других точек решетки, кроме начала координат.

Множество таких точек обозначим через $\mathfrak{M}(\Gamma_r)$. Из определения 1 следует, что

$$\mathfrak{M}(\Gamma_r) = \{\pm M^{(i)} \big| M^{(i)} = (P_i - rQ_i, Q_i),\ 0 \le i \le s(r) + 1\}. \qquad (5)$$

Определение 2. Назовем ненулевую точку $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ решетки Γ_r — *эллиптическим минимумом* этой решетки, если найдутся вещественные положительные числа t_1 и t_2 с условием

$$\Gamma_r \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \big|\ t_1x^2 + t_2y^2 < t_1\gamma_1^2 + t_2\gamma_2^2 = 1\} = \{(0, 0)\}.$$

Множество эллиптических минимумов решетки обозначим через $\mathfrak{E}(\Gamma_r)$.

Поскольку Γ_r — дискретное множество и $r \in (0, 1/2)$, то точки $\pm(1, 0)$, $\pm(0, Q_{s+1})$, $\pm(-r, 1), \pm(P_s - rQ_s, Q_s)$ — эллиптические минимумы. Кроме этого имеет место вложение

$$\mathfrak{E}(\Gamma_r) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma_r).$$

Определим последовательности целых неотрицательных чисел $\{A_i\}_{i\ge0}$, $\{B_i\}_{i\ge0}$ с условием $B_i < B_{i+1}$ и точек $\{E^{(i)}\}_{i\ge0}$ решетки Γ_r следующим образом:

$$\mathfrak{E}(\Gamma_r) = \{\pm E^{(i)} \big| E^{(i)} = (A_i - rB_i, B_i),\ 0 \le i \le \nu + 1\}. \qquad (6)$$

Определение 3. Для $0 < r \le 1/2$ дробь $\left[0; \frac{1}{b_1},\ \frac{a_i}{b_i}\right]_{i=2}^{\nu}$ назовем *эллиптической дробью* числа r длины $\nu = \nu(r)$, если последовательность подходящих дробей $\{A_i/B_i\}$ с $1 \le i \le \nu + 1$ удовлетворяет соотношению (6).

Для $1/2 < r < 1$ дробь $\left[0; \frac{1}{1},\ \frac{1}{b_1 - 1},\ \frac{a_i}{b_i}\right]_{i=2}^{\nu}$ назовем эллиптической дробью числа r, если дробь $\left[0; \frac{1}{b_1},\ \frac{a_i}{b_i}\right]_{i=2}^{\nu}$ — эллиптическая дробь числа $1 - r$.

Впервые такую конструкцию нерегулярной дроби предложил Эрмит [1]. Много позже в 1894 году Минковский [2] изучил ряд свойств нерегулярных дробей более общего характера. Эллиптические дроби представляют частный случай этих дробей. Там же приведены основные свойства эллиптических дробей.

В настоящей работе изучаются статистические свойства эллиптических дробей.

Следует отметить, что статистические свойства регулярной непрерывной дроби изучались в работах Хейльбронна [3], Тонкова [4], Портера [5], Ренча [6], Устинова [7]. В перечисленных работах авторы исследовали асимптотическое поведение средней длины регулярной дроби с фиксированным знаменателем.

Другое направление в исследовании статистических свойств регулярных дробей — получение асимптотических свойств для математического ожидания и дисперсии величины $s(c/d)$ — работы Диксона [17], Хенсли [18], Валлее [9], Быковского [19], Устинова [10]. Для эллиптических дробей в настоящий момент доказана асимптотическая формула для среднего значения длины эллиптической дроби с фиксированным знаменателем [8].

Используя методы получения асимптотических оценок в работах [19], [7], [10], [8], в настоящей работе доказывается асимптотическая формула для средней длины эллиптической дроби числа c/d, когда переменные c и d меняются в пределах $1 \le c \le d \le R$.

Теорема. *Для положительного вещественного числа $R \ge 2$ определим величину $E(R)$ равенством*

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{d \le R} \sum_{c=1}^{d} \nu\left(\frac{c}{d}\right).$$

Справедлива асимптотическая формула

$$E(R) = \frac{\log 3}{\zeta(2)} \log R + C_e + O\left(\frac{\log^3 R}{R}\right),$$

где

$$C_e = \frac{1}{\zeta(2)} \cdot \left(\log 3 \left(2\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + \Psi - 2Li_2\left(\frac{2}{3}\right) - Li_2\left(\frac{3}{4}\right) + \zeta(2)\left(3 - \log\left(\frac{3}{2}\right)\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{5\log 3}{2} + 2\log 2 + \frac{9\log^2 3}{4} + \frac{7\log^2 2}{2} - 7\log 3 \log 2 \right),$$
$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{k < m \le 2k} \frac{2m-k}{m^2 - mk + k^2} + \sum_{m \le k} \frac{2m+k}{m^2 + km + k^2} - 2\log 3 \right)$$

— абсолютно сходящийся ряд.

§2. Предварительные замечания

Определение 4. Пары точек $(M^{(i)}, M^{(i+1)})_{i \le s}$ и $(E^{(i)}, E^{(i+1)})_{i \le \nu}$, определенных соотношениями (5) и (6), будем называть *смежными локальными минимумами* и *смежными эллиптическими минимумами* решетки Γ_r соответственно.

Следствие 1. *Смежные локальные минимумы и смежные эллиптические минимумы составляют базис решетки Γ_r.*

Доказательство. Это непосредственно вытекает из леммы 6 в [11]. □

Следствие 2. *Пусть $M^{(i-1)}, M^{(i)}, M^{(i+1)}$ — точки решетки Γ_r, определенные равенством (5).*

1. *Точки $M^{(i-1)}$ и $M^{(i)}$ — смежные эллиптические минимумы решетки тогда и только тогда, когда точка $M^{(i)} + M^{(i-1)}$ лежит вне эллипса, проходящего через точки $M^{(i-1)}, M^{(i)}$.*

2. *Точки $M^{(i-1)}$ и $M^{(i+1)}$ — смежные эллиптические минимумы решетки тогда и только тогда, когда точка $M^{(i)}$ лежит вне эллипса, проходящего через точки $M^{(i-1)}, M^{(i+1)}$ и $M^{(i+1)} = M^{(i)} + M^{(i-1)}$.*

Доказательство. Эти утверждения немедленно вытекают из (4), следствия 1 и из того факта, что в каждой из координатных четвертей множество $\mathfrak{M}(\Gamma_r)$ — выпуклая оболочка точек решетки, кроме нуля [12], [13]. $\square$

Пусть
$$\beta(x) = \frac{1+2x}{2+x}, \quad (x \in [0,1])$$
и $x = \alpha(y)$ $(y \in [1/2, 1])$ — функция, обратная к $\beta(x)$. Ниже мы будем рассматривать только такие функции $\beta(x)$ и $\alpha(y)$.

Лемма 1. *Для некоторого $i \geq 1$ подходящая дробь P_i/Q_i регулярной непрерывной дроби числа $c/d \in (0, 1/2)$ будет подходящей дробью эллиптической дроби числа c/d только в случае выполнения неравенства*
$$\left|\frac{dP_i - cQ_i}{dP_{i-1} - cQ_{i-1}}\right| \leq \beta\left(\frac{Q_{i-1}}{Q_i}\right).$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму в следующей формулировке:
$$M^{(i)} \notin \mathfrak{E}(\Gamma_{c/d}) \Leftrightarrow \left|\frac{dP_i - cQ_i}{dP_{i-1} - cQ_{i-1}}\right| > \beta\left(\frac{Q_{i-1}}{Q_i}\right).$$

Допустим, что для некоторого $i \geq 1$ точка $M^{(i)}$ — не эллиптический минимум решетки $\Gamma_{c/d}$. Тогда согласно следствий 1 и 2 точки $M^{(i-1)}$, $M^{(i+1)}$ — смежные эллиптические минимумы, $M^{(i+1)} = M^{(i)} + M^{(i-1)}$ и точка $M^{(i)}$ лежит вне эллипса, проходящего через точки $M^{(i-1)}$ и $M^{(i+1)}$. С учетом (5) перепишем эти условия в терминах переменных
$$x = \frac{Q_{i-1}}{Q_i},\ y = \left|\frac{dP_i - cQ_i}{dP_{i-1} - cQ_{i-1}}\right|. \tag{7}$$
В результате получаем $y > \beta(x)$.

Предположим, что для некоторого $i \geq 1$ выполняются условия
$$|(dP_i - cQ_i)/(dP_{i-1} - cQ_{i-1})| > \beta(Q_{i-1}/Q_i), \quad M^{(i)} \in \mathfrak{E}(\Gamma_{c/d}).$$
Приведем это утверждение к противоречию. У нас имеются только две возможности:
$$M^{(i-1)} \in \mathfrak{E}(\Gamma_{c/d}) \ \text{ или } M^{(i-1)} \notin \mathfrak{E}(\Gamma_{c/d}),$$
которые мы рассмотрим отдельно, используя следствие 2.

1 случай. Точка $M^{(i-1)} + M^{(i)}$ лежит вне эллипса, проходящего через точки $M^{(i-1)}$, $M^{(i)}$. В терминах переменных x и y (7) условие перепишется в виде $y < \beta(x)$.

2 случай. Точка $M^{(i-1)}$ лежит вне эллипса, проходящего через точки $M^{(i)}$, $M^{(i)} - M^{(i-1)}$. В терминах переменных x и y (7) условие перепишется в виде $y < (2x-1)/(2-x) < \beta(x)$.

Таким образом, и в первом и во втором случаях мы получили противоречие и предположением. Лемма доказана. $\square$

Определение 5. Будем говорить, что четверка натуральных чисел (k,l,m,n) есть $E-$ *представление* числа d, если

$$km+ln=d,\ m\leq n,\ k\leq l\beta(m/n),\ \text{НОД}(m,n)=\text{НОД}(k,l)=1. \tag{8}$$

Множество $E-$ представлений числа d обозначим через $T^*(d)$.

Лемма 2. *Для всех натуральных чисел $d>2$ выполняется равенство*

$$\sum_{1\leq c\leq d}^{*}\nu\left(\frac{c}{d}\right)=2\cdot\#T^*(d)+\frac{1}{2}\varphi(d).$$

Доказательство. Согласно определения 3 и (6)

$$\nu\left(\frac{c}{d}\right)=\begin{cases}\#\mathfrak{E}(\Gamma_{c/d})/2-2 & \text{если } c<d/2,\\ 1 & \text{если } c=d/2,\\ \#\mathfrak{E}(\Gamma_{1-c/d})/2-1 & \text{если } c>d/2.\end{cases}$$

Поэтому для $d>2$

$$\sum_{1\leq c\leq d}^{*}\nu\left(\frac{c}{d}\right)=\sum_{\substack{1\leq c<d/2\\ \text{НОД}(c,d)=1}}\#\mathfrak{E}(\Gamma_{c/d})-\frac{3}{2}\varphi(d). \tag{9}$$

Зафиксируем число $d\in\mathbf{N}$, $d>2$ и дополним множество $T^*(d)$ четверками неотрицательных целых чисел $(0,l,m,n)$, $(k,l,0,n)$ $(0,l,0,n)$, для которых выполняется условие (8) и $m\leq d/2$, а затем выкинем все четверки (k,l,m,n), у которых либо $k=l$, либо $m=n$. Полученное множество обозначим через $T'(d)$. Заметим, что

$$\#T'(d)=\#T^*(d)+\frac{\varphi(d)}{2}. \tag{10}$$

Отобразим $T'(d)\to\{c\in\mathbf{N}|\ 0<c\leq d/2,\ \text{НОД}(c,d)=1\}$ посредством правила: число c таково, что при разложении числа c/d в регулярную непрерывную дробь существуют соседние подходящие дроби P_i/Q_i и P_{i+1}/Q_{i+1} с условием

$$\frac{m}{n}=\frac{Q_i}{Q_{i+1}},\ \frac{k}{l}=\left|\frac{dP_{i+1}-cQ_{i+1}}{dP_i-cQ_i}\right|$$

и P_{i+1}/Q_{i+1} — подходящая дробь эллиптической дроби числа c/d. Из леммы 1 следует, что это отображение биективно. Это означает, что

$$\#T'(d)=\sum_{\substack{1\leq c\leq d/2\\ \text{НОД}(c,d)=1}}\left(\frac{\#\mathfrak{E}(\Gamma_{c/d})}{2}-1\right).$$

Учитывая полученное равенство и соотношения (9) и (10), получаем утверждение леммы. □

§3. Асимптотические формулы

Здесь мы приведем несколько вспомогательных утверждений, полезных для дальнейшего изложения. Введем вспомогательные функции

$s_1(x)$ – сумма всех неполных частных регулярной непрерывной дроби числа x,

$$\rho(x)=\frac{1}{2}-\{x\},\qquad \sigma(x)=\int_0^x\rho(t)dt.$$

Лемма 3 (формула суммирования Эйлера-Маклорена). *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{a<n\le b}f(n)=\int_a^b f(x)dx+\rho(b)f(b)-\rho(a)f(a)+\sigma(a)f(a)-\sigma(b)f(b)+\int_a^b\sigma(x)f''(x)dx.$$

Доказательство. Смотрите, например, в [14]. □

Из леммы 3 следуют асимптотические равенства

$$\sum_{0<n\le U}1=U+\rho(U), \tag{11}$$

$$\sum_{0<n\le U}\frac{1}{n}=\log U+\gamma+\frac{\rho(U)}{U}+O\left(\frac{1}{U^2}\right), \tag{12}$$

$$\sum_{0<m\le n}\frac{\beta(\frac{m}{n})}{1+\frac{m}{n}\beta(\frac{m}{n})}=n\cdot\frac{\log 3}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{13}$$

$$\sum_{0<m\le\frac{n}{2}}\frac{1}{m+n}=\log\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3n}[n\equiv 0(2)]-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{14}$$

$$\sum_{k\le m<2k}\left(\frac{1}{m+k\alpha(\frac{k}{m})}-\frac{1}{m+k}\right)=\log 2-\frac{\log 3}{2}-\frac{1}{12k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{15}$$

Лемма 4. *Пусть $x=P/Q$ — рациональное число, y,a,b — вещественные числа и $a\le b$. Тогда*

$$\sum_{a<n\le b}\{nx+y\}=\frac{b-a}{2}-\frac{b-a}{Q}\rho(yQ)[b-a>Q]+O(s_1(x)).$$

Доказательство. Положим $K = [b] - [a], \gamma = \{y + x[a]\}$, определим характеристическую функцию $\chi(x)$ условиями

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in [1-\gamma, 1), \\ 0 & \text{если } x \in [0, 1-\gamma), \end{cases}$$
$$\chi(x) = \chi(x+1).$$

Тогда
$$\sum_{a<n\le b} \{nx + y\} = \sum_{0<n\le K} \{nx\} - \sum_{0<n\le K} \chi(nx) + K\gamma.$$

Если $K < Q$, то на основании [15] справедливы оценки

$$\sum_{0<n\le K} \{nx\} = \frac{K}{2} + O(s_1(x)), \quad \sum_{0<n\le K} \chi(nx) = K\gamma + O(s_1(x)).$$

Пусть теперь $K > Q$. Выберем числа $K_1 \equiv K(modQ)$, $T = [K/Q]$, $r_n \equiv nP(modQ)$ для всех n из отрезка $[1, K]$ и заметив, что $r_n = r_{n(modQ)}$ и то, что если n пробегает полную систему вычетов по модулю Q, то r_n по одному разу принимает каждое из значений $0, 1, \ldots, Q-1$, получаем

$$\sum_{0<n\le K} \{nx\} = \sum_{0<n\le K} \left\{\frac{nP}{Q}\right\} = \sum_{0<n\le K} \frac{r_n}{Q} = \sum_{n=1}^{T\cdot Q} \frac{r_n}{Q} + \sum_{n=T\cdot Q+1}^{T\cdot Q+K_1} \frac{r_n}{Q} = T\sum_{n=1}^{Q-1} \frac{n}{Q} + \sum_{n=1}^{K_1} \frac{r_n}{Q} =$$

$$= \frac{T\cdot Q}{2} - \frac{T}{2} + \sum_{n=1}^{K_1} \left\{\frac{nP}{Q}\right\} = \frac{T\cdot Q}{2} - \frac{T}{2} + \frac{K_1}{2} + O(s_1(x)) = \frac{K}{2} - \frac{K}{2Q} + O(s_1(x)).$$

Используя те же рассуждения, получаем асимптотическую формулу

$$\sum_{0<n\le K} \chi(nx) = \gamma K - \frac{K}{Q}\{yQ\}[K > Q] + O(s_1(x)).$$

Учитывая $K = b - a + O(1)$, получаем утверждение леммы.

$\square$

Лемма 5. *Пусть $U > 1$ — вещественное число, n, m — натуральные числа и $m \le n$. Имеют место оценки:*

1. $\sum_{m=1}^{n} s_1(\frac{m}{n}) \ll n\log^2 n$,
2. $\sum_{n\le U}\sum_{m=1}^{n} s_1(\beta(\frac{m}{n})) \ll U^2\log^2 U$,
3. $\sum_{n\le U}\sum_{\frac{n}{2}<m\le n} s_1(\alpha(\frac{m}{n})) \ll U^2\log^2 U.$

Доказательство. Оценка 1 получена в работе [16].

Докажем вторую асимптотическую формулу, используя предыдущую асимптотику. Мы имеем

$$\sum_{n\le U}\sum_{m=1}^{n} s_1\left(\beta\left(\frac{m}{n}\right)\right) = \sum_{n\le U}\sum_{m=1}^{n} s_1\left(\frac{n+2m}{2n+m}\right) \ll \sum_{l\le 3U}\ \sum_{\substack{n\le U,\\ m\le n,\\ l=2n+m}} s_1\left(\frac{n+2m}{l}\right) \ll$$

$$\ll \sum_{l\le 3U}\ \sum_{\frac{l}{3}\le n\le \frac{l}{2}} s_1\left(\frac{2l-3n}{l}\right) \ll \sum_{l\le 3U}\sum_{k\le l} s_1\left(\frac{k}{l}\right) \ll \sum_{l\le 3U} l\log^2 l \ll U^2\log^2 U.$$

Те же рассуждения, которые применялись при доказательстве второго утверждения дают оценку $\sum_{n\le U}\sum_{\frac{n}{2}<m\le n} s_1(\alpha(\frac{m}{n})) \ll U^2\log^2 U$. □

Лемма 6. *Определим абсолютно сходящиеся ряды Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 равенствами*

$$\Psi_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{m\le\frac{k}{2}}\frac{1}{m+k} - \log\left(\frac{3}{2}\right)\right),$$

$$\Psi_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{k\le m<2k}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2m-k}{m^2-mk+k^2} - \frac{1}{m+k}\right) - \log 2 + \frac{\log 3}{2}\right),$$

$$\Psi_3 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{m\le k}\frac{2m+k}{m^2+km+k^2} - \log 3\right).$$

Тогда

$$2\Psi_1 + 2\Psi_2 + \Psi_3 = \Psi - \log\left(\frac{3}{2}\right)(2 + 2\log 2 + \zeta(2)),$$

где ряд Ψ определен в формулировке теоремы во введении.

Доказательство. Если положить

$$\Psi' = \Psi - 2\Psi_1 - 2\Psi_2 - \Psi_3,$$

то из определения рядов $\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ следует

$$\Psi' = 2\Psi'' + \frac{\zeta(2)}{3},$$

где

$$\Psi'' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{k<m\le 2k}\frac{1}{m+k} - \sum_{m\le\frac{k}{2}}\frac{1}{m+k}\right).$$

Представим ряд Ψ'' в виде разности двух абсолютно сходящихся рядов:

$$\Psi''=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Bigg(\sum_{k<m\le 2k}\frac{1}{m+k}-\log\left(\frac{3}{2}\right)\Bigg)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Bigg(\sum_{m\le\frac{k}{2}}\frac{1}{m+k}-\log\left(\frac{3}{2}\right)\Bigg).$$

Исследуя второй ряд, отдельно посчитаем сумму элементов ряда с индексами $(k,m)\in\{(2m,m)|m\in\mathbf{N}\}$, а у другой суммы ряда поменяем порядок суммирования, затем воспользуемся равенством $\frac{1}{k(m+k)}=\frac{1}{km}-\frac{1}{m(m+k)}$ и сделаем замену переменных суммирования $k\to m$, $m\to k$. В результате получаем следующее представление второго ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Bigg(\sum_{m\le\frac{k}{2}}\frac{1}{m+k}-\log\left(\frac{3}{2}\right)\Bigg)=\zeta(2)\Bigg(\frac{1}{6}-\frac{\log\frac{3}{2}}{2}\Bigg)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{m>2k}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+k}-\frac{k\log(\frac{3}{2})}{m[\frac{m}{2}]}\right)$$

и

$$\Psi''=\log\left(\frac{3}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m>2k}\frac{1}{m[\frac{m}{2}]}-\frac{1}{k}\right)-\zeta(2)\Bigg(\frac{1}{6}-\frac{\log\frac{3}{2}}{2}\Bigg).$$

Далее покажем, что для любого $N\in\mathbf{N}$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{m>2k}\frac{1}{m[\frac{m}{2}]}-\frac{1}{k}\right)=\log 2+\frac{1}{2}+N\Bigg(\log\left(2+\frac{1}{N}\right)-\log 2\Bigg)+O\Bigg(\frac{1}{N}\Bigg).$$

Обозначим сумму, стоящую в левой части равенства через $S(N)$ и разделим ее на три суммы:

$$S(N)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{2k<m\le 2N}\frac{1}{m[\frac{m}{2}]}+\sum_{k=1}^{N}\sum_{2N<m}\frac{1}{m[\frac{m}{2}]}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.$$

В первых двух слагаемых поменяем порядок суммирования, а затем воспользуемся формулой Эйлера- Маклорена — получим требуемое асимптотическое тождество. Доказательство леммы следует из соотношения $\lim_{N\to\infty}S(N)=\log 2+1$. □

Лемма 7. *Для любого положительного вещественного числа R определим сумму $H_1(R)$ равенством*

$$H_1(R)=\sum_{l\le R}\sum_{k\le\frac{l}{2}}\frac{1}{k}\Bigg(\frac{1}{l}-\max\left(\frac{1}{R},\frac{1}{k+l}\right)\Bigg).$$

Тогда при $R\to\infty$

$$H_1(R)=\log R\log\left(\frac{3}{2}\right)+C_1+\frac{1}{2R}\Bigg(1-\log\left(\frac{3}{2}\right)\Bigg)+O\Bigg(\frac{\log R}{R^2}\Bigg),$$

где

$$C_1=\Psi_1+\gamma\log\left(\frac{3}{2}\right)-\log\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{\log^2(\frac{3}{2})}{2}-\log\left(\frac{3}{2}\right)\log 3+Li_2(1)-Li_2\left(\frac{2}{3}\right),$$

ряд Ψ_1 *определен в формулировке леммы 6.*

Доказательство. Согласно определения

$$H_1(R)=\sum_{l\le R}\frac{1}{l}\sum_{k\le\frac{l}{2}}\frac{1}{k+l}-\sum_{l\le R}\sum_{\substack{k\le\frac{l}{2}\\ l+k>R}}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{k+l}\right).$$

Если в суммах произвести отдельно суммирование по индексам $l=[R]$, $k\in[1,[R]/2]$, то

$$H_1(R)=\sum_{l\le R-1}\frac{1}{l}\sum_{k\le\frac{l}{2}}\frac{1}{k+l}-\sum_{l\le R-1}\sum_{\substack{k\le\frac{l}{2}\\ l+k>R}}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{k+l}\right)+O\left(\frac{\log R}{R^2}\right). \tag{16}$$

Из (12) и (14) следует

$$\sum_{l\le R}\frac{1}{l}\sum_{k\le\frac{l}{2}}\frac{1}{k+l}=\log\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\log R+\Psi_1+\log\left(\frac{3}{2}\right)\left(\gamma+\frac{\rho(R)}{R}\right)+\frac{1}{3R}+O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Принимая во внимание оценки

$$\frac{1}{R-1}-\frac{1}{R}\ll\frac{1}{R^2},\ \log(R-1)-\log R+\frac{1}{R}\ll\frac{1}{R^2}, \tag{17}$$

получим

$$\sum_{l\le R-1}\frac{1}{l}\sum_{k\le\frac{l}{2}}\frac{1}{k+l}=\log\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\log R+\Psi_1+\log\left(\frac{3}{2}\right)\left(\gamma+\frac{\rho(R)}{R}\right)+\frac{1}{R}\left(\frac{1}{3}-\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{R^2}\right). \tag{18}$$

Получим асимптотическую формулу для второго слагаемого (обозначим его через $S(R)$) в правой части равенства (16). Сначала применим к внутренней сумме формулу Эйлера-Маклорена:

$$S(R)=\sum_{l\in(\frac{2R}{3},R-1]}\sum_{k\in(R-l,\frac{l}{2}]}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{k+l}\right)=$$

$$=\sum_{l\in(\frac{2R}{3},R-1]}\left(f(R,l)+\frac{\log 3}{l}-\frac{\log 2}{R}+\frac{\rho(l/2)}{l/2}\left(\frac{1}{R}-\frac{2}{3l}\right)+O\left(\frac{1}{l^3}\right)+O\left(\frac{1}{R^2(R-l)}\right)\right),$$

где
$$f(R,l)=\frac{\log l-\log(R-l)}{R}-\frac{\log R-\log(R-l)}{l}.$$
С помощью (11), (12), (17) и асимптотик
$$\sum_{l\in(\frac{2R}{3},R-1]}\frac{1}{l^3}\ll\frac{1}{R^2},\quad\sum_{l\in(\frac{2R}{3},R-1]}\frac{1}{R^2(R-l)}\ll\frac{\log R}{R^2},$$
приходим к соотношению
$$S(R)=\sum_{l\in(\frac{2R}{3},R-1]}f(R,l)+\frac{\rho(2R/3)}{2R/3}\left(\frac{2}{3}\log 2-\log 3\right)+$$
$$+\log\left(\frac{3}{2}\right)\log 3-\frac{\log 2}{3}-\frac{\log(3/2)}{R}+\frac{\rho(R)}{R}\log\left(\frac{3}{2}\right)+\sum_{l\in(\frac{2R}{3},R-1]}\frac{\rho(l/2)}{l/2}\left(\frac{1}{R}-\frac{2}{3l}\right)+O\left(\frac{\log R}{R^2}\right).$$
Так как $\int_{R-1}^{R}f(R,t)dt\ll O(\frac{\log R}{R^2})$, то из леммы 3 и из (17) следует
$$\sum_{l\in(\frac{2R}{3},R-1]}f(R,l)+\frac{\rho(2R/3)}{2R/3}\left(\frac{2}{3}\log 2-\log 3\right)=\int_{\frac{2R}{3}}^{R}f(R,t)dt+O\left(\frac{\log R}{R^2}\right),$$
при этом
$$\int_{\frac{2R}{3}}^{R}f(R,t)dt=\frac{2}{3}\log\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3}\log 3+\frac{1}{2}\log^2\left(\frac{3}{2}\right)-Li_2(1)+Li_2\left(\frac{2}{3}\right).$$
С учетом выведенных соотношений и (16), (18) получаем утверждение леммы.

$\square$

Лемма 8. *Для любого положительного вещественного числа R определим сумму $H_2(R)$ равенством*
$$H_2(R)=\sum_{l\le R}\sum_{\substack{k\in(\frac{l}{2},l]\\ l+k\alpha(\frac{k}{l})<R}}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{l+k\alpha(\frac{k}{l})}-\max\left(\frac{1}{R},\frac{1}{k+l}\right)\right),$$
Тогда при $R\to\infty$
$$H_2(R)=\left(\log 2-\frac{\log 3}{2}\right)\cdot\log R+C_2+\frac{1}{2R}\log\left(\frac{3}{2}\right)+O\left(\frac{\log R}{R^2}\right),$$
где
$$C_2=\Psi_2+\gamma\left(\log 2-\frac{\log 3}{2}\right)+\frac{3\log^2 3}{8}-\frac{5\log^2 2}{4}-\frac{Li_2(\frac{3}{4})}{2}+\frac{Li_2(\frac{1}{2})}{2}+\frac{\log 3}{2}-\log 2+\frac{\log 2\log 3}{2},$$
ряд Ψ_2 определен в формулировке леммы 6.

Доказательство. Если через Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 обозначить области

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y \in (0, R/3], x \in [y, 2y)\},$$

$$\Omega_2\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y \in (R/3, R/2], x \in [y, R-y]\},$$

$$\Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y \in (R/3, R/2], x \in (R-y, 2y)\},$$

$$\Omega_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y \in (R/2, R/\sqrt{3}], x + y\alpha(y/x) < R\},$$

то

$$H_2(R) = S_1(R) - S_2(R), \tag{19}$$

$$S_1(R) = \sum_{(l,k)\in\Omega_1\cup\Omega_2} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{l + k\alpha(\frac{k}{l})} - \frac{1}{k+l}\right),$$

$$S_2(R) = \sum_{(l,k)\in\Omega_3\cup\Omega_4} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{l + k\alpha(\frac{k}{l})}\right).$$

Оценивая $S_1(R)$, воспользуемся определением функции $\alpha(x)$. Положим

$$F(t,k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t-k}{t^2 - tk + k^2} - \frac{1}{t+k}.$$

Тогда

$$S_1(R) = \sum_{k \le \frac{R}{3}} \frac{1}{k} \sum_{k \le l < 2k} F(l,k) + \sum_{k \in (\frac{R}{3}, \frac{R}{2}]} \frac{1}{k} \sum_{l \in [k, R-k]} F(l,k).$$

Дважды применим в каждом слагаемом формулу Эйлера-Маклорена и соотношения (12), (15). Равенство примет вид

$$S_1(R) = \left(\log 2 - \frac{\log 3}{2}\right)\log R + c_1 + \frac{1}{4R} + \frac{\rho(R)}{R}\left(\log 2 - \frac{\log 3}{2}\right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

где

$$c_1 = \Psi_2 + \gamma\left(\log 2 - \frac{\log 3}{2}\right) + \frac{\log^2 3}{2} - \log^2 2 + \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1/2} \frac{\log(1 - 3x + 3x^2)}{x} dx.$$

Теперь получим асимптотическую формулу для $S_2(R)$. Мы имеем

$$S_2(R) = \sum_{k \in (\frac{R}{3}, \frac{R}{2}]} \frac{1}{k} \sum_{l \in (R-k, 2k)} F(l,k) + \sum_{k \in (\frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{3}}]} \frac{1}{k} \sum_{l \in (l_1, l_2)} F(l,k),$$

где

$$F(t,k) = \frac{1}{R} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t-k}{t^2 - tk + k^2},$$

$$l_1 = \frac{k + R - \sqrt{R^2 - 3k^2}}{2},\ l_2 = \frac{k + R + \sqrt{R^2 - 3k^2}}{2}.$$

В этом случае рассуждения почти такие же. Окончательный результат имеет вид

$$S_2(R) = c_2 + \frac{\rho(R)}{R}\left(\log 2 - \frac{\log 3}{2}\right) + O\left(\frac{\log R}{R^2}\right),$$

$$c_2 = \frac{Li_2(\frac{3}{4})}{2} - \frac{Li_2(\frac{1}{2})}{2} + \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1/2} \frac{\log(1-3x+3x^2)}{x}dx + \log 2 - \frac{\log 3}{2} - \frac{\log 2 \log 3}{2} + \frac{\log^2 3}{8} + \frac{\log^2 2}{4}.$$

Завершая доказательство, подставим полученные асимптотические формулы для величин $S_1(R)$, $S_2(R)$ в (19). $\square$

§4. Доказательство основного результата

Пусть R — вещественное положительное число. Обозначим через $N(R)$ — множество четверок, состоящих из натуральных чисел:

$$N(R) = \left\{ (k,l,m,n) \in \mathbf{N}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} km + ln \le R, \\ 1 \le m \le n, \\ 1 \le k \le l\beta(m/n) \end{array} \right\}. \tag{20}$$

Лемма 9. *Для полуцелого числа $U \le R$ определим множество $N_1(R,U)$ как множество элементов (k,l,m,n) из $N(R)$ с условием $n \le U$. Имеет место оценка*

$$\#N_1(R,U) = \frac{\log 3}{4}R^2 \log U + \frac{R^2}{4}(\Psi_3 + \gamma \log 3) - \frac{RU}{2} + O\left(R\log^2 R + U^2 \log^2 R + \frac{R^2}{U^2}\right),$$

где ряд Ψ_3 определен в формулировке леммы 6.

Доказательство. Условия

$$km + ln \le R,\ 1 \le m \le n,\ 1 \le k \le l\beta\left(\frac{m}{n}\right),\ n \le U$$

эквивалентны условиям

$$1 \le n \le U,\ 1 \le m \le n,\ 1 \le l \le \frac{R}{n},\ 1 \le k \le l\beta\left(\frac{m}{n}\right),\ km + ln \le R,$$

поэтому

$$\#N_1(R,U) = \sum_{n \le U} \sum_{m \le n} \sum_{l \le \frac{R}{n}} \sum_{k \le l\beta(\frac{m}{n})} [km + ln \le R].$$

Изменяя порядок суммирования в правой части равенства, получим

$$\#N_1(R,U) = \sum_{d \le U} N^*\left(\frac{R}{d}, \frac{U}{d}\right), \tag{21}$$

где

$$N^*(R,U)=\sum_{n\le U}\ \sideset{}{^*}\sum_{m\le n} N(R,U;n,m), \qquad (22)$$

$N(R,U;n,m)$ — число целых точек (l,k), лежащих в треугольнике

$$\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x\in\left(0,\frac{R}{n}\right], y\in(0,F(x)]\right\},\ F(x)=\min\left(x\beta\left(\frac{m}{n}\right),\frac{R-xn}{m}\right).$$

Поэтому

$$N(R,U;n,m)=\sum_{l\le\frac{R}{n}}F(l)-\sum_{l\le\frac{R}{n}}\{F(l)\}.$$

Применим к первой сумме формулу суммирования Эйлера-Маклорена, а ко второй сумме — лемму 4, поскольку функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,R/n]$, за исключением одной точки. Для этого разобьем интервалы суммирования на два интервала, в каждом из которых функция $F(x)$ линейна. Затем на каждом интервале воспользуемся леммой 3 и леммой 4. В результате с учетом условия НОД$(m,n)=1$ последнее равенство принимает вид

$$N(R,U;n,m)=\frac{R^2\beta(\frac{m}{n})}{2n(n+m\beta(\frac{m}{n}))}-\frac{R}{2n}+O\left(\frac{n}{m}\right)+O\left(\frac{R}{n^2}\right)+O\left(s_1\left(\beta\left(\frac{m}{n}\right)\right)\right)+O\left(s_1\left(\frac{m}{n}\right)\right).$$

Учитывая лемму 5 и оценки $\sum_{n\le U}\sum_{m\le n}\frac{n}{m}\ll U^2\log R,\ \sum_{n\le U}\sum_{m\le n}\frac{1}{n^2}\ll\log R$, получаем представление для величины $N^*(R,U)$ из (22):

$$N^*(R,U)=\sum_{n\le U}\ \sideset{}{^*}\sum_{m\le n}\left(\frac{R^2\beta(\frac{m}{n})}{2n(n+m\beta(\frac{m}{n}))}-\frac{R}{2n}\right)+O(U^2\log^2 R)+O(R\log R).$$

Асимптотическая формула для величины $\#N_1(R,U)$ следует из соотношения (21) с помощью (12), (13),

$$\sum_{d\le U}\sum_{n\le\frac{U}{d}}\ \sideset{}{^*}\sum_{m\le n}\frac{(R/d)^2\beta(\frac{m}{n})}{2n(n+m\beta(\frac{m}{n}))}=\frac{R^2}{2}\sum_{n\le U}\frac{1}{n^2}\sum_{m\le n}\frac{\beta(\frac{m}{n})}{1+\frac{m}{n}\beta(\frac{m}{n})}=$$

$$=\frac{\log 3}{4}R^2\log U+\frac{R^2}{4}(\Psi_3+\gamma\log 3)+O\left(\frac{R^2}{U^2}\right),$$

$$\sum_{d\le U}\sum_{n\le\frac{U}{d}}\ \sideset{}{^*}\sum_{m\le n}\frac{R/d}{2n}=\frac{RU}{2}+O(R),$$

и оценок $\sum_{d\le U}\frac{\log^2(\frac{R}{d})}{d^2}\ll\log^2 R,\ \sum_{d\le U}\frac{\log(\frac{R}{d})}{d}\ll\log^2 R$. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Для полуцелого числа $U \le R$ определим множество $N_2(R,U)$ как множество элементов (k,l,m,n) из $N(R)$ с условием $n > U$. Имеет место оценка*

$$\#N_2(R,U) = \frac{\log 3}{4} R^2 \log\left(\frac{R}{U}\right) + C_3 \cdot R^2 + \frac{RU}{2} + O\left(R\log^2 R + \frac{R^2}{U^2}\log^2 R + U^2 \log^2 R\right),$$

где

$$C_3 = \frac{1}{2}\left(\Psi_1 + \Psi_2 + \frac{\gamma \log 3}{2} + Li_2(1) - Li_2\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{Li_2(\frac{3}{4})}{2} + \frac{Li_2(\frac{1}{2})}{2}\right) -$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{3\log 3}{2} - \frac{9\log^2 3}{4} - \frac{7\log^2 2}{2} + 5\log 3 \log 2\right),$$

ряды Ψ_1, Ψ_2 определены в формулировке леммы 6.

Доказательство. При доказательстве воспользуемся функцией $t(x)$, определяемой равенством

$$t(x) = \max(0, \alpha(x)). \tag{23}$$

Комбинируя ограничения на элементы из множества $N_2(R,U)$ и учитывая, что число четверок $(k,l,m,n) \in N_2(R,U)$ с условием $m = nt(k/l)$ равно $O(R\log^2 R)$, получаем

$$\#N_2(R,U) = \sum_{l<\frac{R}{U}} \sum_{k \le l} \sum_{U<n\le \frac{R}{l}} \sum_{nt(\frac{k}{l})<m\le n} [km + ln \le R] + O(R\log^2 R).$$

Изменим порядок суммирования в правой части равенства. Тогда

$$\#N_2(R,U) = \sum_{d<\frac{R}{U}} N^*\left(\frac{R}{d}, U\right) + O(R\log^2 R) \tag{24}$$

и

$$N^*(R,U) = \sum_{l\le \frac{R}{U}} \sideset{}{^*}\sum_{k\le l} N(R,U;l,k), \tag{25}$$

$N(R,U;l,k)$ — число целых точек (n,m), лежащих в области

$$\Omega = \left\{(x,y) \in R^2 \middle| \, x \in \left(U, \frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}\right], y \in \left(xt\left(\frac{k}{l}\right), F(x)\right]\right\}, \tag{26}$$

$$F(x) = \min\left(x, \frac{R - xl}{k}\right).$$

Поэтому

$$N(R,U;l,k) = \sum_{U<n\le \frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}} \left(F(n) - nt\left(\frac{k}{l}\right)\right) - \sum_{U<n\le \frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}} \{F(n)\} + \sum_{U<n\le \frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}} \left\{nt\left(\frac{k}{l}\right)\right\}.$$

Применяя к двум последним суммам лемму 4, перепишем полученное соотношение в виде

$$N(R,U;l,k)=\sum_{U<n\le\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}\Bigl(F(n)-nt\Bigl(\frac{k}{l}\Bigr)\Bigr)-\frac{1}{2}\Bigl(\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}-\frac{R}{l+k}\Bigr)\Bigl[U\le\frac{R}{l+k}\Bigr]-$$

$$-\frac{1}{2}\Bigl(\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}-U\Bigr)\Bigl[\frac{R}{l+k}<U\le\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}\Bigr]+\frac{1}{2}\Bigl(\frac{R}{l+k\alpha(\frac{k}{l})}-U\Bigr)\Bigl[\frac{l}{2}<k\le l\Bigr]\Bigl[U\le\frac{R}{l+k\alpha(\frac{k}{l})}\Bigr]+$$

$$+O\Bigl(s_1\Bigl(\alpha\Bigl(\frac{k}{l}\Bigr)\Bigr)\Bigl[k>\frac{l}{2}\Bigr]\Bigr)+O\Bigl(s_1\Bigl(\frac{k}{l}\Bigr)\Bigr)+O\Bigl(\frac{R}{l^2}\Bigr).$$

Подставим это равенство в (25), учитывая оценку $\sum_{l\le\frac{R}{U}}\sum_{k\le l}\frac{1}{l^2}\ll\log R$ и лемму 5, затем воспользуемся (24). Таким образом получаем

$$\#N_2(R,U)=\sum_{d<\frac{R}{U}}\sum_{l\le\frac{R/d}{U}}\sum_{k\le l}{}^{*}\sum_{U<n\le\frac{R/d}{l+kt(\frac{k}{l})}}\Bigl(F(n)-nt\Bigl(\frac{k}{l}\Bigr)\Bigr)+O\Bigl(R\log^2 R+\frac{R^2}{U^2}\log^2 R\Bigr), \tag{27}$$

поскольку $\sum_{d\le\frac{R}{U}}\sum_{l\le\frac{R}{dU}}\sum_{k\le l}\frac{1}{dl^2}\ll\log^2 R$, $\sum_{d\le\frac{R}{U}}\sum_{l\le\frac{R}{dU}}l\log^2 l\ll\frac{R^2}{U^2}\log^2 R$ и

$$\sum_{d<\frac{R}{U}}\sum_{l\le\frac{R/d}{U}}\sum_{k\le l}{}^{*}\Bigl(\frac{R/d}{l+kt(\frac{k}{l})}-\frac{R/d}{l+k}\Bigr)\Bigl[U\le\frac{R/d}{l+k}\Bigr]+$$

$$+\sum_{d<\frac{R}{U}}\sum_{l\le\frac{R/d}{U}}\sum_{k\le l}{}^{*}\Bigl(\frac{R/d}{l+kt(\frac{k}{l})}-U\Bigr)\Bigl[\frac{R/d}{l+k}<U\le\frac{R/d}{l+kt(\frac{k}{l})}\Bigr]-$$

$$-\sum_{d<\frac{R}{U}}\sum_{l\le\frac{R/d}{U}}\sum_{k\le l}{}^{*}\Bigl(\frac{R/d}{l+k\alpha(\frac{k}{l})}-U\Bigr)\Bigl[\frac{l}{2}<k\le l\Bigr]\Bigl[U\le\frac{R/d}{l+k\alpha(\frac{k}{l})}\Bigr]\ll R\log R.$$

Последняя оценка следует из леммы 3.

Учитывая, что ошибка при замене суммы $\sum_{U<n\le\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}$ интегралом $\int_U^{\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}$ равна $O(\frac{l}{k})$ и $\sum_{l\le R/U}\sum_{k\le l}l/k\ll\frac{R^2}{U^2}\log R$, запишем главный член в (27) (обозначим его через $S(R,U)$) в виде

$$S(R,U)=\sum_{l\le\frac{R}{U}}\sum_{k\le l}\int_U^{\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}\Bigl(F(x)-xt\Bigl(\frac{k}{l}\Bigr)\Bigr)dx\Bigl[U<\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}\Bigr]+O\Bigl(\frac{R^2}{U^2}\log R\Bigr).$$

Так как в полученном выражении интеграл — площадь области Ω, определяемой соотношением (26), то

$$\int_U^{\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}\Bigl(F(x)-xt\Bigl(\frac{k}{l}\Bigr)\Bigr)dx=\int_U^R dx\int_{xt(\frac{k}{l})}^{x}[lx+ky\le R]dy.$$

В правой части равенства заменим y на $lx+ky$, поменяем порядок интегрирования, после заменим y на y/U. Проделав это, получим

$$\int_U^{\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}} \left(F(x) - xt\left(\frac{k}{l}\right)\right)dx = \frac{U^2}{k}\int_{\frac{1}{U}}^{\frac{R}{U}} y\left(\frac{1}{l+kt(\frac{k}{l})} - \max\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{k+l}\right)\right)\left[l+kt\left(\frac{k}{l}\right) < y\right]dy.$$

Так что

$$S(R,U) = U^2\int_{\frac{1}{U}}^{\frac{R}{U}} yH(R,U,y)dy + O\left(\frac{R^2}{U^2}\log R\right),$$

где

$$H(R,U,y) = \sum_{l\le\frac{R}{U}} \sum_{\substack{k\le l\\ l+kt(\frac{k}{l})<y}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{l+kt(\frac{k}{l})} - \max\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{k+l}\right)\right).$$

Учитывая (23) и условие $y < R/U$, представим сумму $H(R,U,y)$ в виде $H(R,U,y) = H_1(y) + H_2(y)$, где величины $H_1(y)$ и $H_2(y)$ определены в лемме 7 и лемме 8. Воспользуемся результатами этих лемм. В итоге для $S(R,U)$ получаем

$$S(R,U) = \frac{\log 3}{4}\cdot R^2\log\left(\frac{R}{U}\right) + C_3\cdot R^2 + \frac{RU}{2} + O(U^2\log^2 R) + O\left(\frac{R^2}{U^2}\log R\right).$$

Заменив в (27) главный член полученным выражением, получаем утверждение леммы. □

Теперь можно доказать теорему.

Доказательство. С одной стороны, получим асимптотическую формулу для числа элементов во множестве $N(R)$ (20). Для этого в леммах 9 и 10 возьмем $U = [\sqrt{R}] + 1/2$. Тогда

$$\#N(R) = \frac{\log 3}{4}R^2\log R + \frac{R^2}{4}\cdot(\Psi_3 + \gamma\cdot\log 3 + 4\cdot C_3) + O(R\log^2 R),$$

где константа C_3 задана в лемме 10, а ряд Ψ_3 определен в формулировке леммы 6.

С другой стороны, применяя лемму 2 к величине

$$S(R) = \sum_{d\le R}\sum_{c=1}^{d} \nu\left(\frac{c}{d}\right),$$

получаем

$$S(R) = 2\sum_{n\le R}\sum_{m\le\frac{R}{n}} \#T^*(m) + \frac{R^2}{4} + O(R),$$

при этом из определения 5 и очевидных свойств функции Мебиуса легко выводится, что

$$\sum_{n\le R}\sum_{m\le \frac{R}{n}} \#T^*(m) = \sum_{n\le R}\mu(n)\cdot \#N\left(\frac{R}{n}\right).$$

С учетом равенств

$$\sum_{n\le R}\frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$\sum_{n\le R}\frac{\mu(n)\log n}{n^2} = \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log R}{R}\right),$$

вытекающих из теоремы умножения абсолютно сходящихся рядов Дирихле, получим асимптотическую формулу для величины $S(R)$:

$$S(R) = \frac{\log 3}{2\zeta(2)}R^2\log R + \frac{C_e}{2}\cdot R^2 + O(R\log^3 R).$$

Справедливость теоремы вытекает из леммы 6, равенств $Li_2(1) = \zeta(2)$, $Li_2(\frac{1}{2}) = \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\log^2 2}{2}$ и соотношения

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)}\cdot S(R).$$

$\square$

Список литературы

[1] Hermite CH. Sur L'introduction des variables continues dans la theorie des nombres. — Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1851, Bd. 41.

[2] H. Minkowski *Zur Theorie der Kettenbruche.* Annales de l'Ecole Normale Superieure, 1894, V.13, №3, Стр. 41-60.

[3] H. Heilbronn *On the average length of a class of finite continued fractions.* Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin, VEB, 1968, 87-96.

[4] Tonkov T. *On the average length of finite continued fractions.* — in Acta Arith., 26 (1974), 47-57.

[5] J.W. Porter *On a theorem of Heilbronn.*Mathematika, 1975, v/ 22, №1.

[6] G.H. Norton *On the asymptotic analysis of the Euclidean algorithm.*J. Symbolic Comput. 10:1 (1990).

[7] Устинов А.В. *О числе решений сравнения* $xy \equiv l(\mod q)$ *под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции.* — Алгебра и анализ, том 20, є 5, стр. 186-216.

[8] О.А. Горкуша, *О конечных цепных дробях специального вида.* Чебышевский сборник 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 80-108.

[9] B. Valée *A unifying framework fot thr analysis of a class of Euclidean algorithms* LATIN 2000: Theoretical informatics (Punta del Esta, Uruguay,2000), Lecture Notes in Comput, Sci., 1776, Springer-Verlag, Berlin, 343-354.

[10] A.V. Ustinov *Asymptotic behaviour of the first and second moments for the number of steps in the Euclidean algorithm* . Russian Math. Surveys, 72:5 (2008), 1023-1025.

[11] Касселс Дж. В.С. *Введение в геометрию чисел.* — М.:Мир, 1965, стр. 113.

[12] Klein F. *Ueber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwicklung* — Nachr. Ges. Wiss. Gottingen. Mathem.-Phys.Kl. 1895. 3. P. 357-359.

[13] Klein F. *Sur une representation geometrique du developpement en fractioncontinue ordinaire* — Nouv. Ann. Math. 1896. V. 15. 3. P. 321-331.

[14] Чанга М.Е. *Метод комплексного интегрирования* — М.:МИАН, 2006. стр. 20-21.

[15] Хинчин А.Я. *Избранные труды по теории чисел.* —М., МЦНМО, 2006. стр 12-19.

[16] Knuth D.E., Yao A.C., *Analysis of the Subtractive Algorithm for Greatest Common Divisors.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA,72: 12(1975),p. 4720-4722

[17] Dixon J.D. *The Number of Steps in the Euclidean Algorithm.* — J. of Number Theory, v. 2, 1970, p. 414-422

[18] Hensley D. *The Number of Steps in the Euclidean Algorithm.* — J. of Number Theory, v. 49, 1994, p. 142-182

[19] Быковский В.А. *Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей.* — ФПМ, т. 11, вып. 6, 2005, 15-26