УДК 511.39+511.9

ПРИВЕДЕНИЕ БАЗИСОВ ТРЕХМЕРНЫХ РЕШЕТОК

О. А. Горкуша

Аннотация

Вороной показал, что для трехмерных полных решеток любые два смежных относительных минимума можно дополнить до базиса некоторым третьим узлом. В данной работе доказывается, что для неприводимых решеток в качестве этого третьего узла всегда можно выбрать относительный минимум решетки.

As it was shown by Voronoy that for three-dimentional complete lattices any two neighboring minima can be added up to basis by the third point. The work proves that for prime lattices it is always possible to choose minima in the capacity of this third point.

Введение

Под s-мерной полной решеткой (в дальнейшем просто решеткой) понимают множество целочисленных комбинаций

$$\Gamma = \{m_1\gamma^{(1)} + m_2\gamma^{(2)} + \dots + m_s\gamma^{(s)} | m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}$$

линейно-независимых векторов $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(s)} \in \mathbb{R}^s$, именуемых базисом решетки Γ. Среди всех узлов решетки особый интерес представляют так называемые относительные минимумы решеток. Впервые их начали изучать независимо друг от друга Г.Ф.Вороной и Г.Минковский в конце прошлого века (см.[1]).

Узел решетки $\gamma \in \Gamma' = \Gamma \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ называют относительным минимумом (в дальнейшем просто минимум), если параллелепипед

$$\Pi(\gamma) = \left\{(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s \middle| |x_i| \le |\gamma_i| \text{ для всех } i = 1, \dots, s\right\}$$

не содержит узлов из Γ', отличных от вершин $\Pi(\gamma)$. Поскольку для каждого $\gamma \in \Gamma$ узел $-\gamma$ также является элементом решетки и $\Pi(\gamma) = \Pi(-\gamma)$, то γ и $-\gamma$ могут быть только одновременно минимумами. Возможна ситуация, когда более двух вершин $\Pi(\gamma)$ являются минимумами.

Множество всех минимумов решетки Γ обозначим через $\mathfrak{M}_\Gamma$. Оно конечно только в том случае, когда для базисных векторов $\gamma^{(1)} = (\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_s^{(1)}), \dots, \gamma^{(s)} = (\gamma_1^{(s)}, \dots, \gamma_s^{(s)})$ найдутся отличные от нуля вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ и целые числа $a_i^{(j)}$, для которых выполняются равенства

$$(\gamma_i^{(1)}, \dots, \gamma_i^{(s)}) = \lambda_i(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(s)}); i = 1, \dots, s.$$

В любом другом случае $\mathfrak{M}_\Gamma$ — бесконечное множество, и минимумы асимптотически группируются около координатных плоскостей.

Пусть $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{M}_\Gamma$. Следуя [1], назовем γ' смежным с γ по координате i, если:

1) $|\gamma'_i| > |\gamma_i|$ и $|\gamma'_j| \le |\gamma_j|$ для всех $j \ne i$;

2) не существует $\tilde\gamma \in \Gamma$ с $|\gamma_i| < |\tilde\gamma_i| < |\gamma'_i|$ и $|\tilde\gamma_j| \le |\gamma_j|$ для всех $j \ne i$.

Множество всех таких γ' обозначим через $\mathfrak{M}_\Gamma^{(i)}(\gamma)$.

В двумерном случае Г.Ф.Вороной доказал, что любые два смежных минимума порождают решетку. Опираясь на этот факт, он построил алгоритм последовательного нахождения всех минимумов решеток в $\mathbb{R}^2$, по виду напоминающий алгоритм разложения числа в непрерывную цепную дробь. Используя понятие приведенного базиса $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}\}$, у которого $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)} \in \mathfrak{M}_\Gamma$ и $\gamma^{(2)}$ смежен с $\gamma^{(1)}$ по какой-либо координате, ему удалось реализовать аналог этой конструкции для трехмерных решеток. Отметим при этом, что $\gamma^{(3)}$ можно заменить любым вектором вида $\pm\gamma^{(3)} + n\gamma^{(1)} + m\gamma^{(2)}$ с произвольными целыми n и m.

В работе [2] при изучении приведенных базисов среди всех возможных узлов $\gamma^{(3)}$ выбирался лишь один, удовлетворяющий специальному условию минимальности. При таком выборе приведенного базиса, для неприводимых решеток (координаты всех узлов которых, за исключением $(0,0,0)$, отличны от нуля) мы доказываем, что $\gamma^{(3)}$— минимум. Аналогичное утверждение верно и для произвольных решеток в $\mathbb{R}^3$. Его доказательство отличается лишь громоздкостью и не требует новых идей.

Автор признательна В.А.Быковскому за постановку задачи и внимание.

§1. Приведенные базисы трехмерных решеток

Обозначим через Ω множество четверок

$$(\Gamma; \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}), \tag{1}$$

состоящих из неприводимых решеток Γ и приведенных по Вороному базисов $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}\}$ для Γ, у которых :

а) $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$— минимумы,

б) $\gamma^{(2)}$ смежен с $\gamma^{(1)}$ по некоторой координате.

Обозначим через Ω_1 подмножество в Ω, состоящее из четверок (1), у которых $\gamma^{(2)}$ смежен с $\gamma^{(1)}$ по первой координате. Далее $\Omega_1^{(+)}$ — подмножество в Ω_1, состоящее из четверок (1), для которых:

а) все координаты $\gamma^{(1)}$ положительны;

б) у узла $\gamma^{(2)}$ первая координата положительна, а вторая отрицательна.

Пусть $\sigma = \big(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)\big)$ — любая перестановка чисел (1,2,3) и $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — произвольный набор вещественных чисел, отличных от нуля. Определим отображение $F_\Lambda^{(\sigma)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ по правилу:

$$(x_1, x_2, x_3) \to (\lambda_1 x_{\sigma(1)}), \lambda_2 x_{\sigma(2)}, \lambda_3 x_{\sigma(3)}),$$

которое преобразует решетку Γ в решетку $\tilde{\Gamma} = F_{\Lambda}^{(\sigma)}(\Gamma)$. Из определения непосредственно следует, что

$$F_{\Lambda}^{(\sigma)}(\mathfrak{M}_{\Gamma}) = \mathfrak{M}_{\tilde{\Gamma}}, \tag{2}$$

и для $\tilde{\gamma} = F_{\Lambda}^{(\sigma)}(\gamma)$ с $\gamma \in \mathfrak{M}_{\Gamma}$

$$F_{\Lambda}^{(\sigma)}\big(\mathfrak{M}_{\Gamma}^{(i)}(\gamma)\big) = \mathfrak{M}_{\tilde{\Gamma}}^{(\sigma(i))}(\tilde{\gamma}). \tag{3}$$

Согласно [2], любой четверке (1) можно сопоставить с помощью некоторого преобразования $F_{\Lambda}^{(\sigma)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{-1, 1\})$ четверку из $\Omega_1^{(+)}$ по правилу

$$(\tilde{\Gamma}; \tilde{\gamma}^{(1)}, \tilde{\gamma}^{(2)}, \tilde{\gamma}^{(3)}) = \Theta(\Gamma; \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}) =$$
$$= (F_{\Lambda}^{(\sigma)}(\Gamma); F_{\Lambda}^{(\sigma)}(\gamma^{(1)}), F_{\Lambda}^{(\sigma)}(\gamma^{(2)}), F_{\Lambda}^{(\sigma)}(\gamma^{(3)})),$$

которое определяет отображение

$$\Theta : \Omega \to \Omega_1^{(+)}. \tag{4}$$

Пусть $(\Gamma; \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}) \in \Omega_1^{(+)}$. Поскольку для любого вектора $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ существуют целые m, n и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ с $-1/2 < \alpha, \beta \leq 1/2$, для которых выполняется равенство

$$(x_1, x_2) = n(\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}) + m(\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}) + \alpha(\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}) + \beta(\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}),$$

то мы всегда можем выбрать узел $\gamma^{(3)}$ с

$$|\gamma_1^{(3)}| < \gamma_1^{(2)}; |\gamma_2^{(3)}| < \gamma_2^{(1)}. \tag{5}$$

Среди всех узлов решетки γ, составляющих с $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ базис и удовлетворяющих условиям (5), выберем узел с наименьшей неотрицательной третьей координатой. Обозначим через Ω_1^* подмножество $\Omega_1^{(+)}$, состоящее из четверок (1), у которых $\gamma_1^{(3)}, \gamma_2^{(3)}$ удовлетворяют условию (5) и положительное $\gamma_3^{(3)}$ минимально. Назовем базис $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ решетки Γ приведенным, если

$$(\Gamma; \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}) \in \Omega^* = \Theta^{-1}(\Omega_1^*) \subset \Omega. \tag{6}$$

Эта конструкция для приведенного базиса (уточнение определения Вороного) была предложена в [2].

Пусть $(\Gamma; \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}) \in \Omega_1^*$. Поскольку неравенство $0 < \gamma_3^{(3)} \leq \gamma_3^{(1)}$ противоречит выбору $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$, то всегда

$$|\gamma_1^{(3)}| < \gamma_1^{(2)}, |\gamma_2^{(3)}| < \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(3)} > \gamma_3^{(1)}. \tag{7}$$

Выпишем следующие узлы решетки:

$$\xi^{(1)} = \gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}, \xi^{(2)} = \gamma^{(3)} + \gamma^{(2)}, \xi^{(3)} = \gamma^{(3)} - \gamma^{(2)},$$

$$\xi^{(4)}=\gamma^{(3)}-\gamma^{(1)}+\gamma^{(2)},\xi^{(5)}=\gamma^{(3)}-\gamma^{(1)}-\gamma^{(2)}.$$

В [2] было отмечено, что наличие таких узлов в решетке Γ накладывает дополнительные ограничения на координаты узлов приведенного базиса. Приведем их.

Если $-\gamma_3^{(1)}<\gamma_3^{(2)}<0$, то (из-за $\xi^{(1)},\xi^{(2)}$)

$$-\gamma_2^{(1)}<\gamma_2^{(3)}<0 \tag{8}$$

и (из-за $\xi^{(5)}$)

$$\gamma_1^{(3)}<\gamma_1^{(1)}, \text{или} \gamma_2^{(3)}<\gamma_2^{(2)}. \tag{9}$$

Если $-\gamma_3^{(1)}<\gamma_3^{(2)}<0$ и $-\gamma_1^{(2)}<\gamma_1^{(3)}<0$, то (из-за $\xi^{(2)}$)

$$\gamma_2^{(2)}+\gamma_2^{(3)}<-\gamma_2^{(1)}. \tag{10}$$

Если $0<\gamma_3^{(2)}<\gamma_3^{(1)}$, то (из-за $\xi^{(1)},\xi^{(3)}$)

$$-\gamma_1^{(2)}<\gamma_1^{(3)}<0, \tag{11}$$

а также из-за $\xi^{(4)}$ и (11)

$$\gamma_2^{(3)}+\gamma_2^{(2)}<0. \tag{12}$$

Если $0<\gamma_3^{(2)}<\gamma_3^{(1)}$ и $0<\gamma_2^{(3)}<\gamma_2^{(1)}$, то (из-за $\xi^{(1)}$)

$$-\gamma_1^{(2)}<\gamma_1^{(3)}<\gamma_1^{(1)}-\gamma_1^{(2)}. \tag{13}$$

В соответствии с ограничениями (8)–(13), базисные узлы

$$\gamma^{(1)},\gamma^{(2)},\gamma^{(3)}$$

из $(\Gamma;\gamma^{(1)},\gamma^{(2)},\gamma^{(3)})\in\Omega_1^*$ принадлежат одному из следующих четырех типов:

$$(I)\ (a_1,a_2,a_3),(b_1,-b_2,-b_3),(c_1,-c_2,c_3) \tag{14}$$

$$(II)\ (a_1,a_2,a_3),(b_1,-b_2,-b_3),(-c_1,-c_2,c_3) \tag{15}$$

$$(III)\ (a_1,a_2,a_3),(b_1,-b_2,b_3),(-c_1,c_2,c_3) \tag{16}$$

$$(IV)\ (a_1,a_2,a_3),(b_1,-b_2,b_3),(-c_1,-c_2,c_3). \tag{17}$$

Здесь $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3$,— положительные числа. При этом Ω_1^* разбивается на четыре непересекающиеся подмножества

$$\Omega_1^*(I),\Omega_1^*(II),\Omega_1^*(III),\Omega_1^*(IV),$$

в соответствии с (14)–(17).

§2. Структура приведенного базиса

Теорема *Если* $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ *— приведенный базис, то* $\gamma^{(3)}$ *— минимум.*

Доказательство. В соответствии с (2), (3) и (6) утверждение теоремы достаточно доказать для

$$(\Gamma; \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}) \in \Omega_1^*. \tag{18}$$

При этом (2) относится к одному из четырех типов, перечисленных в §1. Доказывать будем методом от противного.

Пусть $\gamma^{(3)}$— не минимум. Следовательно, существует $\gamma \in \Gamma'$ с

$$\Pi(\gamma) \subset \Pi(\gamma^{(3)}). \tag{19}$$

Так как $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ — базис решетки Γ, то найдутся целые числа m_1, m_2, m_3, для которых

$$\gamma = m_1\gamma^{(1)} + m_2\gamma^{(2)} + m_3\gamma^{(3)}.$$

Поскольку $|\gamma_2^{(3)}| < |\gamma_2^{(1)}|$ и $|\gamma_1^{(3)}| < |\gamma_1^{(2)}|$, то включения $\Pi(\gamma^{(1)}) \subseteq \Pi(\gamma^{(3)})$ и $\Pi(\gamma^{(2)}) \subseteq \Pi(\gamma^{(3)})$ невозможны, а поэтому из трех целых m_1, m_2, m_3 всегда найдутся два, отличных от нуля. Так как $\Pi(\gamma) = \Pi(-\gamma)$, то можно считать, что $m_1 \geq 0$.

1. Пусть $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$— базис I типа. В соответствии с (14):

а) для $m_2 > 0$ и $m_3 \geq 0$

$$\gamma_1 = m_1a_1 + m_2b_1 + m_3c_1 > c_1;$$

б) для $m_2 \leq 0$ и $m_3 > 0$

$$\gamma_3 = m_1a_3 + |m_2|b_3 + m_3c_3 > c_3;$$

в) для $m_2 \leq 0$ и $m_3 \leq 0$

$$\gamma_2 = m_1a_2 + |m_2|b_2 + |m_3|c_2 > c_2.$$

Пусть теперь $m_2 > 0$ и $m_3 < 0$. Согласно (9), либо $c_1 < a_1$, либо $b_2 < c_2$. Для $c_1 < a_1$ находим:

1) при $|m_3| \geq m_1 + 1$

$$\gamma_3 = m_1a_3 - m_2b_3 - |m_3|c_3 \leq m_1a_3 - m_2b_3 - (1 + m_1)c_3 =$$
$$= -c_3 + m_1(a_3 - c_3) - m_2b_3 < -c_3;$$

2) при $|m_3| \leq m_1$

$$\gamma_1 = m_1a_1 + m_2b_1 - |m_3|c_1 > m_1c_1 + m_2c_1 - |m_3|c_1 =$$
$$= c_1(m_1 + m_2 - |m_3|) \geq c_1.$$

Точно так же для $b_2 < c_2$ получаем:

1) при $|m_3| \le m_2 - 1$

$$\gamma_1 = m_1a_1 + m_2b_1 - |m_3|c_1 \ge m_2b_1 - (m_2 - 1)c_1 =$$
$$= c_1 + m_2(b_1 - c_1) > c_1;$$

2) при $|m_3| \ge m_2$ и $m_1 > 0$

$$\gamma_2 = m_1a_2 - m_2b_2 + |m_3|c_2 > m_1a_2 - m_2b_2 + |m_3|b_2 =$$
$$= m_1a_2 + b_2(|m_3| - m_2) \ge a_2 > c_2;$$

3) при $m_1 = 0$

$$\gamma_3 = -m_2b_3 - |m_3|_3 < -_3.$$

Следовательно, для базисов I типа и всех узлов $\gamma \ne \gamma^{(3)}$ из Γ'

$$\Pi(\gamma) \not\subseteq \Pi(\gamma^{(3)}).$$

2. Пусть $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$— базис II типа. В соответствии с (15):

а) для $m_2 > 0$ и $m_3 \le 0$

$$\gamma_1 = m_1a_1 + m_2b_1 + |m_3|c_1 > c_1;$$

б) для $m_2 \le 0$ и $m_3 > 0$

$$\gamma_3 = m_1a_3 + |m_2|b_3 + m_3c_3 > c_3;$$

в) для $m_2 \le 0$ и $m_3 \le 0$

$$\gamma_2 = m_1a_2 + |m_2|b_2 + |m_3|c_2 > c_2.$$

Пусть теперь $m_2 > 0$ и $m_3 > 0$. Тогда:

1) при $m_3 \le m_2 - 1$

$$\gamma_1 = m_1a_1 + m_2b_1 - m_3c_1 \ge m_1a_1 + m_2b_1 - (m_2 - 1)c_1 =$$
$$= c_1 + m_2(b_1 - c_1) + m_1a_1 > c_1;$$

2) при $m_3 \ge m_2$ и $m_1 > 0$

$$\gamma_3 = m_1a_3 - m_2b_3 + m_3c_3 \ge m_1a_3 - m_2b_3 + m_2c_3 =$$
$$= a_3m_1 + m_2(c_3 - b_3) \ge a_3 - b_3 + c_3 > c_3;$$

3) при $m_1 = 0$

$$\gamma_2 = -m_2b_2 - m_3c_2 < -c_2.$$

Следовательно, для базисов II типа и всех узлов $\gamma \ne \gamma^{(3)}$ из Γ'

$$\Pi(\gamma) \not\subseteq \Pi(\gamma^{(3)}).$$

3. Пусть $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$— базис III типа. В соответствии с (16):

а) для $m_2 \geq 0$ и $m_3 > 0$

$$\gamma_3 = m_1 a_3 + m_2 b_3 + m_3 c_3 > c_3;$$

б) для $m_2 \geq 0$ и $m_3 \leq 0$

$$\gamma_1 = m_1 a_1 + m_2 b_1 + |m_3| c_1 > c_1;$$

в) для $m_2 < 0$ и $m_3 \geq 0$

$$\gamma_2 = m_1 a_2 + |m_2| b_2 + m_3 c_2 > c_2.$$

Пусть теперь $m_2 < 0$ и $m_3 < 0$. Согласно (12) и (13), $c_2 < b_2$ и $c_1 > b_1 - a_1$. Тогда:

1) при $|m_3| \leq m_1$ и $|m_3| \geq |m_2| + 1$

$$\gamma_1 = m_1 a_1 - |m_2| b_1 + |m_3| c_1 > a_1 m_1 - |m_2| b_1 + |m_3|(b_1 - a_1) =$$
$$= a_1(m_1 - |m_3|) + b_1(|m_3| - |m_2|) \geq b_1 > c_1;$$

2) при $|m_3| \leq |m_2|$ и $m_1 > 0$

$$\gamma_2 = m_1 a_2 + |m_2| b_2 - |m_3| c_2 \geq m_1 a_2 + |m_2| b_2 - |m_2| c_2 =$$
$$= a_2 m_1 + |m_2|(b_2 - c_2) > a_2 > c_2;$$

3) при $m_1 = 0$

$$\gamma_3 = -|m_2| b_3 - |m_3| c_3 < -c_3;$$

4) при $|m_3| > m_1$

$$\gamma_3 = m_1 a_3 - |m_2| b_3 - |m_3| c_3 \leq m_1 a_3 - |m_2| b_3 - c_3(m_1 + 1) =$$
$$= -c_3 + m_1(a_3 - c_3) - |m_2| b_3 < -c_3.$$

Следовательно, для базисов III типа и всех узлов $\gamma \neq \gamma^{(3)}$ из Γ'

$$\Pi(\gamma) \not\subseteq \Pi(\gamma^{(3)}).$$

4. Пусть $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$— базис IV типа. В соответствии с (17): а) для $m_2 \geq 0$ и $m_3 > 0$

$$\gamma_3 = m_1 a_3 + m_2 b_3 + m_3 c_3 > c_3;$$

б) для $m_2 \geq 0$ и $m_3 \leq 0$

$$\gamma_1 = m_1 a_1 + m_2 b_1 + |m_3| c_1 > c_1;$$

в) для $m_2 < 0$ и $m_3 \leq 0$

$$\gamma_2 = m_1 a_2 + |m_2| b_2 + |m_3| c_2 > c_2.$$

Пусть теперь $m_2 < 0$ и $m_3 > 0$. Тогда:

1) при $m_3 \geq |m_2|$ и $m_1 > 0$

$$\gamma_3 = m_1 a_3 - |m_2| b_3 + m_3 c_3 \geq a_3 m_1 - |m_2| b_3 + |m_2| c_3 =$$
$$= a_3 m_1 + |m_2|(c_3 - b_3) \geq a_3 + c_3 - b_3 > c_3;$$

2) при $m_1 = 0$

$$\gamma_1 = -|m_2| b_1 - m_3 c_1 < -c_1;$$

3) при $m_3 \leq |m_2| - 1$ и $m_3 \geq m_1$

$$\gamma_1 = m_1 a_1 - |m_2| b_1 - m_3 c_1 \leq m_3 a_1 - b_1(m_3 + 1) - c_1 m_3 =$$
$$= -b_1 + m_3(a_1 - b_1 - c_1) < -b_1 < -c_1;$$

4) при $m_3 \leq |m_2| - 1$ и $m_3 \leq m_1 - 1$

$$\gamma_2 = m_1 a_2 + |m_2| b_2 - m_3 c_2 \geq a_2(m_3 + 1) + b_2(m_3 + 1) - c_2 m_3 =$$
$$= a_2 + b_2 + m_3(a_2 + b_2 - c_2) > a_2 > c_2.$$

Следовательно, для базисов IV типа и всех узлов $\gamma \neq \gamma^{(3)}$ из $\mathit{\Gamma}'$

$$\mathit{\Pi}(\gamma) \nsubseteq \mathit{\Pi}(\gamma^{(3)}).$$

Для всех типов решеток мы показали, что предположение (19) неверно. Таким образом, $\gamma^{(3)}$ является минимумом решетки $\mathit{\Gamma}.yy$ Теорема доказана. $\square$

Список литературы

[1] *Вороной Г.Ф.* Собрание сочинений., Т. 1., Киев, (1952).

[2] *Быковский В.А.* Теорема Валена для двумерных подходящих дробей., Препринт/ ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука, 1998.