УДК 511.9

ОБ ОЦЕНКАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РЕШЕТОК [1]

О. А. Горкуша (г. Хабаровск), Н.М. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

В работе дается обобщение оценки Быковского на случай гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\alpha|\Lambda)$ произвольной решетки Λ с $det\ \Lambda > 1$ и гиперболическим параметром $q(\Lambda) > 1$ при $\alpha > 1$.

1 Введение

Для погрешности интегрирования квадратурных формул с параллелепипедальными сетками В. А. Быковский в работах [2],[3] установил новый тип оценок сверху и снизу, совпадающих по порядку. Эти оценки уточняют теорему С. Н. Бахвалова.

Рассмотрим сравнение

$$a_1m_1 + \ldots + a_sm_s \equiv 0 \pmod N \tag{1}$$

относительно целочисленных переменных $m_1, \ldots, m_s$. Его ненулевое решение называется минимальным, если не существует другого ненулевого решения $(m_1', \ldots, m_s')$, для которого

$$|m_1'| \leq |m_1|, \ldots, |m_s'| \leq |m_s|; \quad |m_1'| + \ldots + |m_s'| < |m_1| + \ldots + |m_s|.$$

Множество всех минимальных решений сравнения (**??**) будем обозначать через $B_N(a_1, \ldots, a_s)$.

Нетрудно показать, что при $(|n_1|+1)\ldots(|n_s|+1) > N$ сравнение (1) имеет хотя бы одно ненулевое решение $m_1, \ldots, m_s$ такое, что

$$|m_1| \leq |n_1|, \ldots, |m_s| \leq |n_s|.$$

Поэтому для любого минимального решения $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \leq N$, где для любого вещественного χ полагаем $\overline{\chi} = \max(1, |\chi|)$. Отсюда следует конечность $B_N(a_1, \ldots, a_s)$ — множества всех минимальных решений. Нетрудно видеть, что для решетки $\Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ — решений сравнения (1) минимальное множество $B_N(a_1, \ldots, a_s)$ минимальных решений сравнения совпадат с множеством локальных минимумов. Как показано в работах [1],[2] множество локальных минимумов конечно, тогда и только тогда, когда решетка подобна целочисленной решетки, а значит является декартовой. Поэтому для произвольной решетки понятие минимального множества $B_N(a_1, \ldots, a_s)$ должно быть трансформировано, так что бы

[1]Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 04-01-97000, $\mathcal{N}$ 05-0100672).

осталось свойство конечности и сумма по нему давала оценки снизу и сверху для гиперболической дзета-функции решеток.

Пусть $\overrightarrow{m_j} = (m_{1\,j}, \ldots, m_{s\,j})$ $(1 \le j \le r)$, $r = r_N(a_1, \ldots, a_s)$ есть все минимальные решения для данного набора коэффициентов $a_1, \ldots, a_s$ сравнения (1). Величина

$$q_N(a_1, \ldots, a_s) = \min_{1 \le j \le r} \overline{m}_{1\,j} \ldots \overline{m}_{s\,j}$$

является гиперболическим параметром решетки $\Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$, а норма линейного функционала погрешности квадратурной формулы с соответствующей параллелепипедальной сеткой выражается через гиперболическую дзета-функцию целочисленной решетки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$:

$$\zeta_H(\alpha|\Lambda) = {\sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}}' \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \qquad (2)$$

где

$$\delta_m(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{m}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{m}, \end{cases}$$

— символ Коробова и $\overline{\chi} = \max(1, |\chi|)$ для любого вещественного χ.

Цель данной работы перенести результат В. А. Быковского на случай произвольной гиперболической дзета-функции

$$\zeta_H(\alpha|\Lambda) = \sum_{\overrightarrow{\chi} \in \Lambda,\ \overrightarrow{\chi} \ne \overrightarrow{0}} \frac{1}{(\overrightarrow{\chi}_1 \ldots \overrightarrow{\chi}_s)^\alpha}$$

произвольной рештtки Λ с $\det \Lambda > 1$ и гиперболическим параметром $q(\Lambda) > 1$ при $\alpha > 1$.

2 Минимальное множество $B(\Lambda)$ для произвольной решетки Λ

Рассмотрим в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$ произвольную решчтку $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ с базисом $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$, который является линейно независимой системой векторов:

$$\Lambda = \Lambda(\overrightarrow{\lambda}_1, \ldots, \overrightarrow{\lambda}_s) = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s \mid m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\}.$$

Ненулевая точка $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in \Lambda$ называется локальным минимумом второго рода, если не существует другой ненулевой точки $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_s) \in \Lambda$, для которой

$$\overline{y}_1 \le \overline{x}_1, \ldots, \overline{y}_s \le \overline{x}_s;\ \overline{y}_1 + \ldots + \overline{y}_s < \overline{x}_1 + \ldots + \overline{x}_s.$$

Минимальным множеством решетки Λ назовем множество $B(\Lambda)$, состоящее из всех локальных минимумов $\vec{x}$ второго рода.

Из дискретности решетки и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для произвольной решетки ее минимальное множество $B(\Lambda)$ конечно и не пусто.

Пусть $\vec{x}_j = (x_{1\,j}, \ldots, x_{s\,j})$ $(1 \leq j \leq r,\ r = r(\Lambda)$ есть все локальные минимумы второго рода из минимального множества $B(\Lambda)$ решчтки Λ. Так как для любого локального минимума второго рода $\overrightarrow{x}$ точка $-\overrightarrow{x}$ также является локальным минимумом второго рода, то $r(\Lambda)$ — четное натуральное число. Через $B^*(\Lambda)$ обозначим множество локальных минимумов второго рода, где из каждой пары $\overrightarrow{x}$ и $-\overrightarrow{x}$ взят ровно один элемент. Таким образом

$$B(\Lambda) = B^*(\Lambda) \cup -B^*(\Lambda). \tag{3}$$

Если $r^*(\Lambda) = |B^*(\Lambda)|$, то $r(\Lambda) = 2r^*(\Lambda)$. Будем предполагать, что нумерация локальных минимумов согласована с разбиением (3): $\overrightarrow{x}_j \in B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r*)$ и $\overrightarrow{x}_{j+r*} = -\overrightarrow{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ $(j = 1, \ldots, r*)$. Ясно, что для гиперболического параметра решетки справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \min_{1 \leq j \leq r} \overline{x}_{1\,j} \ldots \overline{x}_{s\,j}.$$

Обозначим через $\Pi(\vec{a}, \vec{x})$ прямоугольный $s-$мерный полуоткрытый параллелепипед вида

$$\Pi(\vec{a}, \vec{x}) = \left\{ \vec{y} \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{ll} a_\nu \leq y_\nu < a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu \geq 0 \\ a_\nu < y_\nu \leq a_\nu + \overline{x}_\nu & \text{при } a_\nu < 00 \end{array} \right. \quad (\nu = 1, \ldots, s) \right\},$$

а через $N_\Lambda(\vec{a}, \vec{x})$ — количество точек решчтки Λ, лежащих в этом параллелепипеде.

Полагаем $\overrightarrow{1} = (1, \ldots, 1), G_s = [0, 1)^s$ — полуоткрытый единичный $s-$мерный куб, $K_s = [-1, 1]^s$ — s-мерный куб объема $2^s, N(\Lambda)$ — количество ненулевых точек решетки Λ, лежащих в этом кубе. Следующая лемма в другой формулировке была доказана в [6].

Лемма 1. *Если гиперболический параметр решетки* $q(\Lambda) = 1$, *то* $B(\Lambda) \subset K_s,\ |B(\Lambda)| = r(\Lambda) = N(\Lambda)$ *и справедливы оценки*

$$N(\Lambda) < \zeta_H(\alpha|\Lambda) < N(\Lambda)\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^s. \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, если $q(\Lambda) = 1$, то существует ненулевая точка $\overrightarrow{x}$ решетки Λ, для которой $\overline{x}_1 = \ldots = \overline{x}_s = 1$. Поэтому для любой точки $\overrightarrow{y} \notin K_s$ имеем $\overline{y}_1 + \ldots + \overline{y}_s > \overline{x}_1 + \ldots + \overline{x}_s$, что и доказывает включение $B(\Lambda) \subset K_s$ и равенство $|B(\Lambda)| = r(\Lambda) = N(\Lambda)$.

Нижняя оценка гиперболической дзета-функции решетки очевидна:

$$N(\Lambda) = \sum_{j=1}^{r(\Lambda)} \frac{1}{(\overline{x}_{1,j}, \ldots, \overline{x}_{s,j})^\alpha} < \sum_{\overrightarrow{x} \in \Lambda, \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}} \frac{1}{(\overline{x}_{1,j}, \ldots, \overline{x}_{s,j})^\alpha} = \zeta_H(\alpha|\Lambda).$$

Для оценки сверху, прежде заметим, что для любого $\overrightarrow{a}$ справедлива оценка $N_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{1}) \le N(\Lambda)$. Действительно, пусть прямоугольному параллепипеду $\Pi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{1})$ принадлежит ровно $n = N_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{1}) > 0$ точек $\overrightarrow{y}_1, \ldots, \overrightarrow{y}_n$ решетки Λ, которые перенумерованы в лексикографическом порядке, то есть для любых двух точек с последовательными номерами $\overrightarrow{y}_j$ и $\overrightarrow{y}_{j+1}$ найдется номер координаты $\nu = \nu(j)$ такой, что $y_{\nu,j} = y_{\nu,j+1}$ $(1 \le \lambda < \nu)$ и $y_{\nu,j} < y_{\nu,j+1}$. Отсюда следует, что $n-1$ ненулевая точка $\overrightarrow{y}_j - \overrightarrow{y}_1$ $(2 \le j \le n)$ принадлежит s- мерному кубу K_s, и у каждой из этих точек первая ненулевая координата - положительная. Так как множество $B(\Lambda)$ — центрально симметрично относительно нулевой точки, то ровно половина точек из $B(\Lambda)$ имеют первую ненулевую координату, большую нуля. Следовательно, $N(\Lambda)$ — четное натуральное число и $n-1 \le N(\Lambda)/2,\ n \le N(\Lambda)$.

Далее проведем оценки сверху, разбивая область суммирования с помощью единичных прямоугольных параллепипедов $\Pi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{1})$ с $\overrightarrow{a} \in \mathbf{Z}^s$:

$$\zeta_H(\alpha|\Lambda) = \sum_{\overrightarrow{x} \in \Lambda, \overrightarrow{x} \ne \overrightarrow{0}} \frac{1}{(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s)^\alpha} = \sum_{\overrightarrow{a} \in \mathbf{Z}^s} \sum_{\overrightarrow{x} \in \Pi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{1}), \overrightarrow{x} \ne \overrightarrow{0}} \frac{1}{(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s)^\alpha} \le$$

$$\le \sum_{\overrightarrow{a} \in \mathbf{Z}^s} \sum_{\overrightarrow{x} \in \Pi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{1}), \overrightarrow{x} \ne \overrightarrow{0}} \frac{1}{(\min(\overline{a}_1, \overline{a_1+1}) \ldots \min(\overline{a}_s, \overline{a_s+1}))^\alpha} \le$$

$$\le N(\Lambda) \sum_{\overrightarrow{a} \in \mathbf{Z}^s} \frac{1}{(\min(\overline{a}_1, \overline{a_1+1}) \ldots \min(\overline{a}_s, \overline{a_s+1}))^\alpha} =$$

$$= N(\Lambda) \left(\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{(\min(\overline{a}, \overline{a+1}))^\alpha} \right)^s =$$

$$= N(\Lambda)(1 + 2\zeta(\alpha))^s \le \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^s.$$

Лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 2. *Если гиперболический параметр решетки $q(\Lambda) > 1$, то $\det \Lambda > 1$ и для точки $\overrightarrow{a}$ и для любого локального минимума $\overrightarrow{x}_j \in B(\Lambda)$ справедливо неравенство*

$$N_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}_j) \le 1. \qquad (5)$$

Доказательство. Действительно, по теореме Минковского о выпуклом теле, найдется ненулевая точка $\overrightarrow{x}$ решетки Λ, принадлежащая s-мерному кубу $[-d, d]^s$ с $d^s = \det \Lambda$. Поэтому $\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_s \le d^s = \overline{\det \Lambda}$, что и доказывает первое утверждение леммы.

Пусть $\overrightarrow{x}_j \in B(\Lambda)$ — произвольный локальный минимум второго рода. Так как $q(\Lambda) > 1$, то найдется номер ν такой, что $|x_{\nu,j}| > 1$. Если $\overrightarrow{y}$ и $\overrightarrow{z}$ две различные точки решетки Λ, лежащие в прямоугольном s -мерном полуоткрытом параллелепипеде $\Pi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}_j)$, то точка $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}$ лежит в открытом параллелепипеде

$$\prod_{l=1}^{s}(-\overline{x_{l,j}}, \overline{x_{l,j}}), \quad \overline{y_l - z_l} \le \overline{x_{l,j}} \ \ (1 \le l \le s)$$

и $\overline{y_\nu - z_\nu} \le \overline{x_{\nu,j}}$. Но это противоречит условию, что $\overrightarrow{x}_j$ — локальный минимум второго рода, что и доказывает второе утверждение леммы. $\square$

3 Обобщенная оценка Быковского

Начиная с этого момента, мы рассматриваем только решетки с $\det \Lambda > 1$ и $q(\Lambda) > 1$.

Будем использовать покоординатное умножение двух точек: $\overline{x} \cdot \overrightarrow{y} = (x_1 y_1, \ldots, x_s y_s)$. Доказательство следующей леммы существенно упростилось (см. [7]).

Лемма 3. *Пусть $\overrightarrow{x}_j$ — локальный минимум второго рода из $B(\Lambda)$. Для суммы*

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\overrightarrow{x}_j) = \sum_{\substack{\overrightarrow{y} \in \Lambda, \\ \overline{y}_1 \ge \overline{x}_{1,j}, \ldots, \ \overline{y}_s \ge \overline{x}_{1,s}}} \frac{1}{(\overline{y}_1 \cdots \overline{y}_s)^\alpha} \tag{6}$$

справедливо неравенство

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\overrightarrow{x}_j) \le \frac{2^s(1 + \frac{1}{\alpha - 1})^s}{(\overline{x}_{1,j} \cdots \overline{x}_{s,j})^\alpha}.$$

Доказательство. Проведем оценки сверху, разбивая область суммирования с помощью прямоугольных параллелепипедов $\Pi(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}_j, \overrightarrow{x}_j)$ с $\overrightarrow{a} \in \mathbf{Z}^s$, $a_\nu \ne -1, 0 \ (1 \le \nu \le s)$:

$$R_\Lambda^{(\alpha)}(\overrightarrow{x}_j) = \sum_{\substack{\overrightarrow{y} \in \Lambda, \\ \overline{y}_1 \ge \overline{x}_{1,j}, \ldots, \ \overline{y}_s \ge \overline{x}_{s,j}}} \frac{1}{(\overline{y}_1 \cdots \overline{y}_s)^\alpha} =$$

$$= \sum_{\substack{\overrightarrow{a} \in \mathbf{Z}^s, \\ a_\nu \ne -1, 0 \ (1 \le \nu \le s)}} \ \sum_{\overrightarrow{y} \in \Pi(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}_j, \overrightarrow{x}_j)} \frac{1}{(\overline{y}_1 \cdots \overline{y}_s)^\alpha} \le$$

$$\le \sum_{\substack{\overrightarrow{a} \in \mathbf{Z}^s, \\ a_\nu \ne -1, 0 \ (1 \le \nu \le s)}} \frac{N_\Lambda(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}_j, \overrightarrow{x}_j)}{(\min(|a_1|, |a_1 + 1|)\overline{x}_{1,j} \cdots \min(|a_s|, |a_s + 1|)\overline{x}_{s,j})^\alpha} \le$$

$$\le \frac{1}{(\overline{x}_{1,j} \cdots \overline{x}_{s,j})^\alpha} \sum_{\substack{\overrightarrow{a} \in \mathbf{Z}^s, \\ a_\nu \ne -1, 0 \ (1 \le \nu \le s)}} \frac{1}{(\min(|a_1|, |a_1 + 1|) \cdots \min(|a_s|, |a_s + 1|))^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{(\overline{x}_{1,j}\cdots\overline{x}_{s,j})^\alpha}\left(\sum_{a=-\infty}^{-2}\frac{1}{|a+1|^\alpha}+\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^\alpha}\right)^s =$$

$$= \frac{1}{(\overline{x}_{1,j}\cdots\overline{x}_{s,j})^\alpha}(2\zeta(\alpha))^s \le \frac{2^s}{(\overline{x}_{1,j}\cdots\overline{x}_{s,j})^\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^s$$

и лемма полностью доказана. □

Теорема 1. *Пусть* $\overrightarrow{x}_j = (x_{1,j},\dots,x_{s,j})$ $(1\le j\le r)$ *— все локальные минимумы из* $B(\Lambda)$, *причем* $\overrightarrow{x}_j \in B^*(\Lambda)$ $(j=1,\dots,r^*)$ *и* $\overrightarrow{x}_{j+r^*} = -\overrightarrow{x}_j \in -B^*(\Lambda)$ $(j=1,\dots,r^*)$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\sum_{j=1}^{r^*}\frac{2}{(\overline{x}_{1,j}\cdots\overline{x}_{s,j})^\alpha} \le \zeta_H(\alpha|\Lambda) \le 2^s\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^s\sum_{j=1}^{r^*}\frac{2}{(\overline{x}_{1,j}\cdots\overline{x}_{s,j})^\alpha}. \tag{7}$$

Доказательство. Действительно, левое неравенство очевидно, так как

$$\sum_{j=1}^{r^*}\frac{2}{(\overline{x}_{1,j}\cdots\overline{x}_{s,j})^\alpha} = \sum_{j=1}^{r}\frac{2}{(\overline{x}_{1,j}\cdots\overline{x}_{s,j})^\alpha}.$$

Для доказательства правого неравенства заметим, что

$$\zeta_H(\alpha|\Lambda) \le \sum_{j=1}^{r^*}\sum_{\substack{\overrightarrow{y}\in\Lambda,\\ |y_1|\ge|x_{1,j}|,\dots,\ |y_s|\ge|x_{s,j}|}}\frac{1}{(\overline{y}_1\cdots\overline{y}_s)^\alpha} = \sum_{j=1}^{r^*}R_\Lambda^{(\alpha)}(\overrightarrow{x}_j).$$

Утверждение теоремы получается из леммы 3. □

4 Количество точек в минимальном множестве $B(\Lambda)$

Основная идея для оценки числа локальных минимумов принадлежит В.А. Быковскому и заключается в выборе системы конусов, каждому из которых принадлежит не более одного локального минимума. В работах [2], [3] и [7] использовались конусы вида

$$K(t_1,\dots,t_s) = \{(\theta_1 t_1 t,\dots,\theta_s t_s t\ |t\in(0,\infty),\ 2^{-1/4}\le\theta_1,\dots,\theta_s\le 2^{1/4}\}.$$

Модифицируя эту идею, М.О. Авдеева в работе [1] использовала области вида

$$O(t_1,\dots,t_{s-1}) = \left\{(x_1,\dots x_s)\left|\ \begin{array}{l}\frac{2^{t_j-1}}{N}|x_i|\le|x_s|<\frac{2^{t_j}}{N}|x_i|\\ i=1,\dots,s-1,\ t_i\in\mathbf{N}\end{array}\right.\right\}.$$

Для наших целей потребуется новый вид областей. Введем некоторые обозначения. Рассмотрим множество J_k — целочисленных векторов $\overrightarrow{j}_k = (j_1,\dots j_s)$, координаты которых образуют произвольную перестановку s чисел от 1 до s с дополнительными условиями: если $s \geq k > 1$, то $j_2 < \ldots < j_k$, если $1 \leq k \leq s-1$, то $j_{k+1} < \ldots < j_s$. Ясно, что $|J_k| = sC_{s-1}^{k-1}$. Через $\overrightarrow{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_s)$ будем обозначать вектор сигнатуры, состоящий из координат, равных ± 1. Имеется ровно 2^s различных сигнатур. Область $G(\overrightarrow{j}_k, \overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{t})$, где при $k > 1$ вектор $\overrightarrow{t} = (t_2, \ldots t_k)$ имеет натуральные координаты, зададим следующим образом:

$$G(\overrightarrow{j}_k, \overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{t}) = \left(x_1, \ldots, x_s\right) \Bigg| \left\{ \begin{array}{ll} 2^{t_i-1}\varepsilon_i x_{j_i} \leq \varepsilon_1 x_{j_1} < 2^{t_i}\varepsilon_i x_{j_i} & \text{при } 2 \leq i \leq k, \\ \varepsilon_i x_{j_i} > 1 & \text{при } 1 \leq i \leq k, \\ 0 \leq \varepsilon_i x_{j_i} \leq 1 & \text{при } k+1 \leq i \leq s \end{array} \right\} \tag{8}$$

Лемма 5. *Если области $G(\overrightarrow{j}_k, \overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{t})$ принадлежит локальный минимум второго рода $\overrightarrow{x}$, то для натуральных чисел $t_2, \ldots, t_k$ выполняются неравенства*

$$t_i \leq 1 + \log_2(\det \Lambda) \ \ (2 \leq i \leq k).$$

Доказательство. Рассмотрим для $j = 1, \ldots, s$ s прямоугольных параллелепипедов $\Pi_j(\det \Lambda)$, заданных равенствами

$$\Pi_j(\det \Lambda) = \left\{ (x_1, \ldots, x_s) \ \middle| \ \begin{array}{c} |x_j| \leq \det \Lambda, \\ |x_i| \leq 1 \ (i \neq j, \ 1 \leq i \leq s) \end{array} \right\}$$

Заметим, что

$$\Pi_j(\det\Lambda) \subset \cup_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s = \pm 1} G(\overrightarrow{j}_1, \overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{t}) \ (j_1 = j, \ 1 \leq j_2 < \ldots < j_s \leq s, \ j_i \neq j, \ 2 \leq i \leq s).$$

По теореме Минковского о выпуклом теле каждый из этих параллелепипедов будет содержать локальный минимум второго рода, поэтому для любого локального минимума второго рода $\overrightarrow{x}$, не принадлежащего ни одному из этих параллелепипедов, все его координаты строго меньше по абсолютной величине значения $\det \Lambda$. Так как $|x_{j_1}| = \max_{1 \leq i \leq k} |x_{j_i}|$, то

$$t_i \leq 1 + [\log_2 |x_{j_1}| - \log_2 |x_{j_j}|] < 1 + \log_2(\det \Lambda) \ \ (2 \leq i \leq k).$$

Лемма доказана. □

Теорема 2. *Для величины $r(\Lambda)$ — числа локальных минимумов второго рода из $B(\Lambda)$ — справедливо неравенство*

$$r(\Lambda) \leq s2^s(\log_2(\det \Lambda) + 2)^{s-1}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$r(\Lambda) \leq s2^s + \sum_{k=2}^{s} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s = \pm 1} |J_k|(1 + \log_2(\det \Lambda))^{k-1} =$$

$$= s2^s + 2^s \sum_{k=2}^{s} sC_{s-1}^{k-1}(1 + \log_2(\det \Lambda))^{k-1} =$$

$$= s2^s \sum_{k=2}^{s-1} C_{s-1}^k (1+\log_2(\det\Lambda))^k = s2^s(2+\log_2(\det\Lambda))^{s-1}$$

и теорема доказана. $\square$

Замечание.*Из двух доказанных теорем получаем новое доказательство обобщенной теоремы Бахвалова для произвольных решеток с* $q(\Lambda) > 1$.

Доказательство.

$$\zeta_H(\alpha|\Lambda) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda,\ \vec{x}\neq\vec{0}} \frac{1}{(\overline{x}_1\cdots\overline{x}_s)^\alpha} \leq$$

$$\leq 2^s\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^s \sum_{j=1}^{r^*} \frac{1}{(\overline{x}_{1,j}\cdots\overline{x}_{s,j})^\alpha} \leq 2^{s-1}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^s \frac{r(\Lambda)}{q(\Lambda)^\alpha} \leq$$

$$\leq 2^{s-1}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^s s2^s(2+\log_2(\det\Lambda))^{s-1}\frac{1}{q(\Lambda)^\alpha} =$$

$$= \frac{s}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^s 4^s(2+\log_2(\det\Lambda))^{s-1}\frac{1}{q(\Lambda)^\alpha}.$$

$\square$

В заключении выражаем свою благодарность В.А. Быковскому за помощь в работе.

Список цитированной литературы

[1] Авдеева М.О. Оценка количества локальных минимумов целочисленных решеток // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5 вып. 4(12). С. 35—38.

[2]Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник. Тула, 2002. Т. 3 вып. 2(4). С. 27—33.

[3]Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Докл. РАН. 2003. Т. 389. N.2. С. 154—155.

[4]Горкуша О. А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки //Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докл. VI Междунар. конф., посвященной 100-летию Н. Г. Чудакова (Саратов, 13 — 17 сентября 2004 г.). — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 47.

[5]Горкуша О.А. Критерий конечности множества локальных минимумов решетки // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5 вып. 3(11). С. 15—17.

[6]Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решчток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

[7]Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе.(второе издание) М.: МЦНМО, 2004.