УДК 511.9

МИНИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ТРЕХМЕРНЫХ ПОЛНЫХ РЕШЕТОК

В. А. Быковский (г. Хабаровск), О. А. Горкуша (г. Хабаровск)

Аннотация

Изучены базисы Минковского для трехмерных решеток.

Обозначим через $\mathfrak{L}_s(\mathbb{R})$ $(s = 2, 3, ...)$ множество всех полных решеток в $\mathbb{R}^s$. Каждая матрица $M \in GL_s(\mathbb{R})$ определяет решетку $\Gamma(M) \in \mathfrak{L}_s(\mathbb{R})$, которая порождается базисными узлами $\gamma^{(1)}, ..., \gamma^{(s)}$, составленными из столбцов M. При этом $\Gamma(M) = \Gamma(M')$ тогда и только тогда, когда $M' = MU$ для некоторой унимодулярной матрицы U. При построении многомерных аналогов алгоритма цепных дробей в рамках теории "относительных минимумов"Вороного и Минковского [1] и [2], среди всех возможных базисов (соответственно матриц) естественным образом выделяются так называемые *минимальные базисы (минимальные матрицы).* В настоящей работе изучается структура минимальных базисов трехмерных решеток из $\mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$, где

$$\mathfrak{L}_s^*(\mathbb{R}) = \big\{\Gamma \in \mathfrak{L}_s(\mathbb{R}) \mid \forall(\gamma_1, ..., \gamma_s) \in \Gamma' : \ \gamma_1 \neq 0, ..., \gamma_s \neq 0\big\}.$$

Здесь $\Gamma' = \Gamma \setminus \{(0, ..., 0)\}$. Для решеток $\Gamma \in \mathfrak{L}_s^*(\mathbb{R})$ справедливо следующее важное

Замечание 1. Пусть $\gamma \neq \pm\gamma'$ — узлы из Γ'. Тогда $|\gamma_i| \neq |\gamma_i'|$ при всех $i = 1, ..., s$.

Для непустого конечного $T \subset \mathbb{R}^s$ и $i = 1, ..., s$ положим

$$|T|_i = max\big\{|x_i| \ \big|(x_1, ..., x_i, ..., x_s) \in T\big\}.$$

Следуя [2] и [3], для $\Gamma \in \mathfrak{L}_s^*(\mathbb{R})$ назовем $S = \big\{\gamma^{(1)}, ..., \gamma^{(t)}\big\} \subset \Gamma'$ минимальным, если:

а) $\gamma^{(i)} \neq \pm\gamma^{(j)}$ при всех $1 \leq i < j \leq t$;

б) не существует $\widetilde{\gamma} \in \Gamma'$ с $|\widetilde{\gamma}_i| < |S|_i$ при всех $i = 1, ..., s$.

Если S состоит из одного элемента, то мы приходим к понятию "относительный минимум"(в дальнейшем просто минимум) из [1]. Справедливо

Замечание 2. Любое непустое подмножество минимального множества S также минимально. В частности, все элементы S минимумы.

Согласно [1] и [3] минимумы γ и γ', для которых множество $\{\gamma, \gamma'\}$ — минимально, называются смежными. Базис $\gamma^{(1)}, ..., \gamma^{(s)}$ решетки $\Gamma \in \mathfrak{L}_s^*(\mathbb{R})$, составляющий минимальное множество, назовем минимальным базисом. Решетки из $\mathfrak{L}_s^*(\mathbb{R})$ определяются матрицами соответствующего подмножества $GL_s^*(\mathbb{R})$ в $GL_s(\mathbb{R})$. Назовем матрицу $M \in GL_s^*(\mathbb{R})$ минимальной, если $\gamma^{(1)}(M), ..., \gamma^{(s)}(M)$ (столбцы M) составляют минимальный базис в $\Gamma(M)$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_s$ семейство всех отображений

$$F:\ GL_s(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_s(\mathbb{R}),$$

состоящее из композиций преобразований $GL_s(\mathbb{R})$ в себя вида:

а) перестановки строк и столбцов;

б) одновременное изменение знака у всех элементов некоторых строк и столбцов.

Очевидно, что множество $GL_s^*(\mathbb{R})$ и его подмножество минимальных матриц инвариантны относительно действия преобразований из $\mathfrak{F}_s$.

Пусть $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ базис $\Gamma \in \mathfrak{L}_2^*(\mathbb{R})$ и $M \in GL_2^*(\mathbb{R})$ соответствующая ему матрица, столбцы которой составлены из $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$. Легко проверить, что если для некоторого преобразования $F \in \mathfrak{F}_2$

$$F(M) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

с $0 < a_1 < b_1$ и $0 < b_2 < a_2$, то множество $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\}$ — минимально и M минимальная матрица. Вороной [1] доказал обратное утверждение в следующем виде. Пусть $\{\gamma^{(1)},\ \gamma^{(2)}\}$ — минимальное множество для $\Gamma \in \mathfrak{L}_2^*(\mathbb{R})$. Тогда $\gamma^{(1)},\ \gamma^{(2)}$ составляют базис Γ, а для соответствующей ему матрицы M выполнено (0.1) с некоторым $F \in \mathfrak{F}_2$.

В настоящей работе мы изучаем эти вопросы для трехмерных решеток и доказываем следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ базис $\Gamma \in \mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$ и $M \in GL_3^*(\mathbb{R})$ соответствующая ему матрица. Предположим, что для некоторого преобразования $F \in \mathfrak{F}_3$ матрица $F(M)$ имеет один из следующих двух видов:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

с положительными a_i, b_i, c_i, у которых в обоих случаях $a_1 < b_1$, $c_1 < b_1$, $b_2 < a_2$, $c_2 < a_2$, $a_3 < c_3$, $b_3 < c_3$, и в первом случае выполняется хотя бы одно из неравенств $c_1 < a_1$, $b_2 < c_2$, а во втором $b_2 + c_2 > a_2$, $b_3 < a_3$. Тогда множество $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}\}$ минимально.

Теорема 2. Пусть $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}\}$ — минимальное множество в $\Gamma \in \mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$ с линейно независимыми узлами. Тогда:

а) $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ составляют базис Γ;

б) для соответствующей матрицы M найдется преобразование $F \in \mathfrak{F}_3$, для которого матрица $F(M)$ имеет один из двух видов в (0.2).

Ранее, в [2] Минковский доказал утверждение а) теоремы другим методом. Вороной [1] установил (см. также [4]), что любую пару смежных минимумов $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ решетки $\Gamma \in \mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$ можно дополнить третьим узлом $\gamma^{(3)}$ до базиса. Очевидно, что в качестве $\gamma^{(3)}$ может фигурировать любой другой узел вида

$\pm(\gamma^{(3)}+m_1\gamma^{(1)}+m_2\gamma^{(2)})$ с произвольными целыми m_1 и m_2. Мы доказываем более сильное утверждение.

Теорема 3. Любую пару $\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}$ смежных минимумов решетки $\Gamma \in \mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$ можно дополнить третьим узлом $\gamma^{(3)}$ до минимального базиса.

Ранее в [5] было доказано, что в качестве $\gamma^{(3)}$ можно выбрать минимум решетки Γ.

§1. Достаточные условия минимальности базиса

Напомним, что решетка в $\mathbb{R}^3$ — множество целочисленных комбинаций

$$\Gamma = \{m_1\gamma^{(1)} + m_2\gamma^{(2)} + m_3\gamma^{(3)} \mid m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\},$$

где $\gamma^{(1)},\gamma^{(2)},\gamma^{(3)}$ — линейно независимые вектора из $\mathbb{R}^3$. Как уже отмечалось во введении, мы будем иметь дело только с решетками из $\mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$. Положим для любого $x \in \mathbb{R}^3$

$$\Gamma'(x) = \big\{\gamma \in \Gamma' \big| \ |\gamma_i| \le |x_i|;\ i = 1,2,3\big\}.$$

Лемма 1. Пусть $\Gamma \in \mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$ — решетка, порожденная базисными узлами

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} &= (a_1, a_2, a_3),\\ \gamma^{(2)} &= (b_1, -b_2, -b_3),\\ \gamma^{(3)} &= (c_1, -c_2, c_3) \end{aligned} \tag{3}$$

с положительными a_i, b_i, c_i, для которых выполнены условия:

1) $max(a_1, c_1) < b_1$, $max(b_2, c_2) < a_2$, $max(a_3, b_3) < c_3$;

2) выполняется хотя бы одно из неравенств

$$c_1 < a_1,\ b_2 < c_2.$$

Тогда $\gamma^{(1)},\gamma^{(2)},\gamma^{(3)}$ — минимальный базис.

Доказательство. Ввиду условий 1) достаточно показать, что

$$\Gamma'(b_1, a_2, c_3) = \{\pm\gamma^{(1)}, \pm\gamma^{(2)}, \pm\gamma^{(3)}\}. \tag{4}$$

Любой узел $\gamma \in \Gamma'$ имеет вид:

$$\gamma = m_1\gamma^{(1)} + m_2\gamma^{(2)} + m_3\gamma^{(3)} = \tag{5}$$

$$= (m_1a_1 + m_2b_1 + m_3c_1, m_1a_2 - m_2b_2 - m_3c_2, m_1a_3 - m_2b_3 + m_3c_3),$$

где m_1, m_2, m_3 — целые числа, одновременно не равные нулю. Если в разложении (1.3) два числа из m_1, m_2, m_3 равны нулю, то $\gamma = m_i\gamma^{(i)}$. Из всех таких узлов только $\pm\gamma^{(i)} \in \Gamma'(b_1, a_2, c_3)$.

Рассмотрим теперь те узлы в Γ', у которых в разложении (1.3) хотя бы два числа из m_1, m_2, m_3 отличны от нуля. Без ограничения общности можно считать, что $m_1 \geq 0$. Тогда:

а) для $m_2 > 0$ и $m_3 \geq 0$

$$\gamma_1 = m_1 a_1 + m_2 b_1 + m_3 c_1 > b_1;$$

б) для $m_2 \leq 0$ и $m_3 > 0$

$$\gamma_3 = m_1 a_3 + |m_2| b_3 + m_3 c_3 > c_3;$$

в) для $m_2 \leq 0$ и $m_3 \leq 0$ в случае $m_1 > 0$

$$\gamma_2 = m_1 a_2 + |m_2| b_2 + |m_3| c_2 > a_2,$$

а в случае $m_1 = 0$

$$\gamma_1 = -|m_2| b_1 - |m_3| c_1 < -b_1.$$

Пусть теперь $m_2 > 0$ и $m_3 < 0$.

Согласно условию 2) леммы должно выполняться хотя бы одно из неравенств: $_1 < a_1$, $c_2 > b_2$.

Для $_1 < a_1$ находим:

а) при $|m_3| \geq m_1 + 1$

$$\begin{aligned}\gamma_3 = m_1 a_3 - m_2 b_3 - |m_3| c_3 \leq m_1 a_3 - m_2 b_3 - (m_1 + 1) c_3 = \\ = -c_3 + m_1 (a_3 - c_3) - m_2 b_3 < -c_3;\end{aligned}$$

б) при $|m_3| \leq m_1$

$$\begin{aligned}\gamma_1 = m_1 a_1 + m_2 b_1 - |m_3| c_1 > m_1 c_1 + m_2 b_1 - |m_3| c_1 = \\ = (m_1 - |m_3|) c_1 + m_2 b_1 \geq b_1.\end{aligned}$$

Для $b_2 < c_2$ получаем:

а) при $|m_3| \leq m_2 - 1$

$$\begin{aligned}\gamma_1 = m_1 a_1 + m_2 b_1 - |m_3| c_1 \geq m_1 a_1 + (|m_3| + 1) b_1 - |m_3| c_1 = \\ = b_1 + m_1 a_1 + |m_3| (b_1 - c_1) > b_1;\end{aligned}$$

б) при $|m_3| \geq m_2$ и $m_1 > 0$

$$\begin{aligned}\gamma_2 = m_1 a_2 - m_2 b_2 + |m_3| c_2 \geq m_1 a_2 - m_2 b_2 + m_2 c_2 = \\ = m_1 a_2 + m_2 (c_2 - b_2) > a_2;\end{aligned}$$

в) при $m_1 = 0$

$$\gamma_3 = -m_2 b_3 - |m_3| c_3 < -c_3.$$

Таким образом, для решетки $\Gamma \in \mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$ с базисными векторами (1.1)

$$\Gamma'(b_1, a_2, c_3) = \{\pm\gamma^{(1)}, \pm\gamma^{(2)}, \pm\gamma^{(3)}\}.$$

Следовательно, $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ составляют минимальный базис. Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть $\Gamma \in \mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$ — решетка, порожденная базисными узлами

$$\begin{gathered}\gamma^{(1)} = (a_1, a_2, a_3),\ \gamma^{(2)} = (b_1, -b_2, -b_3),\\ \gamma^{(3)} = (-c_1, -c_2, c_3)\end{gathered} \tag{6}$$

с положительными a_i, b_i, c_i, для которых выполнено условие 1) леммы 1 и при этом $a_2 < b_2 + c_2$, $b_3 < a_3$. Тогда $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ — минимальный базис.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\Gamma'(b_1, a_2, c_3) = \{\pm\gamma^{(1)}, \pm\gamma^{(2)}, \pm\gamma^{(3)}\}.$$

Так как $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ — базис решетки, то для любого узла $\gamma \in \Gamma'$ найдутся целые числа m_1, m_2, m_3, для которых

$$\gamma = m_1\gamma^{(1)} + m_2\gamma^{(2)} + m_3\gamma^{(3)} = \tag{7}$$

$$= (m_1a_1 + m_2b_1 - m_3c_1, m_1a_2 - m_2b_2 - m_3c_2, m_1a_3 - m_2b_3 + m_3c_3).$$

Достаточно ограничиться случаем, когда хотя бы два числа из m_1, m_2, m_3 отличны от нуля (см. начало доказательства леммы 1) и $m_1 \geq 0$. Тогда:

а) для $m_2 > 0$ и $m_3 \leq 0$

$$\gamma_1 = m_1a_1 + m_2b_1 + |m_3|c_1 > b_1;$$

б) для $m_2 \leq 0$ и $m_3 > 0$

$$\gamma_3 = m_1a_3 + |m_2|b_3 + m_3c_3 > c_3;$$

в) для $m_2 \leq 0$ и $m_3 \leq 0$ при $m_1 > 0$

$$\gamma_2 = m_1a_2 + |m_2|b_2 + |m_3|c_2 > a_2,$$

а при $m_1 = 0$

$$\gamma_2 = |m_2|b_2 + |m_3|c_2 \geq c_2 + b_2 > a_2.$$

Пусть теперь $m_2 > 0$ и $m_3 > 0$. Тогда:

а) при $m_3 \leq m_2 - 1$

$$\begin{gathered}\gamma_1 = m_1a_1 + m_2b_1 - m_3c_1 \geq m_1a_1 + (m_3+1)b_1 - m_3c_1 =\\ = b_1 + m_1a_1 + m_3(b_1 - c_1) > b_1;\end{gathered}$$

б) при $m_3 \geq m_2$ и $m_1 > 0$, учитывая что $b_3 < a_3$, находим

$$\begin{aligned}\gamma_3 = m_1 a_3 - m_2 b_3 + m_3 c_3 \geq m_1 a_3 - m_2 b_3 + m_2 c_3 = \\ = m_1 a_3 + m_2(c_3 - b_3) \geq a_3 - b_3 + c_3 > c_3.\end{aligned}$$

Таким образом, для решетки $\mathit{\Gamma} \in \mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$ с базисными узлами (1.4)

$$\mathit{\Gamma}'(b_1, a_2, c_3) = \{\pm\gamma^{(1)}, \pm\gamma^{(2)}, \pm\gamma^{(3)}\}.$$

Следовательно, узлы $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ составляют минимальный базис. Лемма 2 доказана. $\square$

Из лемм 1 и 2 непосредственно следует теорема 1, сформулированная во введении.

§1. Доказательство теорем 2 и 3

Определим $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_3$ из равенств

$$F_1 \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} & \gamma_1^{(3)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} & \gamma_2^{(3)} \\ \gamma_3^{(1)} & \gamma_3^{(2)} & \gamma_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_2^{(3)} & \gamma_2^{(1)} & -\gamma_2^{(2)} \\ \gamma_3^{(3)} & -\gamma_3^{(1)} & \gamma_3^{(2)} \\ \gamma_1^{(3)} & -\gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$F_2 \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} & \gamma_1^{(3)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} & \gamma_2^{(3)} \\ \gamma_3^{(1)} & \gamma_3^{(2)} & \gamma_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_3^{(1)} & \gamma_3^{(3)} & \gamma_3^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(3)} & \gamma_2^{(2)} \\ \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(3)} & \gamma_1^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. Пусть матрица

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \varepsilon c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

из $GL_3^*(\mathbb{R})$ минимальна, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и a_i, b_i, c_i — положительные числа, для которых b_1, a_2, c_3 максимальные числа в строках.

Тогда:

а) для $\varepsilon = 1$ хотя бы одна из матриц M, $F_1(M)$ принадлежит к первому типу из (0.2);

б) для $\varepsilon = -1$ хотя бы одна из матриц M, $F_2(M)$ принадлежит ко второму типу из (0.2).

Доказательство. Легко заметить, что $F_1(M)$ при $\varepsilon = 1$ и $F_2(M)$ при $\varepsilon = -1$ опять имеют вид (2.1).

<u>Пусть $\varepsilon = 1$.</u>

Если $c_1 > a_1$ и $b_2 > c_2$, то $b_3 > a_3$, поскольку узел

$$\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} - \gamma^{(3)} = (a_1 + b_1 - c_1, a_2 - b_2 + c_2, a_3 - b_3 - c_3)$$

не лежит в $\Gamma'(b_1, a_2, c_3)$. Тогда для матрицы $F_1(M)$ условие $b_3 > a_3$ эквивалентно условию $c'_2 > b'_2$, где b'_2, c'_2 соответствующие элементы матрицы $F_1(M)$. Таким образом, M или $F_1(M)$ принадлежит к первому типу из (0.2).

Пусть $\varepsilon = -1$.

Если $a_2 > b_2 + c_2$, то узел

$$\gamma^{(2)} + \gamma^{(3)} = (b_1 - c_1, -b_2 - c_2, -b_3 + c_3)$$

лежит в $\Gamma'(b_1, a_2, c_3)$, что противоречит минимальности матрицы M. Следовательно $a_2 < b_2 + c_2$ для всех M вида (2.1) с $\varepsilon = -1$.

Если $b_3 > a_3$, то $a_1 > c_1$, поскольку узел

$$\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)} = (a_1 + b_1 - c_1, a_2 - b_2 - c_2, a_3 - b_3 + c_3)$$

не лежит в $\Gamma'(b_1, a_2, c_3)$. Но тогда для матрицы $F_2(M)$ условие $a_1 > c_1$ эквивалентно неравенству $b''_3 < a''_3$ для соответствующих элементов матрицы $F_2(M)$. Таким образом, хотя бы одна из матриц M, $F_2(M)$ принадлежит ко второму типу из (0.2). Лемма 3 доказана. $\square$

Пусть γ, γ' — минимумы Γ и $i \in \{1, 2, 3\}$. Следуя [1] назовем γ' смежным с γ по координате i, если выполнены условия:

1) $|\gamma'_i| > |\gamma_i|$; $|\gamma'_j| < |\gamma_j|$ для всех $j \neq i$,

2) $\Gamma'(x) = \{ \pm\gamma, \pm\gamma' \}$ с $x_i = \gamma'_i$ и $x_j = \gamma_j$ для всех $j \neq i$.

Очевидно, что для любой пары смежных минимумов один из них смежен с другим по некоторой координате. Для $i \in \{1, 2, 3\}$ обозначим через π_i проекцию $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$ вдоль координаты i. При этом $\pi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$, $\pi_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$, $\pi_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$. Легко показать (см. [4]), что для любой пары смежных минимумов γ и γ' найдется координата j, для которой $\eta^{(j)} = \pi_j(\gamma)$ и $\xi^{(j)} = \pi_j(\gamma')$ составляют минимальный базис порожденной ими двумерной решетки. Такую координату назовем регулярной для пары смежных минимумов γ, γ'. Из определения непосредственно следует

Замечание 3. Пусть γ' смежен с γ по координате i. Тогда координата i не является регулярной, а среди остальных координат регулярна по крайней мере одна.

Пусть $S = \{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}\}$ — минимальное множество $\Gamma \in \mathfrak{L}_3^*(\mathbb{R})$. Переставляя в случае необходимости узлы, мы можем считать, что для $i = 1, 2, 3$

$$|\gamma_i^{(i)}| = max\{|\gamma_i^{(1)}|, |\gamma_i^{(2)}|, |\gamma_i^{(3)}|\} = |S|_i. \tag{9}$$

Справедливо следующее утверждение

Лемма 4. Если узлы из S линейно независимы, то найдется координата с индексом i, которая регулярна относительно пары узлов из S, отличных от $\gamma^{(i)}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 4 неверно. Обозначим через M матрицу из $GL_3^*(\mathbb{R})$, соответствующую узлам $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$. Для некоторого преобразования $F \in \mathfrak{F}_3$ положим $\widetilde{M} = F(M)$ а $\widetilde{\gamma}^{(1)}, \widetilde{\gamma}^{(2)}, \widetilde{\gamma}^{(3)}$ — соответствующий $\widetilde{M}$ базис решетки $\Gamma(\widetilde{M}) = \widetilde{\Gamma}$.

Из нерегулярности всех координат относительно соответствующей пары узлов из $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}\}$ следует, что знаки в каждой паре произведений $\gamma_i^{(i)}\gamma_j^{(j)}$ и $\gamma_j^{(i)}\gamma_i^{(j)}$ для $(i, j) \in \{(2,3), (1,3), (1,2)\}$ одинаковые. Поэтому можно выбрать F (речь идет только о перемене знаков) таким, что

$$\gamma^{(1)} = (a_1, \varepsilon_1 a_2, \varepsilon_2 a_3),\ \widetilde{\gamma}^{(2)} = (\varepsilon_1 b_1, b_2, \varepsilon_3 b_3),\ \widetilde{\gamma}^{(3)} = (\varepsilon_2 c_1, \varepsilon_3 c_2, c_3)$$

с $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$ и положительными a_i, b_i, c_i. Заметим, что $\widetilde{\gamma}^{(2)} = \varepsilon_1(b_1, \varepsilon_1 b_2, \varepsilon_1\varepsilon_3 b_3)$. Поскольку $\widetilde{\gamma}^{(1)}$ и $\widetilde{\gamma}^{(2)}$ — смежные минимумы, то $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1\varepsilon_3$. Соответствующая множеству $\{\widetilde{\gamma}^{(1)}, \widetilde{\gamma}^{(2)}, \widetilde{\gamma}^{(3)}\}$ минимальная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & \varepsilon_1 b_1 & \varepsilon_2 c_1 \\ \varepsilon_1 a_2 & b_2 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 c_2 \\ \varepsilon_2 a_3 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Умножим вторую и третью строки матрицы соответственно на ε_1, ε_2, а затем умножим второй и третий столбец на ε_1, ε_2. Тогда (2.3) преобразуется в минимальную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Заметим, что у узла

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, -b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 + b_3)$$

первые две координаты по абсолютной величине не превосходят a_1, b_2 соответственно. Тогда из минимальности матрицы следует, что $a_3 + b_3 > c_3$. Далее, у узла

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, -b_3) - (_1, -_2, _3) =$$
$$= (a_1 - b_1 - c_1, a_2 - b_2 + c_2, a_3 + b_3 - c_3)$$

абсолютные величины всех трех координат не превосходят a_1, b_2, c_3 соответственно. Поэтому, по причине минимальности (2.4), третий столбец равен разности первого и второго. А это противоречит линейной независимости узлов $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$. Лемма 4 доказана. $\square$

Замечание 4. При доказательстве леммы 4 мы попутно установили, что если узлы $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ линейно зависимы (над $\mathbb{R}$) и составляют минимальное подмножество решетки, то один из них равен сумме двух остальных.

Теперь докажем теоремы 2 и 3.

Воспользовавшись в случае необходимости преобразованием из $\mathfrak{F}_3$, на основании леммы 4 мы можем считать, что

$$\gamma^{(1)} = (a_1, a_2, a_3), \ \ \gamma^{(2)} = (\pm b_1, b_2, \pm b_3), \ \ \gamma^{(3)} = (\pm c_1, \pm c_2, c_3),$$

с положительными a_i, b_i, c_i, для которых выполнено (2.2), и $\gamma^{(2)}$ с $\gamma^{(3)}$ образуют регулярную по первой координате пару. Тогда матрица M, определяемая узлами $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ имеет один из двух видов:

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & \pm c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & \pm b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

с положительными a_i, b_i, c_i. Применяя преобразования из $\mathfrak{F}_3$ вида

$$M_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & \pm c_1 \\ b_2 & -a_2 & -c_2 \\ b_3 & -a_3 & c_3 \end{pmatrix}, \ \ M_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 & a_1 & \pm b_1 \\ c_3 & -a_3 & -b_3 \\ c_2 & -a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

мы попадаем в условия леммы 3.

Таким образом, мы показали, что если $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}\}$ — минимальное множество и $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ — линейно независимые узлы решетки, то найдется преобразование F из $\mathfrak{F}_3$, переводящее матрицу M в матрицу $\widetilde{M} = F(M)$, где

$$M = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} & \gamma_1^{(3)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} & \gamma_2^{(3)} \\ \gamma_3^{(1)} & \gamma_3^{(2)} & \gamma_3^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}_1^{(1)} & \widetilde{\gamma}_1^{(2)} & \widetilde{\gamma}_1^{(3)} \\ \widetilde{\gamma}_2^{(1)} & \widetilde{\gamma}_2^{(2)} & \widetilde{\gamma}_2^{(3)} \\ \widetilde{\gamma}_3^{(1)} & \widetilde{\gamma}_3^{(2)} & \widetilde{\gamma}_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \varepsilon c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

с ограничениями:

1) a_i, b_i, c_i — положительные числа;

2) $b_1 = max(a_1, b_1, c_1), \ a_2 = max(a_2, b_2, c_2), \ c_3 = max(a_3, b_3, c_3)$;

3) если $\varepsilon = 1$, то выполняется хотя бы одно из неравенств $c_1 < a_1$, $b_2 < c_2$, а если $\varepsilon = -1$, то $a_2 < b_2 + c_2$ и $b_3 < a_3$.

Следуя работе [3] дополним $\widetilde{\gamma}^{(1)}$, $\widetilde{\gamma}^{(2)}$ до базиса решетки $\widetilde{\Gamma}$ третьим узлом γ с $|\gamma_1| < b_1$, $|\gamma_2| < a_2$ и минимальным $|\gamma_3|$. При этом γ можно выбрать в виде

$$\gamma = (\pm c'_1, \ -c'_2, \ c'_3),$$

с положительными $c'_1,\ c'_2,\ c'_3,$ и для матрицы, составленной из $\widetilde{\gamma}^{(1)},\ \widetilde{\gamma}^{(2)},\ \gamma,$ выполнены условия леммы 3. Поэтому, множества $\{\widetilde{\gamma}^{(1)},\ \widetilde{\gamma}^{(2)},\ \widetilde{\gamma}^{(3)}\}$ и $\{\widetilde{\gamma}^{(1)},\ \widetilde{\gamma}^{(2)},\ \gamma\}$ одновременно минимальны. А это возможно только для $\widetilde{\gamma}^{(3)} = \gamma.$ Теоремы 2 и 3 полностью доказаны.

Список литературы

1. *Вороной Г.Ф.*, Собрание сочинений. Т. 1, Киев, 1952, с. 197-391.

2. *Minkowski H.,* Zur Theorie der Kettenbruche, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig, 1911, pp. 278-292.

3. *Buchmann J.,* On the Computation of Units and Class Numbers by a Generalization of Lagrange's Algorithm. Journal of Number Theory, v. 26, 1987, pp. 8-30.

4. *Быковский В.А.,* Теорема Валена для двумерных подходящих дробей. Препринт/ ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука, 1998.

5. *Горкуша О.А.,* Приведение базисов трехмерных решеток. Препринт/ ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука, 1998.