Критерий конечности множества локальных минимумов решетки

О.А.Горкуша
684bmts@rambler.ru

Введение

Пусть $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(s)}$ — произвольный набор линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^s$ и

$$\Gamma = \{m_1\gamma^{(1)} + \dots + m_s\gamma^{(s)} \big| \, m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}$$

— решетка размерности s. Назовем две решетки Γ_1 и Γ_2 <u>подобными</u>, если для некоторых вещественных ненулевых чисел $\alpha_1, ..., \alpha_s$

$$\Gamma_1 = \{(\alpha_1\gamma_1, \dots, \alpha_s\gamma_s) \ \big| \ (\gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \Gamma_2\}.$$

Среди всех узлов решетки Γ выделим множество локальных минимумов $\mathfrak{M}(\Gamma)$. По определению, ненулевой узел $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ называется <u>локальным минимумом</u>, если параллелепипед

$$\Pi(\gamma) = \{(x_1, \dots, x_s) \big| \ |x_i| \le |\gamma_i|; \ i = 1, \dots, s\}$$

не содержит ненулевых узлов решетки, отличных от вершин $\Pi(\gamma)$.

Это понятие впервые появилось в работах Г.Ф.Вороного [1] и Г. Минковского [2]. В своих исследованиях они ориентировались на построение многомерного аналога алгоритма цепных дробей. Основанием для этого послужил следующий факт.

Рассмотрим двумерную решетку

$$\Gamma_\alpha = \{m_1(0,1) + m_2(1, -\alpha) \big| \, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} \ \text{с} \ \alpha \in (0, 1/2).$$

По теореме Лагранжа о наилучших приближениях [3, глава I, § 1, теорема II]

$$\mathfrak{M}(\Gamma_\alpha) = \{\pm(Q_i, P_i - Q_i\alpha) \big| \, i = 1, 2, \dots\},$$

где P_i/Q_i — подходящие дроби к α. В данном случае локальные минимумы с точностью до знака соответствуют подходящим дробям разложения α в цепную дробь.

Хорошо известно, что вещественное число α раскладывается в конечную цепную дробь только в том случае, если α рациональное число.

В данной работе мы обобщаем этот факт в следующем виде.

Теорема. *Множество локальных минимумов произвольной решетки Γ из $\mathbb{R}^s$ конечно тогда и только тогда, когда Γ подобна целочисленной решетке.*

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №04-01-97000) и INTAS (грант №03-51-5070).

§ 1. Доказательство теоремы

Нам понадобится

Лемма. *Пусть* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$ *— произвольная точка из* $\mathbb{R}^s$. *Аддитивная группа* $M = \{a + l\theta \big| \ a \in \mathbb{Z}^s; l \in \mathbb{Z}\}$ *является решеткой в* $\mathbb{R}^s$ *тогда и только тогда, когда* $\theta_1, \ldots, \theta_s$ *— рациональные числа.*

Доказательство. Если $\theta_1, \ldots, \theta_s$ — рациональные числа, то их можно представить в виде $\theta_1 = b_1/n, \ldots, \theta_s = b_s/n$ с целыми $b_1, \ldots, b_s$ и натуральным n. Тогда группа M является решеткой, подобной целочисленной, с коэффициентами подобия

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 1/n.$$

Предположим теперь, что M — решетка и среди чисел $\theta_1, \ldots, \theta_s$ хотя бы одно иррациональное. Из теории диофантовых приближений [3, глава I, § 5, теорема VI] следует, что для любого положительного числа ϵ найдутся ненулевые целые числа $a_1, \ldots a_s, l$, для которых

$$|a_1 - l\theta_1| < \epsilon, \ldots, \ |a_s - l\theta_s| < \epsilon$$

и при этом хотя бы одно из чисел $a_i - l\theta_i$ отлично от нуля. Следовательно, группа M не дискретна. А это противоречит предположению о том, что M решетка. Лемма полностью доказана.

$\square$

Теперь приступим к доказательству сформулированной во введении теоремы. Пусть $e^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, s)$ — вектор, у которого на i-ом месте стоит 1, а на остальных нули. Если Γ — целочисленная решетка с определителем $det(\Gamma) = N$, то для всех $i = 1, \ldots s \quad Ne^{(i)} \in \Gamma$. Поэтому все локальные минимумы лежат в ограниченном множестве $\{(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s \big| \ \ |x_i| \le N\}$ и, следовательно, $\mathfrak{M}(\Gamma)$ — конечно. Из определений также немедленно следует, что при переходе к подобной решетке ее локальные минимумы получаются из исходных путем умножения на коэффициенты подобия и свойство конечности $\mathfrak{M}(\Gamma)$ для такого рода преобразований сохраняется.

Обратно, предположим, что $\mathfrak{M}(\Gamma)$ — конечное множество. Для любого фиксированного числа $0 < \epsilon < 1$ рассмотрим s подмножеств решетки Γ :

$$\Gamma_i(\epsilon) = \{\gamma \in \Gamma \big| \ \ |\gamma_j| < \epsilon \text{ при всех } j \ne i\}; \ \ i = 1, \ldots, s.$$

Из теории диофантовых приближений [3,приложение B, теорема III] следует, что каждое из таких множеств бесконечно и содержит хотя бы один локальный минимум. Так как $\mathfrak{M}(\Gamma)$ конечно и ϵ мы можем сделать сколь угодно малым, то существуют ненулевые числа $\lambda_1, \ldots \lambda_s$, для которых

$$\lambda_1 e^{(1)}, \ldots, \lambda_s e^{(s)} \in \mathfrak{M}(\mathit{\Gamma}).$$

Обозначим через $\mathit{\Gamma}'$ подрешетку в $\mathit{\Gamma}$, порожденную этими узлами. Она имеет конечный индекс в $\mathit{\Gamma}$ и поэтому любой узел решетки γ представляется в виде $\gamma = \gamma' + \eta,$ где $\gamma' \in \mathit{\Gamma}'$ и η пробегает некоторый конечный набор векторов.

Для каждого такого η подрешетка $\mathit{\Gamma}_\eta = \{\gamma' + l\cdot\eta \big| \ \gamma' \in \mathit{\Gamma}';\ l \in \mathbb{Z}\}$ в $\mathit{\Gamma}$ дискретна. Следовательно, дискретна и подрешетка $\mathit{\Gamma}'_\eta$, подобная $\mathit{\Gamma}_\eta$ с коэффициентами подобия $(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_s)$. Применяя лемму, получаем, что все координаты узлов $(\eta_1/\lambda_1, \ldots, \eta_s/\lambda_s)$ — рациональные числа. Найдется натуральное N, для которого $N\mathit{\Gamma}'_\eta$ — целочисленные решетки. Поэтому $\mathit{\Gamma}$, подобная их объединению, также целочисленна. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вороной Г.Ф.* Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. с. 197-391.

2. *Minkowski H.* Generalisation de la theorie des fractions continues //Ann. Sci. Ec. Norm. Super. ser III, 1986, t. 13, p. 41-60. Also in: Gesamm. Abh., Leipzig, 1911, v.1, s. 278-292.

3. *Касселс Дж.* Введение в теорию диофантовых приближений. Москва: Из-во ИЛ., 1961.