УДК 511.9

НЕКОТОРЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА $\Omega-$ДРОБЕЙ [1]

О. А. Горкуша (г. Хабаровск)

Аннотация

Мы исследуем эргодические системы, соответствующие $\Omega-$ дробям — классу непрерывных дробей, тесно связанному с геометрической интерпретацией приближений вещественного числа рациональными числами. Обозначим через A_n/B_n, $n=1,2,\ldots,$ — последовательность подходящих дробей непрерывной $\Omega-$ дроби числа $x\in(0,1)$. Мы получим почти для всех иррациональных чисел x распределение последовательности $\{\Upsilon_n\}_{n\geq 1}$, где $\Upsilon_n=\Upsilon_n(x)=B_n|B_nx-A_n|$.

§1. Введение

Любое вещественное число x из $(0,1)$ можно представить в виде конечной (если $x\in\mathbf{Q}$) или бесконечной регулярной непрерывной дроби

$$x=[0;a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots]=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\ddots}}}, \qquad (1)$$

где для всех $n\geq 1$ неполные частные a_n определяются соотношением

$$a_n=a_n(x)=\left[\frac{1}{T^{n-1}(x)}\right],\ \text{если}\ \ T^{n-1}(x)\neq 0.$$

Здесь $T:[0,1)\mapsto[0,1)$ — преобразование Гаусса

$$T(x)=\begin{cases}1/x-[1/x] & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

Естественное обобщение преобразования Гаусса получено в 1977 году в работе [1, Theorem 1].

Пусть $D=([0,1]\setminus\mathbf{Q})\times[0,1]$. Определим отображение $\mathfrak{T}:D\mapsto D:$

$$\mathfrak{T}(x,y)=\begin{cases}\left(T(x),\frac{1}{[1/x]+y}\right), & \text{если } (x,y)\in D \text{ и } x\neq 0;\\ (0,y), & \text{если } x=0.\end{cases} \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, гранты № 11-01-00628-а, № 11-01-12004-офи-м-2011.

Автор работы доказал, что система $(D, \mathfrak{B}_D, \mu, \mathfrak{T})$ с семейством множеств Бореля $\mathfrak{B}_D$ и вероятностной мерой

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \iint_A \frac{dxdy}{(1+xy)^2},\ A \in \mathfrak{B}_D$$

формирует эргодическую систему.

Из этого результата были получены многие арифметические и метрические свойства регулярных непрерывных дробей. Перечислим некоторые из них.

Определим для любого числа x последовательность $\{\Theta_n\}_{n\geq 1}$:

$$\Theta_n = \Theta_n(x) = Q_n^2 \left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right|, \tag{3}$$

где

$$\frac{P_n}{Q_n} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}]$$

— подходящая дробь с номером n регулярной дроби числа x. В дальнейшем элементы Θ_n будем называть коэффициентами аппроксимации, соответствующие регулярной непрерывной дроби.

Впервые предельное распределение последовательности $\{\Theta_n\}_{n\geq 1}$ исследовалось в 20-х годах 20-го столетия. В работе [2] Поль Леви (Paul Levy) показал, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{[0; a_n, a_{n+1}, \ldots] \leq z\} = \frac{1}{(1+z)\log 2}.$$

Здесь и далее $P\{A\}$ означает вероятность события A. Спустя почти двадцать лет в 1940 году Вольфганг Дублин (Wolfgang Doeblin) опубликовал работу [3], в которой, в частности, исследовалось предельное распределение величины $1/\Theta_n(x)$. Автор доказал, что [3, p. 365]

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{\Theta_n(x)} \leq z\right\} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\log 2}\frac{1}{x}, & \text{если } z > 2; \\ \frac{1-z}{z\log 2} + \frac{\log z}{\log 2}, & \text{если } 1 < z \leq 2. \end{cases}$$

В 1981 году Дональд Кнут (Donald Knuth) в работе [4] опубликовал следующий результат: для $z \in [0,1]$

$$mes\{x \in (0,1) \setminus \mathbf{Q} |\ \Theta_n(x) \leq z\} = F(z) + O(g^n),$$

где $g = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ и

$$F(z) = \begin{cases} \frac{z}{\log z}, & z \in [0, 1/2], \\ \frac{1}{\log 2}(1 - z + \log(2z)), & z \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

В том же году Хендрик Ленстра (Hendrik Lenstra) высказал предположение, о том, что для почти всех x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \#\big\{m \in [1,n] \big|\ \Theta_m(x) < z\big\} = F(z).$$

А в 1983 г. Вэб Босма (Wieb Bosma), Хендрик Джагер (Hendrik Jager), Фрик Вейджик (Freek Wiedijk) в работе [5] доказали это утверждение.

В этой статье мы получили аналогичный результат для $\Omega-$ дробей — одного из классов полурегулярных дробей.

Определение 1. Для вещественного числа x из $(0,1)$ конечная или бесконечная непрерывная дробь

$$x = \cfrac{\varepsilon_1}{b_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{\varepsilon_n}{b_n + \ddots}}} = [0; \varepsilon_1/b_1, \varepsilon_2/b_2, \ldots, \varepsilon_n/b_n, \ldots] \tag{4}$$

называется полурегулярной, если $b_n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ для всех $n \geq 1$.

Подходящие дроби, соответствующие дроби (4), будем обозначать через A_n/B_n :

$$\frac{A_n}{B_n} = [0; \varepsilon_1/b_1, \varepsilon_2/b_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}/b_{n-1}],\ n \geq 1, \tag{5}$$

а коэффициенты аппроксимации, соответствующие дроби (4) — через Υ_n :

$$\Upsilon_n = \Upsilon_n(x) = B_n^2 \left| x - \frac{A_n}{B_n} \right|. \tag{6}$$

§2. Полурегулярные дроби

Прежде чем приступить к исследованию Ω-дробей, остановимся вкратце на описании полурегулярных дробей. Более полное изложение представлено, например, в работе [6].

Рассмотрим операцию на неполных частных — операцию сжатия, которая основана на тождестве

$$k + \frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{l+\xi}} = k + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{l + 1 + \xi},$$

где k, l — натуральные числа, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, ξ — вещественное число.

Определение 2. Пусть (4) — конечная или бесконечная полурегулярная дробь с условием: для некоторого $n \geq 2$

$$b_{n-1} = 1, \varepsilon_n = 1. \tag{7}$$

Преобразование σ_n, которое превращает эту непрерывную дробь в непрерывную дробь

$$\begin{array}{ll} [\varepsilon_1; -\varepsilon_1/(1+b_2), \varepsilon_3/b_3, \ldots] & \text{для } n = 2, \\ [0; \varepsilon_1/b_1, \ldots, \varepsilon_{n-3}/b_{n-3}, \varepsilon_{n-2}/(b_{n-2}+\varepsilon_{n-1}), -\varepsilon_{n-1}/(1+b_n), \varepsilon_{n+1}/b_{n+1}, \ldots] & \text{для } n > 2 \end{array}$$

называется сжатием. В результате мы сжимаем пару $b_{n-1}=1,\varepsilon_n=1$. Если в дроби (4) все элементы ε_i равны 1, то мы будем говорить, что сжат элемент $b_{n-1}=1$.

Заметим, что нельзя одновременно сжать две последовательные пары, поскольку при условиях, что сжата пара $b_{n-1}=1,\varepsilon_n=1$ и выполняется равенство $\varepsilon_{n-1}=1$, оба неполных частных b_{n-2} и b_n увеличиваются на единицу.

Определение 3. Процесс сжатия состоит из множества непрерывных дробей и закона, по которому единственным образом сжимаются пары $b_{n-1}=1,\varepsilon_n=1$ из каждой непрерывной дроби множества.

Для вещественного числа x, представленного в виде дроби (4), будем рассматривать последовательность $\{t_n(x),v_n(x)\}_{n\geq 1}$, где величины $t_n=t_n(x)$ и $v_n=v_n(x)$ определяются формулами

$$t_n=[0;\varepsilon_n/b_n,\varepsilon_{n+1}/b_{n+1},\ldots],v_n=B_{n-1}/B_n,\ n\geq 1;\ v_0=0. \tag{8}$$

Последовательность таких пар, полученную для регулярной непрерывной дроби, будем обозначать через $\{T_n(x),V_n(x)\}_{n\geq 1}$:

$$T_n=[0;a_n,a_{n+1},\ldots],\ V_n=Q_{n-1}/Q_n, \tag{9}$$

при этом хорошо известно тождество для $n\geq 1$:

$$\mathfrak{T}^n(x,0)=(T_{n+1},V_{n+1}), \tag{10}$$

где отображение $\mathfrak{T}$ задается формулой (2).

Определение 4. Пусть (4) — полурегулярная дробь, полученная из регулярной дроби (1) в результате процесса сжатия. Область $S\subseteq[0,1]\times[0,1]$ называется областью сжатия, если неполное частное $a_n=1$ сжато тогда и только тогда, когда $(T_n,V_n)\in S$.

Из определения и соотношения (9) следует, что

$$S\subseteq(1/2,1]\times[0,1].$$

Легко показать, что в результате применения преобразования σ_n к дроби (4) с ограничением (7), из последовательности подходящих дробей $\{A_k/B_k\}_{k\geq 1}$, соответствующих дроби (4), удалена дробь A_{n-1}/B_{n-1}. Таким образом, можно сделать вывод, что последовательность подходящих дробей полурегулярной дроби числа x, полученной в результате процесса сжатия, образует подпоследовательность подходящих дробей регулярной непрерывной дроби числа x. Если мы определим последовательность индексов $n(k)$ для $k\geq 1$ по правилу: $A_k/B_k=P_{n(k)}/Q_{n(k)}$, то $n(0)=0$ и

$$n(k+1)=\begin{cases} n(k)+1 & \Leftrightarrow\quad \varepsilon_{k+1}=1\\ n(k)+2 & \Leftrightarrow\quad \varepsilon_{k+1}=-1.\end{cases} \tag{11}$$

Зависимость элементов последовательностей $\{t_n(x), v_n(x)\}_{n\geq 1}$ и $\{T_n(x), V_n(x)\}_{n\geq 1}$ отражена в следующем утверждении.

Лемма 1. *Пусть $x \in (0,1)$ — вещественное число и (1) — регулярная дробь этого числа, (4) — полурегулярная дробь, полученная из регулярной дроби в результате процесса сжатия. Тогда для всех $k \geq 1$*

$$(t_k(x), v_k(x)) = \begin{cases} (T_{n(k)}, V_{n(k)}), & \text{если } \varepsilon_k = 1, \\ (-T_{n(k)-1}T_{n(k)}, 1 - V_{n(k)}), & \text{если } \varepsilon_k = -1. \end{cases}$$

Доказательство. Для фиксированного индекса $k \geq 1$ положим $n = n(k)$ и рассмотрим два случая: $\varepsilon_k = 1$ и $\varepsilon_k = -1$.

Пусть $\varepsilon_k = 1$. Из (11) следует, что подходящие дроби P_{n-1}/Q_{n-1} и P_n/Q_n регулярной непрерывной дроби есть подходящие дроби A_{k-1}/B_{k-1} и A_k/B_k полурегулярной дроби. Из замечания к определению 4 и из определения 2 следует, что неполные частные a_{n-1} и a_n не сжимаются. Поэтому $V_n = v_k, T_n = t_k$.

В случае $\varepsilon_k = -1$, рассуждая таким же образом, получаем, что подходящая дробь P_{n-1}/Q_{n-1} регулярной непрерывной дроби не входит в последовательность подходящих дробей полурегулярной дроби. Поэтому неполное частное $a_{n-1} = 1$ сжато. Следуя определению 2 находим

$$t_k = \left[0; \frac{-1}{a_n + 1}, a_{n+1}, \ldots\right] = -T_{n-1}T_n,$$

и учитывая соотношения

$$Q_n = a_{n-1}Q_{n-1} + Q_{n-2} \;\text{ для } n \geq 2,$$

$Q_0 = 0, Q_1 = 1$ для знаменателей подходящих дробей регулярной непрерывной дроби, получаем

$$v_k = \frac{B_{k-1}}{B_k} = \frac{Q_{n-2}}{Q_n} = \frac{Q_n - Q_{n-1}}{Q_n} = 1 - V_n.$$

Лемма доказана. □

Дальше нам понадобится лемма, связывающая область сжатия и подходящие дроби полурегулярной дроби, соответствующей заданной области сжатия.

Лемма 2. *Для заданного множества S из $((1/2, 1] \times [0,1]) \cap D$ определим множества Δ, Δ^-, Δ^+ соотношениями*

$$\Delta = D \setminus S, \; \Delta^- = \mathfrak{T}S, \; \Delta^+ = \Delta \setminus \Delta^-,$$

где оператор $\mathfrak{T}$ задается (2). Пусть (4) — полурегулярная дробь вещественного числа $x \in (0,1)$, полученная из регулярной дроби (1) в результате процесса сжатия. Тогда последовательность $\{A_n/B_n\}_{n\geq 1}$ подходящих дробей, соответствующих полурегулярной дроби и последовательность регулярных подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}_{n\geq 1}$ связаны следующим образом:

1. $(T_n, V_n) \in S \Leftrightarrow P_n/Q_n \notin \{A_k/B_k\}_{k\geq 1}$;
2. $P_n/Q_n \notin \{A_k/B_k\}_{k\geq 1} \Rightarrow P_{n-1}/Q_{n-1}, P_{n+1}/Q_{n+1} \in \{A_k/B_k\}_{k\geq 1}$;
3. $(T_n, V_n) \in \Delta^+ \Leftrightarrow P_{n-1}/Q_{n-1}, P_n/Q_n \in \{A_k/B_k\}_{k\geq 1}$;
4. $(T_n, V_n) \in \Delta^- \Leftrightarrow P_{n-1}/Q_{n-1} \notin \{A_k/B_k\}_{k\geq 1}$.

Доказательство. Исходя из определений и (10) отметим, что

$$S \subseteq (1/2, 1] \times [0, 1], \Delta^- \subseteq [0, 1] \times (1/2, 1],\ \Delta^- \cap S = \emptyset.$$

Первое и второе утверждения вытекают из определений 2, 4 и замечаний после этих определений. Утверждения 3 и 4 — результат уже доказанного предложения 1 рассматриваемой леммы и свойств множеств $S, \Delta,\ \Delta^-,\ \Delta^+$. Лемма доказана.

□

Теперь мы можем описать алгоритм нахождения полурегулярной дроби для заданной области сжатия S.

Пусть x — иррациональное число из $(0, 1)$. Положим

$$\varepsilon_1 = 1,\ A_0 = 1, B_0 = 0,\ A_1 = 0, B_1 = 1,\ v_1 = 0. \tag{12}$$

Предположим, что для некоторого $k \geq 1$ найдены величины $\varepsilon_i, b_{i-1}, A_i, B_i, v_i, t_i$ для всех $i \leq k$.

Так как $|t_k| = (b_k + t_{k+1})^{-1}$, то

$$b_k = \begin{cases} 1 + [|1/t_k|]\,, & \text{если } \varepsilon_{k+1} = -1, \\ [|1/t_k|]\,, & \text{если } \varepsilon_{k+1} = 1. \end{cases}$$

Условие $\varepsilon_{k+1} = -1$ эквивалентно условию $(T_{n+1}, V_{n+1}) \in S$, где $n = n(k)$, при этом

$$T_{n+1} = \left|\frac{1}{t_k}\right| - \left[\left|\frac{1}{t_k}\right|\right], V_{n+1} = \left(\left[\left|\frac{1}{t_k}\right|\right] + \varepsilon_k v_k\right)^{-1}.$$

Таким образом,

$$b_k = \begin{cases} 1 + [|1/t_k|]\,, & \text{если } \left(\left|\frac{1}{t_k}\right| - \left[\left|\frac{1}{t_k}\right|\right], \left(\left[\left|\frac{1}{t_k}\right|\right] + \varepsilon_k v_k\right)^{-1}\right) \in S, \\ [|1/t_k|]\,, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{13}$$

$$t_{k+1} = \left|\frac{1}{t_k}\right| - b_k,\ \varepsilon_{k+1} = sign(t_{k+1}), \tag{14}$$

$$A_{k+1} = b_k A_k + \varepsilon_k A_{k-1}, \tag{15}$$

$$B_{k+1} = b_k B_k + \varepsilon_k B_{k-1}, \tag{16}$$

$$v_{k+1} = \frac{B_k}{B_{k+1}}. \tag{17}$$

Из полученных рекуррентных соотношений и из (6) следуют равенства

$$A_{k+1} \cdot B_k - B_{k+1} \cdot A_k = (-1)^{k+1} \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_k, \tag{18}$$

$$\Upsilon_k = \frac{v_{k+1}}{1 + t_{k+1} v_{k+1}},\ \Upsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon_{k+1} t_{k+1}}{1 + t_{k+1} v_{k+1}}. \tag{19}$$

§3. Ω-дроби

Пусть x — вещественное число из интервала $(0, 1/2)$. Рассмотрим решетку на плоскости

$$\Gamma_x = \{(n - x \cdot m, m) | n, m \in \mathbf{Z}\}.$$

Определение 5. Назовем ненулевой узел $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ решетки Γ_x локальным минимумом, если не существует ненулевого узла решетки $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ $(\eta \neq \pm\gamma)$, для которого $|\eta_1| \leq |\gamma_1|$ и $|\eta_2| \leq |\gamma_2|$.

Множество локальных минимумов будем обозначать через $\mathfrak{M}(\Gamma_x)$. Из теоремы Лагранжа о наилучших приближениях вещественного числа x следует, что

$$\mathfrak{M}(\Gamma_x) = \{\pm\gamma^{(n)} = (P_n - xQ_n, Q_n) |\ n \geq 0\}. \tag{20}$$

Обобщим эту конструкцию. Пусть Ω — выпуклая, ограниченная и замкнутая область на плоскости с кусочно-гладкой границей, которая содержит некоторую окрестность точки $(0, 0)$ и симметрична относительно координатных осей. Всюду в статье будем считать, что область Ω обладает такими свойствами. Рассмотрим афинное преобразование

$$(x_1, x_2) \mapsto (t_1 x_1, t_2 x_2) = \varsigma(x_1, x_2)$$

с положительными вещественными числами t_1 и t_2. Обозначим через $\varsigma(\Omega)$ множество точек $\varsigma(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Определение 6. Ненулевой узел γ решетки Γ_x назовем Ω-минимумом, если для некоторого преобразования ς внутри области $\varsigma(\Omega)$ нет ненулевых узлов из Γ_x.

Множество таких минимумов будем обозначать через $\mathfrak{M}(\Gamma_x; \Omega)$. Впервые такая конструкция была предложена Эрмитом [7] в случае круга

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Позднее Минковский [8] рассмотрел более общую ситуацию с областью

$$\Omega = \Omega_\theta = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 | |x_1|^\theta + |x_2|^\theta \leq 1\},\ \theta \geq 1.$$

Минимумы, связанные с такими областями, будем обозначать через $\mathfrak{M}_\theta(\Gamma_x)$. Из определений следуют вложения [9, §2, свойство 4].

$$\mathfrak{M}_1(\Gamma_x) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma_x;\Omega) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma_x). \tag{21}$$

Определим последовательности целых неотрицательных чисел $\{A_k\}_{k\geq 0}$ и $\{B_k\}_{k\geq 0}$ с условием $B_k < B_{k+1}$ и точек $\{M^{(k)}\}_{k\geq 0}$ решетки Γ_x следующим образом

$$\mathfrak{M}(\Gamma_x;\Omega) = \{\pm M^{(k)} | M^{(k)} = (A_k - xB_k, B_k),\ k \geq 0\}. \tag{22}$$

Определение 7. Для вещественного числа x из $(0, 1/2]$ дробь (4) назовем Ω-дробью числа x, если последовательности подходящих дробей $\{A_k/B_k\}_{k\geq 1}$ удовлетворяют соотношению (22).

Для вещественного числа x из $(1/2, 1)$ дробь (4) назовем Ω-дробью, если

$$[0; 1/(b_2+1), \varepsilon_3/b_3, \ldots]$$

— Ω-дробь числа $1-x$.

Напомним, что $\Omega-$дроби, соответствующие областям Ω_1 и Ω_2, называются соответственно диагональными и эллиптическими дробями Минковского.

В работе [9] доказаны основные свойства Ω-дробей, из которых следует, что Ω-дробь получена из регулярной дроби в результате процесса сжатия относительно заданной области и описана область Δ ([9, Лемма 2]). Исходя из этого мы можем определить области S и Δ^-.

Лемма 3. *Пусть функция $\Psi(x_1, x_2) = 0$ описывает границу области Ω и не существует преобразования ς, для которого бы выполнялось равенство*

$$\varsigma(\Omega) = \{(x_1, x_2) |\ |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}.$$

*О*бозначим через $(2a_0, 0)$, (a_0, b_0), (b_0, a_0), $(0, 2a_0)$ точки с условием

$$\Psi(2a_0, 0) = \Psi(a_0, b_0) = \Psi(b_0, a_0) = \Psi(0, 2a_0) = 0.$$

*Д*ля всех α из $[0, 1]$ будем рассматривать функцию $\beta_\Omega = \beta(\alpha)$ со свойствами

$$\begin{array}{lll} \Psi(u,v) = 0, & & \text{для}\ \ a_0 \leq u \leq b_0; \\ \Psi(s,t) = 0, & u = s\cdot\beta,\ t = v\cdot\alpha & \text{для}\ \ b_0 \leq s \leq 2a_0; \\ \Psi(x,y) = 0, & x = s-u,\ y = t+v & \text{для}\ \ 0 \leq x \leq a_0. \end{array}$$

*О*пределим области $S(\Omega)$ и $\Delta^-(\Omega)$ соотношениями

$$S(\Omega) = \{(T, V) \in D\ |T \in [1/2, 1],\ V \in [0, \alpha(T)]\},$$

$$\Delta^-(\Omega) = \{(T, V) \in D|\ T \in [0, 1],\ V \in [\beta(T), 1]\},$$

где $\alpha_\Omega = \alpha(\beta)$ — функция, обратная к $\beta_\Omega = \beta(\alpha)$. Тогда $S = S(\Omega)$ и $\Delta^- = \Delta^-(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме 2 из работы [9] $\Delta = \{(T,V) \in \mathbf{D}|\ V \in [0,1],\ T \in [0,\beta(V)]\}$, лемме 3 из той же работы $\beta(V)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция и $\beta(V) \in [1/2,1]$. Отсюда следует справедливость теоремы относительно множества $S(\Omega)$.

Для доказательства леммы относительно области Δ^- убедимся в том, что представление области Ω, описанное в определении леммы, эквивалентно представлению

$$\begin{array}{lll} \Psi(u,v)=0, & & \text{для } \ a_0 \le u \le b_0; \\ \Psi(s,t)=0, & u = s\cdot\frac{1}{1+\alpha},\ t = v\cdot\frac{1-\beta}{\beta} & \text{для } \ b_0 \le s \le 2a_0; \\ \Psi(x,y)=0, & x = s-u,\ y = t+v & \text{для } \ 0 \le x \le a_0. \end{array} \tag{23}$$

С этой целью сделаем замену переменных $(u,v) = (v,u), (s,t) = (t,s), (x,y) = (y,x)$ и воспользуемся свойством выпуклости и замкнутости области Ω. Мы придем к таком представлению:

$$\begin{array}{lll} \Psi(u,v)=0, & & \text{для } \ a_0 \le u \le b_0; \\ \Psi(s,t)=0, & v = t\cdot\beta,\ s = u\cdot\alpha & \text{для } \ 0 \le s \le a_0; \\ \Psi(x,y)=0, & y = t-v,\ x = s+u & \text{для } \ b_1 \le x \le 2a_0. \end{array}$$

Переобозначив $(x,y) = (s,t)$, получим представление (23).

Так как $\Delta^- = \mathfrak{T}(S)$ и преобразование $\mathfrak{T}$ — диффеоморфно в S, то достаточно убедиться в том, что при преобразовании $\mathfrak{T}$ границы области $S(\Omega)$ переходят в границы области $\Delta^-(\Omega)$:

$$\mathfrak{T}(\{(T,0)|T \in (1/2,1)\}) = \{(T,1)|T \in (0,1)\},$$

$$\mathfrak{T}(\{(1,V)|V \in (0,1)\}) = \{(0,V)|V \in (1/2,1)\},$$

$$\mathfrak{T}(\{(T,\alpha(T))|T \in (1/2,1)\}) = \left\{ \left(\frac{1}{T}-1, \frac{1}{1+\alpha(T)}\right) \middle| T \in (1/2,1) \right\} = \{(T,\beta(T))|T \in (0,1)\}.$$

Последнее равенство получено с учетом представления области Ω в виде (23).
Лемма доказана. □

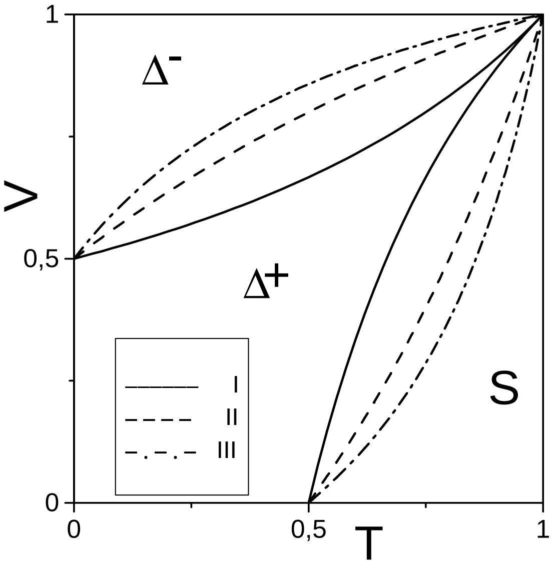
Следуя определениям множеств Δ и Δ^+ в лемме 2, положим

$$\Delta(\Omega) = \Delta,\ \Delta^+(\Omega) = \Delta^+.$$

Замечание 1. *Функция $\beta(\alpha)$ монотонно возрастает на отрезке $[0,1]$ и $\beta(\alpha) \ge \frac{1}{2-\alpha}$ для всех α из $[0,1]$.*

Подробное доказательство этого факта представлено в работе [9] — параграфы 2 и 3.

Пример 1. На рисунке отображены области S, Δ^-, Δ^+ для диагональных, эллиптических дробей и дробей, соответствующих функции $\beta^* = \beta(T) = \frac{4T+1}{3T+2}$:



Здесь символами I, II, III обозначены линии

$$\{(T, \beta(T)|\ T \in [0,1]\},\ \{(T, \alpha(T)|\ T \in [1/2, 1]\}$$

соответственно диагональных, эллиптических дробей и дробей, соответствующих функции β^*.

Напомним, что область $\Omega = \Omega_1$ для диагональной дроби — внутренность ромба с вершинами в точках $(-1,0), (0,1), (1,0), (0,-1)$, а область $\Omega = \Omega_2$ для эллиптической дроби — круг единичного радиуса с центром в точке $(0,0)$. Вычислим функции $\beta_{\Omega_1}(T)$, $\beta_{\Omega_2}(T)$, используя лемму 3:

$$\beta_{\Omega_1}(T) = \frac{1}{2-T},\ \beta_{\Omega_2}(T) = \frac{2T+1}{2+T}.$$

Следовательно,

$$\Delta^- = \begin{cases} \{(T,V) \in \mathbf{R}^2|\ T \in [0,1]\},\ V \in [\frac{1}{2-T}, 1]\} & \text{для диагональных дробей,} \\ \{(T,V) \in \mathbf{R}^2|\ T \in [0,1]\},\ V \in [\frac{2T+1}{2+T}, 1]\} & \text{для эллиптических дробей.} \end{cases}$$

§4. Эргодическая система для Ω-дробей

Основное свойство метрической теории чисел — эргодичность преобразования Гаусса, при помощи которого образуется регулярная непрерывная дробь. Мы докажем подобный факт для Ω - дробей — построим эргодическую систему для данного класса дробей и сравним ее с эргодической системой для регулярных непрерывных дробей.

Для дальнейшего изложения приведем некоторые факты из эргодической теории. Более подробную информацию можно найти, например, в работе [10].

Основным понятием для нас будут — множество X с некоторой фиксированной сигма-алгеброй $\mathfrak{B}_X$ его подмножеств и вероятностной мерой μ, определенной на X, измеримое, обратимое, сохраняющее меру преобразование $\mathfrak{J}$, действующее из X в X. Множество A из $\mathfrak{B}_X$ инвариантно относительно преобразования $\mathfrak{J}$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{J}^{-1}A = A$. Это означает, что x принадлежит A в том и только в том случае, если $\mathfrak{J}x$ принадлежит A. Преобразование $\mathfrak{J}$ эргодично в том и только в том случае, если любое измеримое множество A, инвариантное относительно $\mathfrak{J}$, удовлетворяет эргодическому свойству $\mu(A) \in \{0, 1\}$.
Соответствующая система $(X, \mathfrak{B}_X, \mu, \mathfrak{J})$ называется эргодической.

Приведем следствие из эргодической теоремы Биркгофа. Пусть $\mathfrak{J}$ — сохраняющее меру преобразование множества X и пусть A — измеримое подмножество из X. Тогда среднее время пребывания в A для почти всех траекторий пропорционально $\mu(A)$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(\mathfrak{J}^k x) = \mu(A)$$

для почти всех x, где χ_A обозначает характеристическую функцию на A.

Для фиксированной области Ω определим множества Y, Y_+, Y_-, принадлежащие множеству D, следующим образом

$$Y = Y(\Omega) = Y_+(\Omega) \cup Y_-(\Omega),\ Y_+ = Y_+(\Omega) = \Delta^+(\Omega),\ Y_- = Y_-(\Omega) = F(\Delta^-(\Omega)), \tag{24}$$

где

$$F(t, v) = \left(-\frac{t}{1+t}, 1 - v \right). \tag{25}$$

На множестве Y рассмотрим аналог преобразования $\mathfrak{T}$ из (2) — оператор $\mathfrak{J}$ для $\Omega-$ дробей:

$$\mathfrak{J}(t, v) = \begin{cases} \mathfrak{T}(t, v), & \text{если } (t, v) \in \Delta^+, \mathfrak{T}(t, v) \in \Delta^+, \\ F \circ \mathfrak{T}^2(t, v), & \text{если } (t, v) \in \Delta^+, \mathfrak{T}(t, v) \in S, \\ \mathfrak{T} \circ F^{-1}(t, v), & \text{если } (t, v) \in Y_-, \mathfrak{T} \circ F^{-1}(t, v) \in \Delta^+, \\ F \circ \mathfrak{T}^2 \circ F^{-1}(t, v), & \text{если } (t, v) \in Y_-, \mathfrak{T} \circ F^{-1}(t, v) \in S. \end{cases} \tag{26}$$

Лемма 4. *Множества $\mathfrak{J}(Y)$ и Y совпадают.*

Доказательство. Вложение $\mathfrak{J}(Y) \subseteq Y$ следует из определения (26).

Обратно, пусть (t, v) — точка множества Y, не принадлежащая множеству $\mathfrak{J}(Y)$. Если $(t, v) \in Y_+$, то для некоторого вещественного числа x числа t и v соответствуют паре $T_n(x), V_n(x)$, определяемой формулой (9): $(t, v) = (T_n(x), V_n(x))$, где $n-1$ — длина регулярной непрерывной дроби числа v. Используя определение преобразования $\mathfrak{J}$, получаем, что если $(T_{n-1}, V_{n-1}) \in \Delta^+ \cup \Delta^-$, то $\mathfrak{J}(T_{n-1}, V_{n-1}) = (T_n, V_n)$. Поэтому $(T_{n-1}, V_{n-1}) \in S$. Тогда $(T_n, V_n) \in \mathfrak{T}(S) = \Delta^-$, что противоречит предположению $(T_n, V_n) \in Y_+$. Следовательно $(t, v) \in Y_-$. Как и раньше, числам t и v соответствуют элементы последовательностей $\{T_k(x)\}$, $\{V_k(x)\}$ некоторого вещественного числа $x : F^{-1}(t, v) = (T_n, V_n)$, где $n-1$ — длина регулярной непрерывной дроби числа $1+v$. Из равенства следует, что $(T_{n-1}, V_{n-1}) \in S$. Учитывая, что при $(T_{n-2}, V_{n-2}) \in \Delta^+ \cup \Delta^-$ точка (t, v) лежит во множестве $\mathfrak{J}(Y)$, получаем $(T_{n-2}, V_{n-2}) \in S$. А это влечет за собой вложение $(T_{n-1}, V_{n-1}) \in \Delta^-$. Полученное противоречие показывает, что множество $Y \setminus \mathfrak{J}(Y)$ пусто. Лемма доказана. $\square$

При фиксированном иррациональном числе x из $(0,1)$ определим множество значений

$$Y(x) = \{y \in \mathbf{R} | (x, y) \in Y\}. \tag{27}$$

Легко показать, что

$$\mathfrak{J}^n(x, 0) = (t_{n+1}(x), v_{n+1}(x)),\ n \geq 1, \tag{28}$$

где последовательности $\{t_n(x)\}_{n\geq1}$, $\{v_n(x)\}_{n\geq1}$, определенные соотношениями (8), соответствуют $\Omega-$ дроби числа x. Далее вычислим $\mathfrak{J}^n(x, y)$ для $y \in Y(x)$. Пусть

$$\begin{aligned} x &= [0; \varepsilon_1(x)/b_1(x), \varepsilon_2(x)/b_2(x), \ldots], \\ y &= [0; \varepsilon_1(y)/b_1(y), \varepsilon_2(y)/b_2(y), \ldots] \end{aligned}$$

— представления чисел x и y в виде $\Omega-$ дробей.

Если y — рациональное число, то $\Omega-$ дробь этого числа конечна. Из условия $(x, y) \in Y$ следует, что найдется вещественное число z, для которого $(t_{m+1}(z), v_{m+1}(z)) = (x, y)$, где m — длина $\Omega-$ дроби числа y. Это приводит к результату

$$z = [0; 1/b_m(y), \varepsilon_m(y)/b_{m-1}(y), \ldots, \varepsilon_2(y)/b_1(y), \varepsilon_1(x)/b_1(x), \varepsilon_2(x)/b_2(x), \ldots].$$

Используя соотношение (28), вычислим $\mathfrak{J}^n(x, y) = (t_{n+m+1}(z), v_{n+m+1}(z))$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^n(x, 0) - \mathfrak{J}^n(x, y) &= (t_{n+1}(x), v_{n+1}(x)) - (t_{n+m+1}(z), v_{n+m+1}(z)) = \\ &= (0, v_{n+1}(x) - v_{n+m+1}(z)). \end{aligned}$$

На основании итерационных формул (15) и (16) представим

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) &= \frac{b_1(x) \cdot A + \varepsilon_2(x) \cdot A'}{b_1(x) \cdot B + \varepsilon_2(x) \cdot B'}, \\ v_{n+m+1}(z) &= \frac{(b_1(x) + y) \cdot A + \varepsilon_2(x) \cdot A'}{(b_1(x) + y) \cdot B + \varepsilon_2(x) \cdot B'}, \end{aligned}$$

где A/B и A'/B' — соседние подходящие дроби с номерами n и $n-1$ $\Omega-$ дроби числа $v_{n+1}(x)$. Учитывая равенства (17) и (18) и тот факт, что последовательности $\{B_i\}_{i\geq 1}$ образует подпоследовательность последовательности $\{Q_i\}_{i\geq 1}$ — знаменателей регулярной непрерывной дроби числа x, получаем

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{J}^n(x,0)-\mathfrak{J}^n(x,y))=\lim_{n\to\infty}\left(0,\frac{\pm y}{B_{n+1}(B_{n+1}+y\cdot B)}\right)=(0,0), \qquad (29)$$

поскольку B — знаменатель конечной полурегулярной дроби $\left[0;\frac{1}{b_n(x)},\frac{\varepsilon_n(x)}{b_{n-1}(x)},\ldots,\frac{\varepsilon_3(x)}{b_2(x)}\right]$.

В случае иррационального числа y, представим его в виде $y=\lim_{m\to\infty}A_m/B_m$, где A_m/B_m — подходящая дробь $\Omega-$ дроби этого числа с номером m. Далее, повторяя вышеизложенные рассуждения для $y_m=A_m/B_m$, получаем формулу (29).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{B}_\Omega$ — семейство множеств Бореля на Y. Определим на любом множестве Бореля A из $\mathfrak{B}_\Omega$ функцию μ_Ω равенством*

$$\mu_\Omega(A)=\frac{1}{\Phi(\Omega)}\iint_A\frac{dTdV}{(1+TV)^2},$$

где

$$\Phi(\Omega)=\log 2-\iint_{S(\Omega)}\frac{dTdV}{(1+TV)^2}=\int_0^1\int_0^{\beta_\Omega(T)}\frac{dVdT}{(1+TV)^2}$$

и функция $\beta_\Omega(T)$ определена в формулировке леммы 3. Тогда система $(Y,\mathfrak{B}_\Omega,\mu_\Omega,\mathfrak{J})$ формирует эргодическую систему.

Доказательство. По определению $\mu_\Omega(Y)=1$. Дальше необходимо показать, что оператор $\mathfrak{J}$ обратим и сохраняет меру. Обратимость следует из леммы 4 и из того, что $\mathfrak{J}$ есть композиция биективных отображений $\mathfrak{T}$, F из (2) и (25). Для доказательства того, что $\mathfrak{J}$ сохраняет меру, следует убедиться в том, что для любого множества Бореля A из $\mathfrak{B}_\Omega$

$$\mu_\Omega(\mathfrak{J}^{-1}(A))=\mu_\Omega(A).$$

Разделим множество A на два непересекающихся подмножества $A_+\subseteq\Delta^+$ и $A_-\subseteq Y_-$, и положим

$$B_+=\mathfrak{J}^{-1}(A_+)\cap\Delta^+,\ B_-=\mathfrak{J}^{-1}(A_+)\setminus B_+,$$

$$C_+=\mathfrak{J}^{-1}(A_-)\cap\Delta^+,\ C_-=\mathfrak{J}^{-1}(A_-)\setminus C_+.$$

Тогда

$$B_+\cup B_-=\mathfrak{J}^{-1}(A_+),\ C_+\cup C_-=\mathfrak{J}^{-1}(A_-)$$

и

$$\mathfrak{J}^{-1}(A)=B_+\cup C_+\cup B_-\cup C_-.$$

Поскольку отображение $\mathfrak{J}$ биективно, то множества B_+ и C_+ не пересекаются. По этой же причине не пересекаются и множества B_- и C_-. Учитывая предложенное разбиение множеств A, $\mathfrak{J}^{-1}(A)$ и определение функции μ_Ω, вычислим

$$\begin{aligned}\Phi(\Omega)\cdot\mu_\Omega(A)= &\ \Phi(\Omega)\cdot(\mu_\Omega(J(B_+))+\mu_\Omega(J(C_+))+\mu_\Omega(J(B_-))+\mu_\Omega(J(C_-)))= \\ =&\iint_{\mathfrak{J}(B_+)}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}+\iint_{\mathfrak{J}(C_+)}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}+\iint_{\mathfrak{J}(B_-)}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}+\iint_{\mathfrak{J}(C_-)}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}.\end{aligned}\tag{30}$$

Из (26) следует равенство $\mathfrak{J}(B_+)=\mathfrak{T}(B_+)$, поэтому, полагая для $n\in\mathbf{N}$

$$B_+(n)=\left\{(t,v)\in B_+\,\middle|\,\left[\frac{1}{t}\right]=n\right\},$$

и учитывая, что множества $\mathfrak{T}(B_+(n))$ и $\mathfrak{T}(B_+(m))$ не пересекаются при $n\neq m$, а отображение $\mathfrak{T}$ на множестве $B_+(n)$ диффеоморфно, получаем

$$\begin{aligned}\iint_{\mathfrak{J}(B_+)}\frac{dxdy}{(1+xy)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\iint_{\mathfrak{T}(B_+(n))}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\iint_{B_+(n)}\frac{dtdv}{(1+x(t,v)y(t,v))^2}\times I(\mathfrak{T},n)= \\ &= \iint_{B_+(n)}\frac{dtdv}{(1+tv)^2},\end{aligned}$$

где $I(\mathfrak{T},n)$ — Якобиан преобразования $\mathfrak{T}$, равный $\frac{1}{t^2(n+v)^2}$.

Вычислим второй интеграл в соотношении (30), используя равенство $J(C_+)=F\circ\mathfrak{T}^2(C_+)$ из (26). Повторим предыдущие рассуждения относительно системы множеств

$$C_+(n)=\left\{(t,v)\in C_+\,\middle|\,\left[\frac{1}{t}\right]=n\right\},$$

при этом учтем, что множества $F\circ\mathfrak{T}^2(C_+(n))$ и $F\circ\mathfrak{T}^2(C_+(m))$ не пересекаются при $n\neq m$, а отображение $F\circ\mathfrak{T}^2$ на множестве $C_+(n)$ диффеоморфно:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathfrak{J}(C_+)}\frac{dxdy}{(1+xy)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\iint_{F\circ\mathfrak{T}^2(C_+(n))}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\iint_{F(C_+(n))}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\iint_{C_+(n)}\frac{dtdv}{(1+x(t,v)y(t,v))^2}\times I(F)=\iint_{C_+}\frac{dtdv}{(1+tv)^2},\end{aligned}$$

где $I(F)$ — Якобиан преобразования F, равный $\frac{1}{(1+t)^2}$. В третьем интеграле в выражении (30) оператор $\mathfrak{J}$ имеет вид $\mathfrak{T}\circ F^{-1}$. Проводя аналогичные рассуждения, находим, что

$$\begin{aligned}\iint_{\mathfrak{J}(B_-)}\frac{dxdy}{(1+xy)^2} &= \iint_{\mathfrak{T}(B_-)}\frac{dtdv}{(1+x(t,v)y(t,v))^2}\times I(F^{-1})=\iint_{\mathfrak{T}(B_-)}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\iint_{\mathfrak{T}(B_-(n))}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\iint_{B_-(n)}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}=\iint_{B_-}\frac{dxdy}{(1+xy)^2},\end{aligned}$$

где $I(F^{-1})$ — Якобиан преобразования F^{-1}, $B_-(n) = \left\{(t,v) \in B_- \middle| \left[\frac{1}{t}\right] = -n\right\}$.
Таким же образом вычисляем четвертый интеграл в выражении (30), учитывая (26):

$$\iint_{\mathfrak{J}(C_-)} \frac{dxdy}{(1+xy)^2} = \iint_{F\circ\mathfrak{T}^2\circ F^{-1}(C_-)} \frac{dxdy}{(1+xy)^2} = \iint_{F\circ\mathfrak{T}^2(C_-)} \frac{dxdy}{(1+xy)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{F\circ\mathfrak{T}^2(C_-(n))} \frac{dxdy}{(1+xy)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{F(C_-(n))} \frac{dxdy}{(1+xy)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{C_-(n)} \frac{dxdy}{(1+xy)^2} = \iint_{C_-} \frac{dxdy}{(1+xy)^2}.$$

Здесь $C_-(n) = \left\{(t,v) \in C_- \middle| \left[\frac{1}{t}\right] = -n\right\}$. Итак, подставляя полученные равенства в (30), получаем $\mu_\Omega(A) = \mu_\Omega(\mathfrak{J}^{-1}(A))$. Откуда следует, что оператор $\mathfrak{J}$ сохраняет меру.

Осталось доказать условие эргодичности: для всякого инвариантного множества A из $\mathfrak{B}_\Omega$ $\mu_\Omega(A) \in \{0,1\}$. Иначе говоря, если $A \in \mathfrak{B}_\Omega$ и $\mathfrak{J}^-(A) = A$, то $\mu_\Omega(A) \in \{0,1\}$. Как и в предыдущем случае разобьем A и $\mathfrak{J}^-(A)$ на непересекающиеся подмножества:

$$\mathfrak{J}^-(A) = \mathfrak{J}^-(A_+) \cup \mathfrak{J}^-(A_-) = B_+ \cup B_- \cup C_+ \cup C_-.$$

Определим множества $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ равенствами

$$\overline{A} = F^{-1}(A_-),\ \overline{B} = F^{-1}(B_-),\ \overline{C} = F^{-1}(C_-).$$

Из построения следует, что

$$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in \Delta^-,\ \mathfrak{T}^{-1}(\overline{A}), \mathfrak{T}^{-1}(\overline{B}), \mathfrak{T}^{-1}(\overline{C}) \in S.$$

Поскольку $\mathfrak{J}^-(A) = A$, то $A_+ = B_+ \cup C_+ = \mathfrak{T}(B_+ \cup \overline{B})$ и $\overline{A} = \overline{B} \cup \overline{C} = \mathfrak{T}^2(C_+ \cup \overline{C})$.
Обозначив $A' = \mathfrak{T}(C_+ \cup \overline{C})$, вычислим

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}^{-1}(A_+ \cup \overline{A} \cup A') &= \mathfrak{T}^{-1}(A_+) \cup \mathfrak{T}^{-1}(\overline{A}) \cup \mathfrak{T}^{-1}(A') = \\
&= \mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{T}(B_+ \cup \overline{B})) \cup \mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{T}^2(C_+ \cup \overline{C})) \cup \mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{T}(C_+ \cup \overline{C})) = \\
&= B_+ \cup \overline{B} \cup \mathfrak{T}(C_+ \cup \overline{C}) \cup C_+ \cup \overline{C} = \\
&= A_+ \cup \overline{A} \cup A'.
\end{aligned}$$

То есть $\mu(A_+ \cup \overline{A} \cup A') \in \{0,1\}$. Если мера множества равна нулю, то нетрудно видеть, что $\mu_\Omega(A) = 0$. Таким образом

$$\log 2 = \iint_{A_+ \cup \overline{A} \cup A'} \frac{dxdx}{(1+xy)^2} = \iint_{A_+} \frac{dxdx}{(1+xy)^2} + \iint_{\overline{A}} \frac{dxdx}{(1+xy)^2} + \iint_{A'} \frac{dxdx}{(1+xy)^2}$$

и $A_+ \subseteq \Delta^+$, $\overline{A} \subseteq \Delta^-$, $A' \in S$. Поэтому $A_+ = Y_+$, $A_- = F(\overline{A}) = F(\Delta^-) = Y_-$.
Учитывая равенство $\mu_\Omega(Y) = 1$, получаем справедливость условия эргодичности.
Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Для почти всех x из $[0,1)$ последовательность $\{t_k(x), v_k(x)\}_{k\geq 1}$ распределена на Y с функцией плотности $\rho(t,v;\Omega)$, равной*

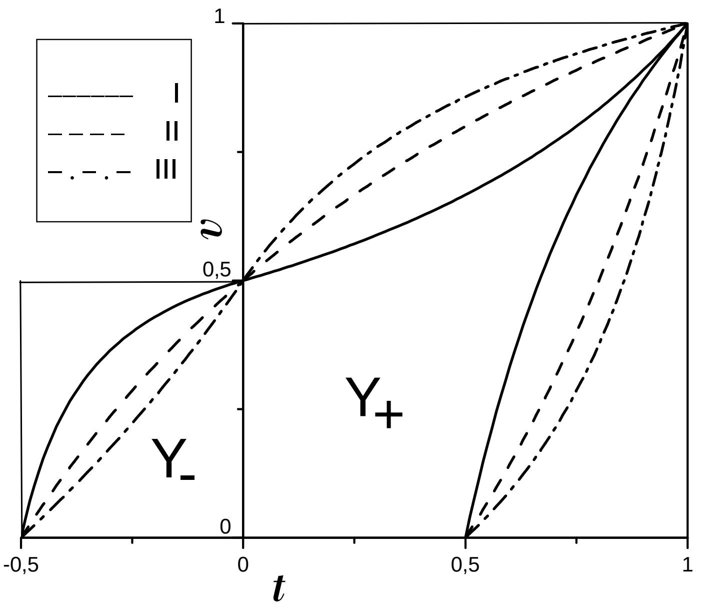
$$\frac{1}{\Phi(\Omega)}\frac{1}{(1+tv)^2}.$$

Доказательство. Поступим следующим образом. Обозначим через E — множество чисел x из $(0,1)$, для которых последовательность $\{(t_k(x), v_k(x))\}_{k\geq 1}$ не распределена с функцией плотности ρ. Из соотношения (29) и определения (27) множества $Y(x)$ следует, что для каждой пары чисел (x,y) из множества Бореля $\{(x,y)\in Y|\ x\in E, y\in Y(x)\}$ последовательность $\{\mathfrak{I}^n(x,y)\}_{n\geq 1}$ не распределена с функцией плостности ρ, что противоречит только что доказанной теореме. $\square$

Пример 2. Построим эргодические системы для диагональных, эллиптических дробей и дробей, соответствующих функции β^*, заданной в примере 1. Используя этот пример, вычислим

$$\Phi(\Omega)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{для диагональных дробей,}\\ \frac{\log 3}{2}\approx 0.54036 & \text{для эллиптических дробей,}\\ \frac{1}{2}\big(\log 5-\arctan 3+\frac{\pi}{4}\big)\approx 0.572895 & \text{для } \Omega-\text{дробей, соответствующих } \beta^*,\end{cases}$$

а затем построим область Y по формулам (24), (25):



Символами $I,\ II,\ III$ обозначены границы областей соответственно для диагональных, эллиптических дробей и дробей, соответствующих функции β^* — в последующих примерах мы будем придерживаться этих обозначений.

В результате мы получили

$$Y_- = \begin{cases} \big\{(t,v) \in \mathbf{R}^2 |\ T \in [-1/2, 0]\big\},\ V \in \big[0, \frac{1+2t}{2+3t}\big]\big\} \text{ для диагональных дробей,} \\ \big\{(t,v) \in \mathbf{R}^2 |\ T \in [-1/2, 0]\big\},\ V \in \big[0, \frac{1+2t}{2+t}\big]\big\} \text{ для эллиптических дробей,} \\ \big\{(t,v) \in \mathbf{R}^2 |\ T \in [-1/2, 0]\big\},\ V \in \big[0, \frac{1+2t}{2-t}\big]\big\} \text{ для дробей, соответствующих функции } \beta^*. \end{cases}$$

§5. Распределение последовательности $\{\Upsilon_k\}_{k\geq 1}$

Для последовательности $\{\Upsilon_k(x)\}_{k\geq 1}$, определенной формулой 6, рассмотрим функцию распределения

$$F_k(z;\Omega) = \frac{1}{k} \cdot \#\{m \in [1,k]|\ \Upsilon_m(x) < z\} \text{ при } 0 \leq z \leq 1$$

равномерно распределенного числа x. Нас будет интересовать предельное поведение после- довательности $F_k(z;\Omega)$ в смысле сходимости в основном.

Используя зависимость величин $\Upsilon_{k-1}(x), \Upsilon_k(x)$ от $t_k(x)$ и $v_k(x)$, отраженную в равенствах (19), определим операторы $\Psi_+ : Y_+ \mapsto \Psi_+(Y_+)$, $\Psi_- : Y_- \mapsto \Psi_-(Y_-)$ и $\Psi : Y \mapsto \Psi(Y)$ соотношениями

$$(w_1, w_2) = \Psi_+(t,v) = \left(\frac{v}{1+tv}, \frac{t}{1+tv}\right), \tag{31}$$

$$(w_1, w_2) = \Psi_-(t,v) = \left(\frac{v}{1+tv}, \frac{-t}{1+tv}\right), \tag{32}$$

$$(w_1, w_2) = \Psi(t,v) = \begin{cases} \Psi_+(t,v), & \text{если } t \geq 0 \\ \Psi_-(t,v), & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Определим функции $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ на отрезке $[0,1]$ равенствами

$$f_1(t) = \frac{t}{1+t\beta(t)},\ f_2(t) = \frac{\beta(t)}{1+t\beta(t)},\ f_3(t) = \frac{(1-\beta(t))\cdot(1+t)}{1+t\beta(t)}. \tag{33}$$

С помощью замечания 1 легко получить, что на отрезке $[0,1]$ $f_1(t)$ — монотонно возрастающая функция, $f_2(t)$ — функция, выпуклая вверх, имеющая только одну точку экстремума, $f_3(t)$ — монотонно убывающая функция.

Из диффеоморфности отображений Ψ_+, Ψ_- следует, что граница области $\Psi_-(Y_-)$ — замкнутое объединение отрезков l_1, l_2, соединяющих соответственно точки $(0,0), (0,1/2)$ и $(0,0), (1/2,0)$ и линии l_3, заданной параметрически:

$$l_3 = \left\{(w_1,w_2) \in \mathbf{R}^2 \middle|\ w_1 = f_3(t),\ w_2 = f_1(t),\ t \in [0,1]\right\}, \tag{34}$$

а область $\Psi_+(Y_+)$ ограничена отрезками l_1, l_2 и линиями l_4, l_5 :

$$l_4 = \left\{ (w_1, w_2) \in \mathbf{R}^2 \middle| \, w_1 = f_1(t), \; w_2 = f_2(t), \; t \in [0, 1] \right\}, \tag{35}$$

$$l_5 = \{(w_1, w_2) | \; (w_2, w_1) \in l_4\}. \tag{36}$$

Из ограничения на функцию β, указанном в замечании 1, следует неравенство $f_1(t) \geq 1/2$ для всех t из $[0, 1]$, и вложение $\Psi_-(Y_-) \subset \Psi_+(Y_+)$. А из неравенства Валена [11] $\Theta_{n-1} + \Theta_n \leq 1$ следует, что область $\Psi_+(Y_+)$ лежит внутри треугольника с вершинами $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$. Здесь Θ_{n-1}, Θ_n — элементы последовательности, определенной в (3).

Поскольку последовательность $\{t_k(x), v_k(x)\}_{k \geq 1}$ распределена на множестве Y с функцией плотности $\rho(t, v; \Omega)$, определенной в следствии 1, то для последовательности $\{\Upsilon_{k-1}(x), \Upsilon_k(x)\}_{k \geq 1}$, равной $\{\Psi(t_k(x), v_k(x))\}_{k \geq 1}$ плотность, сосредоточенная в $\Psi(Y)$, состоит из суммы двух величин

$$\frac{I_+}{\Phi(\Omega)} \cdot \frac{1}{(1 + t(w_1, w_2)v(w_1, w_2))^2}, \quad \frac{I_-}{\Phi(\Omega)} \cdot \frac{\chi_{\Psi_-(Y_-)}(w_1, w_2)}{(1 + t(w_1, w_2)v(w_1, w_2))^2},$$

где I_+, I_- — якобианы преобразований Ψ_+ и Ψ_-, равные $\frac{(1+\sqrt{1-4w_1w_2})^2}{4w_1^2w_2^2\sqrt{1-4w_1w_2}}$ и $\frac{(1-\sqrt{1+4w_1w_2})^2}{4w_1^2w_2^2\sqrt{1+4w_1w_2}}$. Производя необходимые вычисления, получаем, что плотность распределения последовательности $\{\Upsilon_{k-1}(x), \Upsilon_k(x)\}_{k \geq 1}$ равна

$$f(w_1, w_2; \Omega) = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \left(\frac{\chi_{\Psi_+(Y_+)}(w_1, w_2)}{\sqrt{1 - 4w_1w_2}} + \frac{\chi_{\Psi_-(Y_-)}(w_1, w_2)}{\sqrt{1 + 4w_1w_2}} \right). \tag{37}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Для почти всех x последовательность $\{\Upsilon_{k-1}(x), \Upsilon_k(x)\}_{k \geq 1}$ имеет предельное распределение*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \#\{m \in [1, k] | \; \Upsilon_{m-1}(x) < z_1, \Upsilon_m(x) < z_2\} = \int_0^{z_1}\!\!\int_0^{z_2} f(w_1, w_2; \Omega) dw_2 dw_1$$

при $z_1, z_2 \in (0, 1)$.

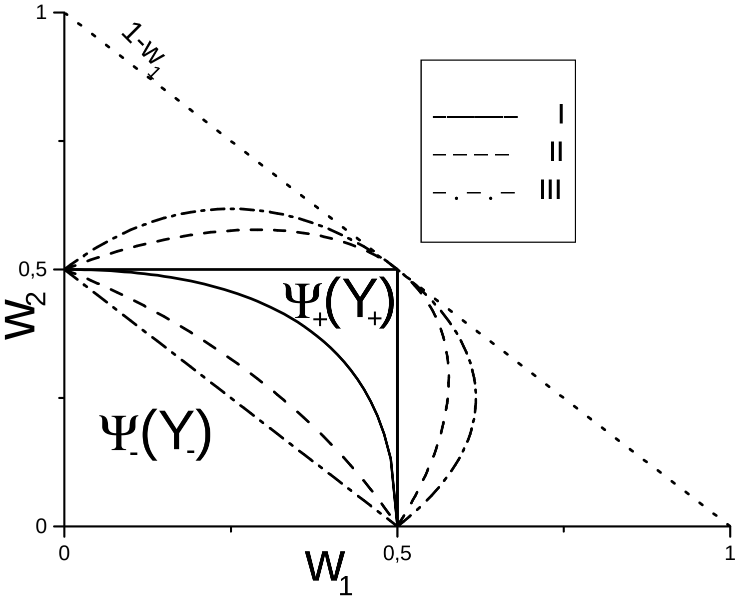
Следствие 2. *Нетрудно видеть, что для точек $(z_1, z_2) \in \Psi_-(Y_-)$*

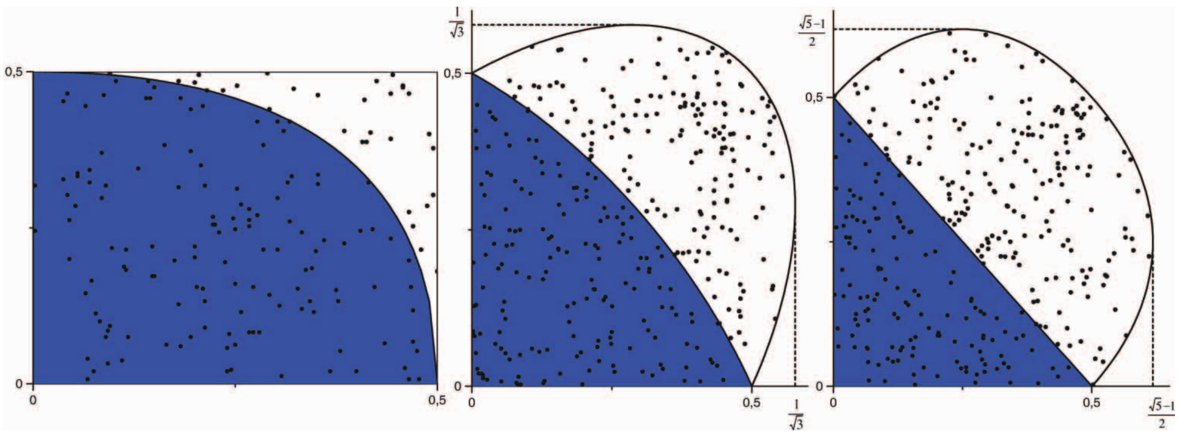
$$\int_0^{z_1}\!\!\int_0^{z_2} f(w_1, w_2; \Omega) dw_2 dw_1 = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \cdot \left(\log\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4z_1z_2}}{1 + \sqrt{1 + 4z_1z_2}} \right) + \sqrt{1 + 4z_1z_2} - \sqrt{1 - 4z_1z_2} \right),$$

а для точек $(z_1, z_2) \notin \Psi_+(Y_+)$

$$\int_0^{z_1}\!\!\int_0^{z_2} f(w_1, w_2; \Omega) dw_2 dw_1 = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \cdot \begin{cases} z_1, & \textit{если} \;\; z_1 \leq 1/2, \\ z_2, & \textit{если} \;\; z_2 \leq 1/2. \end{cases}$$

Пример 3. На рисунках построены области $\Psi_+(Y_+), \Psi_-(Y_-)$ для диагональных, эллиптических дробей и дробей, соответствующих функции β^*.





Области $\Psi_+(Y_+)$, $\Psi_-(Y_-)$ для диагональных дробей, эллиптических дробей, дробей, соответствующих функции β^* (слева направо). Заштрихованные области — $\Psi_-(Y_-)$, области, заполненные точками — $\Psi_+(Y_+)$ для соответствующих дробей. Используя формулы (33)-(36), получим, что области $\Psi_-(Y_-)$ ограничены линиями $l_1 = \{\lambda(0,0) + (1-\lambda)(0,1/2) | \lambda \in [0,1]\}$, $l_2 = \{(w_1, w_2) | (w_2, w_1) \in l_1\}$,

$$l_3 = \begin{cases} \{(w, -1/2 + w + \sqrt{1-2w}) |\ w \in [0,1/2]\} & \text{для диагональных дробей,} \\ \{(w, \frac{-w+\sqrt{1-3w^2}}{2}) |\ w \in [0,1/2]\} & \text{для эллиптических дробей,} \\ \{(w, 1/2 - w) |\ w \in [0,1/2]\} & \text{для дробей, соответствующих функции } \beta^*, \end{cases}$$

и границы областей $\Psi_+(Y_+)$ — объединение линий l_1, l_2, l_4, l_5, где

$$l_4 = \begin{cases} \{(w, 1/2) |\ w \in [0, 1/2]\} & \text{для диагональных дробей,} \\ \{(w, \frac{w+\sqrt{1-3w^2}}{2}) |\ w \in [0, 1/2]\} & \text{для эллиптических дробей,} \\ \{(w, -1/2 + \sqrt{-4w^2+2w+1}) |\ w \in [0, 1/2]\} & \text{для дробей, соответствующих функции } \beta^*, \end{cases}$$

$l_5 = \{(w_1, w_2) | (w_2, w_1) \in l_4\}$. Чтобы получить предельное распределение последовательности $\{\Upsilon_{k-1}(x), \Upsilon_k(x)\}_{k \geq 1}$ для почти всех x, воспользуемся формулировкой теоремы 2: для точек (z_1, z_2) из области $\Psi_+(Y_+) \setminus \Psi_-(Y_-)$

- для диагональных дробей

$$\begin{aligned} \int_0^{z_1}\int_0^{z_2} f(w_1, w_2; \Omega) dw_2 dw_1 &= 2 \log \frac{1 + \sqrt{1 - 4z_1 z_2}}{(1 + \sqrt{1 - 2z_1})(1 + \sqrt{1 - 2z_2})} - 2\sqrt{1 - 4z_1 z_2} + \\ &+ 2\sqrt{1 - 2z_1} + 2\sqrt{1 - 2z_2} - 2 + 2z_1 + 2z_2, \end{aligned}$$

- для эллиптических дробей

$$\int_0^{z_1}\int_0^{z_2} f(w_1, w_2; \Omega) dw_2 dw_1 = \begin{cases} 1 - \log 3 - \log(1 + \sqrt{1 + 4z_1 z_2}) + & \\ + \sqrt{1 + 4z_1 z_2} + F_l(z_1, z_2) + 2F_l(z_1) + 2F_l(z_2), & z_1, z_2 \leq 1/2; \\ -\log 2 + F_e(z_1, z_2), & \text{в другом случае} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} F_e(z_1, z_2) &= \frac{\log 3}{2} + \log(1 + \sqrt{1 - 4z_1 z_2}) - \sqrt{1 - 4z_1 z_2} - F_l(z_1) - F_l(z_2), \\ F_e(z) &= \frac{1}{2}\Big(- z - \sqrt{1 - 3z^2} + \log(1 + \sqrt{1 - 3z^2})\Big) \end{aligned}$$

- для дробей, соответствующих функции β^*

$$\begin{aligned} \int_0^{z_1}\int_0^{z_2} f(w_1, w_2; \Omega) dw_2 dw_1 &= \frac{1}{\Phi(\Omega)}\Bigg(\log(1 + \sqrt{1 - 4z_1 z_2}) - \sqrt{1 - 4z_1 z_2} - \log 2 - \frac{3}{4} \log 5 + \\ &+ \begin{cases} F_*^-(z_1) + F_*^-(z_2), & z_1, z_2 \leq \frac{1}{2}, \\ F_*^-(z_1) + F_*^+(z_2), & z_1 \leq \frac{1}{2}, z_2 > \frac{1}{2}, \\ F_*^+(z_1) + F_*^-(z_2), & z_1 > \frac{1}{2}, z_2 \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \Bigg) \end{aligned}$$

где величина $\Phi(\Omega)$ определена в примере 2 и

$$F_*^-(z) = \frac{\sqrt{1 + 2z - 4z^2}}{2} + \frac{1}{4} \arcsin \frac{4z - 1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1 + 2z - 4z^2} + 4z - 1}{z(\sqrt{1 + 2z - 4z^2} + 1)},$$

$$F_*^+(z) = \frac{z + \sqrt{1 - z - z^2}}{2} + \arcsin \frac{2\sqrt{1 - z - z^2}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \log \frac{7 + 4z - 2\sqrt{1 - z - z^2}}{2 + z + 2(1 + z)\sqrt{1 - z - z^2}}.$$

Замечание 1. *Свойства функции $\beta(t)$, перечисленные в замечании 1, позволяют сказать, что*

1. *для $\beta \equiv \beta^*$ при всех t из отрезка $[0,1]$ выполняется тождество $f_1(t) + f_3(t) = 1/2$;*

2. *для $\beta \not\equiv \beta^*$ уравнение $f_1(t) + f_3(t) = z$ на отрезке $[0,1]$*

   — *не разрешимо при $z \in [0, 1/2) \cup (z_1, 1]$,*

   — *имеет два решения при $z \in [1/2, z_1)$ — ме́ньшее из этих решений обозначим через через $t_- = t_-(z)$,*

   — *имеет только одно решение при $z = z_1$,*

   где $z_1 = \max_{t\in[0,1]}(f_1(t) + f_3(t))$;

3. *уравнение $f_1(t) + f_2(t) = z$ на отрезке $[0,1]$*

   — *не имеет решения при $z \in [0, 1/2)$,*

   — *имеет только одно решение при $z \in [1/2, 1]$ — обозначим это решение через $t_+ = t_+(z)$.*

Здесь используются функции $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, определенные в соотношениях (33).

Следствие 3. *При данных обозначениях определим величины*

$$w_- = w_-(z) = f_1(t_-(z)),\ \beta_+ = \beta_+(z) = \beta(t_+(z)).$$

Тогда для почти всех x последовательность $\{\Upsilon_{k-1}(x) + \Upsilon_k(x)\}_{k\geq 1}$ распределена на $[0,1]$ с функцией плотности $\rho_1(z;\Omega)$, равной

$$\begin{cases} g_1(z;\Omega), & \text{если } z \in [0, 1/2], \\ g_2(z;\Omega) + g_3(z;\Omega), & \text{если } z \in (1/2, z_1), \\ g_3(z;\Omega), & \text{если } c \in [z_1, 1], \end{cases}$$

где функции $g_1(z;\Omega), g_2(z;\Omega), g_3(z;\Omega)$ на отрезке $[0,1]$ задаются равенствами

$$g_1(z;\Omega) = \frac{1}{\Phi(\Omega)}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} + \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right),$$

$$g_2(z;\Omega) = \frac{1}{\Phi(\Omega)}\arcsin\frac{z-2w_-}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$g_3(z;\Omega) = \frac{1}{2\Phi(\Omega)}\log\frac{(1+\beta_+)(1-t_+)}{(1-\beta_+)(1+t_+)}$$

с величиной $\Phi(\Omega)$, определенной в формулировке теоремы 1.

Доказательство. По определению

$$\rho_1(z;\Omega) = \int_0^z f(w_1, w_2; \Omega)[w_1 + w_2 = z]dw_1,$$

где функция $f(w_1, w_2; \Omega)$ задается формулой (37). Здесь и далее запись $[A]$ означает 1, если утверждение A истинно, и 0 в противном случае.

Первообразные для функций $(1 - 4w_1(z - w_1))^{-1/2}$, $(1 + 4w_1(z - w_1))^{-1/2}$ соответственно равны

$$I_+(w_1, z) = \frac{1}{2}\log(2w_1 - z + \sqrt{1 - 4w_1(z - w_1)}) - \frac{1}{4}\log(1 - z^2),$$

$$I_-(w_1, z) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2w_1 - z}{\sqrt{1 + z^2}}\right).$$

Воспользуемся замечанием 2 и рассмотрим три случая: $z \in [0, 1/2]$, $z \in (1/2, z_1)$, $c \in [z_1, 1]$.

В первом случае

$$\rho_1(z;\Omega) = \frac{I_+(z, z) - I_+(0, z) + I_-(z, z) - I_-(0, z)}{\Phi(\Omega)} = g_1(z;\Omega).$$

Таким образом, при $z \in [0, 1/2]$ утверждение леммы правильно. Во втором случае заметим, что области $\Psi_+(Y_+)$ и $\Psi_-(Y_-)$ симметричны относительно прямой $\{(w, w)|\ w \in \mathbf{R}\}$ — следствие соотношений (23), (34)-(36). Поэтому

$$\rho_1(z;\Omega) = \frac{I_+(z - w_+, z) - I_+(w_+, z) + I_-(z - w_-, z) - I_-(w_-, z)}{\Phi(\Omega)} = g_2(z;\Omega) + g_3(z;\Omega),$$

где $w_+ = w_+(z) = f_1(t_+)$. И наконец, при $z \in [z_1, 1]$ получаем

$$\rho_1(z;\Omega) = \frac{I_+(z - w_+, z) - I_+(w_+, z)}{\Phi(\Omega)} = g_3(z;\Omega).$$

Следствие доказано. □

Таким же образом доказывается

Следствие 4. *Обозначим через z_2 ($z_2 \geq 1/2$) значение параметра z, при котором уравнение $\beta(t) = \frac{z+t}{1-zt}$ имеет только одно решение относительно переменной t на отрезке $[0, 1]$. Тогда почти для всех x последовательность $\{|\Upsilon_{k-1}(x) - \Upsilon_k(x)|\}_{k\geq 1}$ распределена на $[0, z_2]$ с функцией плотности $\rho_2(z;\Omega)$, равной*

$$\frac{1}{\Phi(\Omega)}\begin{cases} \log\frac{\sqrt{4f_1(t_-)f_3(t_-)+1}+f_1(t_-)+f_3(t_-)}{1+z} + \arcsin\frac{f_1(t_+)+f_2(t_+)}{\sqrt{1+z^2}} - \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, & \textit{если } z \in [0, 1/2], \\ \arcsin\frac{f_1(t_2)+f_2(t_2)}{\sqrt{1+z^2}} - \arcsin\frac{f_1(t_1)+f_2(t_1)}{\sqrt{1+z^2}}, & \textit{если } z \in (1/2, z_2], \end{cases}$$

где величины t_-, t_+, t_1, t_2 определяются из условий: t_-, t_+ — соответственно решения уравнений $\beta(t) = \frac{1-z}{1+t(1+z)}$ и $\beta(t) = \frac{t+z}{1-tz}$ на отрезке $[0,1]$ при фиксированном $z \in [0, 1/2]$, t_1, t_2 $(t_1 \le t_2)$ — решения уравнения $\beta(t) = \frac{t+z}{1-tz}$ на отрезке $[0,1]$ при фиксированном z из $(1/2, z_2]$.

Перейдем теперь к изложению доказательства основной теоремы о распределении

последовательности $\{\Upsilon_k(x)\}_{k\ge1}$.

Теорема 3. *Определим величину*

$$z_{max} = z_{max}(\Omega) = \max_{t\in[0,1]} \frac{\beta(t)}{1+t\beta(t)}.$$

Тогда $\Upsilon_k \in [0, z_{max}]$ для каждого $k \ge 1$ и для почти всех x последовательность $\{\Upsilon_k(x)\}_{k\ge1}$ распределена на $[0, z_{max}]$ с функцией плотности $\rho_3(z;\Omega)$, равной

$$\frac{1}{\Phi(\Omega)} \begin{cases} 1, & \text{если } z \in [0, 1/2], \\ z \cdot \left(\frac{t_2}{\beta(t_1)} - \frac{t_1}{\beta(t_2)}\right), & \text{если } z \in (1/2, z_{max}], \end{cases}$$

где $t_1 = t_1(z), t_2 = t_2(z)$ — решения уравнения $z = \frac{\beta(t)}{1+t\beta(t)}$ относительно переменной t из отрезка $[0,1]$ с условием $t_1 \le t_2$ и

$$\lim_{k\to\infty} F_k(z;\Omega) = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \begin{cases} z, & z \in [0, 1/2]; \\ \frac{1}{2} + \int_{1/2}^{z} \left(\frac{t_2(z')}{\beta(t_1(z'))} - \frac{t_1(z')}{\beta(t_2(z'))}\right) z' dz', & z \in (1/2, z_{max}]. \end{cases}$$

Доказательство. Выразим $\rho_3(z;\Omega)$ через функцию плотности распределения последовательности $\{\Upsilon_{k-1}(x), \Upsilon_k(x)\}_{k\ge1}$ из (37):

$$\rho_3(z;\Omega) = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \int f(z, w_2; \Omega) dw_2$$

— и получим выражение для $\rho_3(z;\Omega)$, представленное в формулировке теоремы. Теперь вычислим предельное распределение последовательности $\{\Upsilon_k(x)\}_{k\ge1}$:

$$\lim_{k\to\infty} F_k(z;\Omega) = \int_0^z \rho_3(z';\Omega) dz'.$$

Теорема доказана. □

Пример 4. На рисунках представлены графики функций $\rho_1(z;\Omega)$, $\rho_2(z;\Omega)$ и $\rho_3(z;\Omega)$ для диагональных, эллиптических дробей и дробей, соответствующих функции β^*.

Используя замечание 2, леммы 3 и 4, получим, что

- для диагональных дробей

$$\rho_1(z;\Omega) = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \begin{cases} \log\frac{1+z}{1-z} + \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, & z \le \frac{1}{2}; \\ \log(\sqrt{2}+\sqrt{1-z}) - \frac{1}{2}\log(1+z) + \arcsin\frac{\sqrt{3-4z}}{2\sqrt{1+z^2}}, & \frac{1}{2} < z < \frac{3}{4}; \\ \log(\sqrt{2}+\sqrt{1-z}) - \frac{1}{2}\log(1+z), & \frac{3}{4} \le z \le 1, \end{cases}$$

- для эллиптических дробей

$$\rho_1(z;\Omega) = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \begin{cases} \log\frac{1+z}{1-z} + \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, & z \le \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}\log 3 + \arcsin\frac{\sqrt{3-4z}}{2\sqrt{1+z^2}}, & \frac{1}{2} < z < \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \frac{1}{2}\log 3, & \frac{1}{\sqrt{3}} \le z \le 1, \end{cases}$$

- для дробей, соответствующих функции β^*

$$\begin{aligned} \rho_1(z;\Omega) &= \frac{1}{\Phi(\Omega)} \begin{cases} \log\frac{1+z}{1-z} + \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, & z \le \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}\log\frac{7t_+ + 3}{t_+ + 1}, & \frac{1}{2} < z \le 1, \end{cases} \\ t_+ &= \frac{2z - 3 + \sqrt{-4z^2 - 2z + 6}}{3 - 4z}. \end{aligned}$$

Величина $\Phi(\Omega)$ определена в примере 2. Функция плотности $\rho_2(z;\Omega)$ вычисляется по формуле, представленной в следствии 4 с $z_2 = 0$ и

- для диагональных дробей $t_-(z) = \frac{1-2z}{2},\ t_+(z) = 1 - \sqrt{2z}$,
- для эллиптических дробей $t_-(z) = \frac{1-z+\sqrt{3-3z^2}}{2(1+z)},\ t_+(z) = \frac{-z+\sqrt{1-3z^2}}{1+2z}$,
- для дробей, соответствующих функции β^* $t_-(z) = \frac{1-2z+\sqrt{5-4z^2}}{4(1+z)},\ t_+(z) = \frac{1-2z+\sqrt{2(2+z)(1-2z)}}{3+4z}$.

Для вычисления предельного распределения последовательности $\{\Upsilon_k(x)\}_{k\ge1}$ согласно теореме 3 определим

$$z_{max} = \begin{cases} 1/2, & \text{для диагональных дробей;} \\ 1/\sqrt{3}, & \text{для эллиптических дробей;} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}, & \text{для дробей, соответствующих функции } \beta^*, \end{cases}$$

и

$$\rho_3(z;\Omega) = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \begin{cases} 1, & z \in [0, 1/2], \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{1-3z^2}}{z} & \text{для эллиптических дробей и} \\ \frac{\sqrt{1-z-z^2}}{z} & \text{для дробей, соответствующих функции } \beta^* \end{cases}, & z \in [1/2, z_{max}]. \end{cases}$$

Тогда $\lim_{k\to\infty} F_k(z;\Omega) = \frac{z}{\Phi(\Omega)}$, если $z \in [0, 1/2]$ и в случае $z \in [1/2, z_{max}]$

$$
\lim_{k\to\infty} F_k(z;\Omega) = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \begin{cases} \sqrt{1-3z^2} + \log \frac{3z}{1+\sqrt{1-3z^2}} & \text{для эллиптических дробей и} \\ \sqrt{1-z-z^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2z+1}{\sqrt{5}} + & \\ +\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + & \\ +\log\frac{5z(z+1)}{(1+\sqrt{1-z-z^2})(1z+1+\sqrt{1-z-z^2}} & \text{для дробей, соответствующих функции } \beta^*. \end{cases}
$$

Из теоремы 3 сразу следует

Замечание 1. *Почти для всех* x

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Upsilon_k(x) = \frac{1}{\Phi(\Omega)}\cdot\left(\frac{1}{8}+\int_{1/2}^{z_{max}} z^2\left(\frac{t_2(z)}{\beta(t_1(z))}-\frac{t_1(z)}{\beta(t_2(z))}\right)dz\right).
$$

Доказательство. Мы показали, что последовательность $\{\Upsilon_k(x)\}_{k\geq 1}$ имеет предельное распределение $F(z;\Omega) = \lim_{k\to\infty} F_k(z;\Omega)$. Поэтому предел последовательности

$$
\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Upsilon_k(x)\right\}_{n\geq 1}
$$

существует и равен $\int_0^1 z dF(z;\Omega)$ — [12]. Замечание доказано. □

Для диагональных дробей эта величина равна $1/4 = 0.25$, для эллиптических дробей — $\frac{\pi}{6\sqrt{3}\log 3} \approx 0.275165$, для дробей, соответствующих функции β^* — $2(\frac{5\pi}{16} - \frac{1}{8} - \frac{5}{8}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}})/(\log 5 - \arctan 3 + \frac{\pi}{4}) \approx 0.287626$.

Список литературы

[1] H. Nakada *Metrical theory for a Class of Continued Fractions Transformations and Their Natural Extensions* Tokyo J. Math., 1981, V. 4, Стр. 399-426

[2] P. Levy *Sur le loide probabilite dont dependent les quotients complets wet incompletes d'une fraction continue* Bull. Soc. Math. de France,1929, №57, Стр. 178-194

[3] W Doeblin *Remarques sur la theorie metrique des fractions continues* Comp. Math., 1940, №7, Стр. 353-371

[4] D.E. Knuth *The distribution of continued fraction approximations* J/ Number Theory, 1984, №19, Стр. 443-448

[5] W Bosma, H. Jager, F. Wiedijk *Some metrical observations on the approximation by continued fractions* Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 1983, V. 45 №3, Стр. 281-299

[6] K. Dajani, C Kraaikamp *Ergotic Theory of Numbers*, 2002, Carus Mathematical Monographs,29. Mathematical Association of America, Washington, DC

[7] CH. Hermite *Sur L'introduction des variables continues dans la theorie des nombres* Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1861, V. 41

[8] H. Minkowski *Zur Theorie der Kettenbruche* Annales de l'Ecole Normale Superieure, 1894, V.13. №3, Стр. 41-60

[9] О.А. Горкуша *О конечных цепных дробях специального вида* Чебышевский сборник, 2008, V. 9, №1(25), Стр. 80-108

[10] K. Petersen *Ergotic Theory*, 1983, Cambridge University Press. Cambridge

[11] K.Th. Vahlen *Über die raschesten Kettenbruchentwicklungen reeller Zahlen* Monatsh. Math. Phys., 1913, №24, Стр. 221-233

[12] P.D.T.A. Elliott *Probabilistic Number Theory I*, 1979, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin