УДК 511.9

О КОНЕЧНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА [1]

О. А. Горкуша (г. Хабаровск)

Аннотация

В работе получена асимптотическая формула для среднего значения длин конечных цепных дробей специального вида заданного знаменателя.

§1. Введение

Любое рациональное число r единственным способом раскладывается в конечную непрерывную дробь длины $s = s(r)$

$$r = [q_0;\ q_1,\ q_2, \ldots\ q_s] = q_0 + \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \cdots + \frac{1|}{|q_s}$$

с целым $q_0 = [r]$ (целая часть r), натуральными $q_1, q_2,\ \ldots\ q_s$ (неполные частные). Для $s \geq 1$ всегда $q_s \geq 2$. Напомним, что при $1 \leq i \leq s+1$ дробь

$$\frac{P_i}{Q_i} = [q_0;\ q_1, \ldots\ , q_{i-1}]$$

есть i — я подходящая дробь к r с взаимно простыми целым P_i и натуральным Q_i. По определению $P_0 = 1$ и $Q_0 = 0$.

Такое представление числа r имеет следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим решетку Γ_r с $0 < r < 1/2$ на плоскости:

$$\Gamma_r = \{(n - r \cdot m,\, m) | n, m \in \mathbf{Z}\}.$$

Назовем ненулевой узел $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ решетки Γ_r *локальным минимумом*, если не существует ненулевого узла решетки $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ $(\eta \neq \pm\gamma)$, для которого

$$|\eta_1| \leq |\gamma_1| \text{ и } |\eta_2| \leq |\gamma_2|.$$

Заметим, что при ограничении $0 < r < 1/2$ хотя бы одно из неравенств строгое. Множество локальных минимумов будем обозначать через $\mathfrak{M}(\Gamma_r)$. Согласно теореме Лагранжа о наилучших приближениях вещественного числа r [1, глава II, §6, теоремы 16, 17]

$$\mathfrak{M}(\Gamma_r) = \{\pm(P_i - rQ_i, Q_i)\}, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 07-01-00306 и проекта ДВО РАН 06-III-A-01-017).

где P_i и Q_i — числитель и знаменатель подходящей дроби с номером i числа r. В соответствии с этим $\#\mathfrak{M}(\Gamma_r) = 2s(r) + 4$. Эта конструкция допускает естественное обобщение в следующем виде.

Пусть Ω — ограниченная и замкнутая выпуклая область на плоскости с кусочно-гладкой границей, которая содержит некоторую окрестность точки $(0, 0)$ и симметрична относительно координатных осей:

$$(x_1, x_2) \in \Omega \Rightarrow (-x_1, x_2),\ (x_1, -x_2),\ (-x_1, -x_2) \in \Omega.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие области.

Рассмотрим аффинное преобразование

$$(x_1, x_2) \to (t_1 x_1, t_2 x_2) = \mathfrak{T}(x_1, x_2)$$

с положительными числами t_1 и t_2. Обозначим через $\mathfrak{T}(\Omega)$ множество точек $\mathfrak{T}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Определение 1. Ненулевой узел $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ решетки Γ_r назовем *минимумом относительно* Ω, если для некоторого преобразования $\mathfrak{T}$

1) на границе области $\mathfrak{T}(\Omega)$ лежат только узлы γ и $-\gamma$;

2) внутри $\mathfrak{T}(\Omega)$ нет ненулевых узлов из Γ_r.

Множество таких минимумов будем обозначать через $\mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$. Легко заметить, что $\mathfrak{M}(\Gamma_r) = \mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$ для квадрата

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \bigm| |x_1| \le 1, |x_2| \le 1\}.$$

Впервые эта конструкция была предложена Эрмитом [2; стр. 191-216] в случае круга

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \bigm| x_1^2 + x_2^2 \le 1\}.$$

Позднее Минковский [3; стр. 41-60] рассмотрел более общую ситуацию с

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \bigm| |x_1|^\theta + |x_2|^\theta \le 1\},\ \text{где } \theta \in [1, \infty).$$

Такие области будем обозначать через Ω_θ, а множество минимумов относительно Ω_θ — через $\mathfrak{M}_\theta(\Gamma_r)$. Заметим, что случай, рассмотренный Эрмитом — это $\mathfrak{M}_2(\Gamma_r)$.

Замечание 1. *Из определений немедленно следуют вложения*

$$\mathfrak{M}_{\theta_1}(\Gamma_r) \subseteq \mathfrak{M}_{\theta_2}(\Gamma_r) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma_r)\ \textit{для}\ 1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty.$$

Поэтому естественно считать, что $\mathfrak{M}(\Gamma_r) = \mathfrak{M}_\infty(\Gamma_r)$.

Асимптотическому поведению величины $s(a/d)$ по a $(a < d)$ посвящен ряд работ. В работе [4] Хейльбронн доказал асимптотическую формулу

$$\sum_{\substack{a=1 \\ \text{НОД } (a,d)=1}}^{d} s\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\varphi(d)\log d + O(d\sigma_{-1}^3(d)).$$

Тонкову в работе [5] удалось улучшить оценку, заменив в остатке $\sigma_{-1}^3(d)$ на $\sigma_{-1}(d)$. Позже Портером в статье [6] этот результат был уточнен в виде

$$\sum_{\substack{a=1\\ \text{НОД }(a,d)=1}}^{d} s\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\varphi(d)\log d + C\varphi(d) + O_\varepsilon(d^{5/6+\varepsilon}).$$

Здесь C — константа, окончательно найденная Ренчем [7]:

$$C = \frac{\log 2}{\zeta(2)}\left(3\log 2 + 4\gamma - 4\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 2\right) - \frac{3}{2}.$$

Устинов в недавно опубликованной работе [8] доказал асимптотическую формулу в виде

$$\sum_{\substack{a=1\\ \text{НОД }(a,d)=1}}^{d} s\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\varphi(d)\log d + C\varphi(d) + O_\varepsilon(d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} d).$$

Применяя подход, предложенный в [8], мы доказываем следующий результат.
Теорема 1. *Пусть функция $\psi(x,y) = 0$ описывает границу области Ω и не существует преобразования $\mathfrak{T}$, для которого выполнялось бы равенство $\Omega_\infty = \mathfrak{T}(\Omega)$. Обозначим через $(a_0,b_0),(a_1,b_1)$ точки с условием*

$$\psi(2a_0,0) = \psi(a_0,b_0) = \psi(a_1,b_1) = \psi(0,2b_1) = 0.$$

Для всех α из $[0,1]$ будем рассматривать функцию $\beta_\Omega = \beta(\alpha)$ со свойствами

$$\begin{cases} \psi(u,v) = 0, & & \text{для } a_0 \le u \le a_1;\\ \psi(s,t) = 0, & u = s\beta, t = v\alpha & \text{для } a_1 \le s \le 2a_0;\\ \psi(x,y) = 0, & x = s-u, y = t+v & \text{для } 0 \le x \le a_0.\end{cases}$$

Определим функции $g(\alpha),\overline{g}(\beta)$ равенствами

$$g(\alpha) = \frac{\beta(\alpha)}{1+\alpha\beta(\alpha)},\ \overline{g}(\beta) = \frac{\alpha(\beta)}{1+\beta\alpha(\beta)},$$

где $\alpha = \alpha(\beta)$ — функция, обратная к $\beta = \beta(\alpha)$.
Пусть
1) $g(\alpha),\overline{g}(\beta)$ непрерывно дифференцируемы на отрезках $[0,1]$, $[1/2,1]$ соответственно;
2) не существует чисел $\alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$, $\beta_1,\beta_2 \in [1/2,1]$, для которых

$$g(\alpha) = c_1\alpha + c_2 \ (c_1 \ne 0) \text{ для всех } \alpha \in (\alpha_1,\alpha_2],$$
$$\overline{g}(\beta) = \overline{c}_1\beta + \overline{c}_2,\ (\overline{c}_1 \ne 0) \text{ для всех } \beta \in (\beta_1,\beta_2].$$

Тогда для натурального числа $d > 2$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{a=1 \\ \text{НОД}\,(a,d)=1}}^{d} \#\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d};\Omega) = \varphi(d)\big(\phi_1(\Omega)\log d + \phi_2(\Omega)\big) + O_{\Omega,\varepsilon}(d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} d), \qquad (2)$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, $\phi_1(\Omega), \phi_2(\Omega)$ $(\phi_1(\Omega) > 0)$ — некоторые константы, которые мы определим позже.

§2. Локальные минимумы и непрерывные дроби

Определение 2. Два линейно независимых узла γ и η из $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$ назовем *смежными минимумами в* $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$, если для некоторого преобразования $\mathfrak{T}$

1) узлы $\pm\gamma$ и $\pm\eta$ будут лежать на границе $\mathfrak{T}(\Omega)$;

2) внутри $\mathfrak{T}(\Omega)$ не будет ненулевых узлов из Γ_r.

Сформулируем некоторые свойства минимумов относительно Ω.

1^0. Узлы γ и $-\gamma$ только одновременно могут быть минимумами относительно Ω.

Это свойство позволяет в дальнейшем рассматривать только узлы решетки с неотрицательными вторыми координатами.

2^0. Узлы $\pm(1,0)$ всегда принадлежат множеству $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$.

3^0. Узел $(0,d)$ всегда принадлежит множеству $\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d};\Omega)$.

4^0. Имеют место вложения $\mathfrak{M}_1(\Gamma_r) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma_r)$.

5^0. Пары узлов $(1,0),(-r,1)$ и $(-1,0),(-r,1)$ — смежные минимумы в $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$.

6^0. Пусть $P_s/Q_s, P_{s+1}/Q_{s+1}$ — соответственно предпоследняя и последняя подходящие дроби числа r. Тогда узлы $(P_s - rQ_s, Q_s), (0, Q_{s+1})$ — смежные минимумы в $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$.

7^0. Любые два смежных минимума в $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$ образуют базис в Γ_r.

Свойства 1^0 – 3^0 следуют из определений.

Докажем четвертое свойство. Поскольку в любую выпуклую область, симметричную относительно координатных осей, всегда можно вписать прямоугольник $\{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1| \le |\gamma_1|, |x_2| \le |\gamma_2|\}$ с точкой (γ_1,γ_2), лежащей на границе Ω, то $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma_r)$.

Теперь покажем, что $\mathfrak{M}_1(\Gamma_r) \subseteq \mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$. Пусть $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2) \in \mathfrak{M}_1(\Gamma_r)$. Если у этого узла хотя бы одна координата — нулевая, то согласно свойствам 2^0, 3^0 γ будет принадлежать $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$. Для таких узлов свойство доказано. Поэтому дальше будем рассматривать только узлы из $\mathfrak{M}_1(\Gamma_r)$ с ненулевыми координатами и, не теряя общности, можно считать, что $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Согласно определения $\mathfrak{M}_1(\Gamma_r)$ для некоторых вещественных положительных чисел a и b внутри области $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x|/a + |y|/b \le 1\}$ нет ненулевых узлов из Γ_r и $\gamma_1/a + \gamma_2/b = 1$.

Хорошо известно, что для любого вещественного неотрицательного t найдется точка $P = (u,v)$, лежащая на границе области Ω, в которой Ω имеет опорную прямую

$$l(t,P) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y + tx = v + tu\}.$$

Обозначим через L_x, L_y точки пересечения прямой $l(t, P)$ с координатными осями OX и OY соответственно. Непрерывно продвигаясь по границе области Ω по часовой стрелке от точки с нулевой первой координатой до точки с нулевой второй координатой, будем расматривать соответствие

$$h_P = \frac{|L_y P|}{|L_x P|} \to \{t \in [0, \infty]|\ l(t, P) \text{ — опорная прямая области } \Omega \text{ в точке } P\}.$$

Из свойств границы области Ω следует, что каждому числу $h_P \in [0, \infty]$ соответствует либо одно значение t, либо отрезок $\{t \in \mathbf{R}|\ t \in [0, t_0]\}$. Последний случай возникает тогда, когда в точке $P = (0, v_0)$ область Ω имеет несколько опорных прямых (при этом $h_P = 0$). Здесь t_0, v_0 — некоторые вещественные положительные числа.

Поскольку выполняется равенство $h_P = t \cdot u/v$, то числу $h_P = \gamma_1/\gamma_2 \cdot b/a$ соответствует только одна опорная прямая $l(t, P)$ и только одна точка P с ненулевыми координатами.

При преобразовании $\mathfrak{T}(x, y) = (x \cdot \gamma_1/u, y \cdot \gamma_2/v)$ опорная прямая $l(t, P)$ переходит в опорную прямую $l(b/a, \gamma)$ области $\mathfrak{T}(\Omega)$ в точке γ. Следовательно $\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$.

Свойство 5^0 докажем сначала для узлов $\gamma = (1, 0), \eta = (-r, 1)$. Прежде убедимся в том, что γ, η — смежные минимумы в $\mathfrak{M}_1(\Gamma_r)$. Для этого построим область $\mathfrak{T}(\Omega_1)$ с $t_1 = 1$, $t_2 = 1/(1 - r)$. Граница $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2|\ |x| + |y|(1 - r) = 1\}$ построенной области проходит через γ и η. Так как $r \in (0, 1/2)$, то внутри этой области нет ненулевых узлов из Γ_r. Поэтому γ, η — смежные минимумы в $\mathfrak{M}_1(\Gamma_r)$. Также [9; стр. 214-215] γ и η — смежные минимумы в $\mathfrak{M}(\Gamma_r)$.

Согласно свойству 3^0 γ, η — локальные минимумы в $\mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$. Проведем через эти узлы область $\mathfrak{T}(\Omega)$. Поскольку узел $\gamma + \eta$ не лежит внутри ромба $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ||x| + |y|(1 - r) \le 1\}$, то внутри области $\mathfrak{T}(\Omega)$ нет ненулевых узлов решетки Γ_r. Таким образом, γ, η — смежные узлы в $\mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$. Относительно узлов $(-1, 0), (-r, 1)$ это же доказательство проводится без изменений.

Свойство 6^0 следует из того, что решетка Γ_r однозначно определяет решетку

$$\Gamma_{r'} = \left\{ \left(\frac{-\gamma_2}{Q_{s+1}}, \frac{\gamma_1}{P_s - rQ_s} \right) \middle| (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_r \right\},$$

при этом минимальность и смежность узлов сохраняется. А так как узлы $(P_s - rQ_s, Q_s)$, $(0, Q_{s+1})$ решетки Γ_r переходят в узлы $(-Q_s/Q_{s+1}, 1)$, $(-1, 0)$ решетки $\Gamma_{r'}$ и [1; глава 1, §2, теорема 6] $Q_s/Q_{s+1} = [0; q_s, \ldots, q_1] < 1/2$, то согласно свойству 5^0 $(P_s - rQ_s, Q_s), (0, Q_{s+1})$ — смежные минимумы в $\mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$.

Доказательство свойства 7^0 принадлежит Касселсу [10; глава III, §6, лемма 6].

Согласно определения минимума относительно Ω множество узлов $\mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$ можно представить в виде конечной последовательности

$$\mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega) = \{\pm\gamma_\Omega^{(0)}, \ldots, \pm\gamma_\Omega^{(i)}, \ldots, \pm\gamma_\Omega^{(s)}\}, \tag{3}$$

в которой $\gamma_{\Omega}^{(i)}=(x_{i,\Omega},y_{i,\Omega})$, $\{|x_{i,\Omega}|\}$ — строго монотонно убывающая последовательность, $\{y_{i,\Omega}\}$ — строго монотонно возрастающая последовательность неотрицательных чисел. Из перечисленных свойств следует, что

1) $\gamma_{\Omega}^{(0)}=(1,0), \gamma_{\Omega}^{(1)}=(-r,1), \gamma_{\Omega}^{(s)}=(0,d)$ (d — знаменатель числа r);

2) $\gamma_{\Omega}^{(i)}, \gamma_{\Omega}^{(i+1)}$ — смежные минимумы в $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$.

Нам понадобятся следующие свойства последовательности $\{\gamma_{\Omega}^{(i)}\}$.

8^0 Для каждого $i\geq 0$ найдется целое положительное число m, при котором

$$\gamma_{\Omega}^{(i+2)}=\pm\gamma_{\Omega}^{(i)}+m\gamma_{\Omega}^{(i+1)}.$$

9^0. Для всех $i\geq 0$

1) узлы $\gamma_{\Omega_\infty}^{(i)}, \gamma_{\Omega_\infty}^{(i+1)}$ лежат в соседних четвертях;

2) $\gamma_{\Omega_\infty}^{(i+2)}=\gamma_{\Omega_\infty}^{(i)}+m\gamma_{\Omega_\infty}^{(i+1)}$ с $m>0$;

3) если $\gamma_{\Omega_\infty}^{(i)}$ и $\gamma_{\Omega_\infty}^{(i+2)}$ составляют базис решетки, то $m=1$;

4) $\gamma_{\Omega_\infty}^{(i)}$ и $\gamma_{\Omega_\infty}^{(i+k)}$ не составляют базис решетки при $k\geq 3$.

10^0. Среди двух смежных минимумов в $\mathfrak{M}(\Gamma_r)$ один узел обязательно будет из $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$.

11^0. Если $\gamma_{\Omega_\infty}^{(i+1)}\notin\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$, то $\gamma_{\Omega_\infty}^{(i+2)}=\gamma_{\Omega_\infty}^{(i+1)}+\gamma_{\Omega_\infty}^{(i)}$.

Докажем свойство 8^0. Так как каждая из пар $\gamma_{\Omega}^{(i)}, \gamma_{\Omega}^{(i+1)}$ и $\gamma_{\Omega}^{(i+1)}, \gamma_{\Omega}^{(i+2)}$ составляет базис Γ_r, то для некоторой унимодулярной целочисленной матрицы A выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\Omega}^{(i+1)} \\ \gamma_{\Omega}^{(i+2)} \end{pmatrix} = A\cdot \begin{pmatrix} \gamma_{\Omega}^{(i)} \\ \gamma_{\Omega}^{(i+1)} \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & m \end{pmatrix}.$$

Положительность числа m вытекает из того, что последовательность $\{y_{i,\Omega}\}$ возрастает и состоит из неотрицательных чисел.

Первые два пункта свойства 9^0 следуют из (1) и свойства 8^0, а третий пункт — из [10; глава III, §6, лемма 6]. Для доказательства последнего пункта свойства 9^0 потребуется следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть $r=[q_0;q_1,\ldots,q_s]$ — некоторое рациональное число. Для фиксированного целого числа $i\geq 0$ рассмотрим целочисленную функцию $S_i(k)=(-1)^i(P_iQ_{i+k}-Q_iP_{i+k})$, в которой P_i,Q_i — числитель и знаменатель подходящей дроби числа r. Тогда для любого $k\geq 2$ имеем*

$$S_i(k)=S_i(k-2)+q_{i+k-1}S_i(k-1),\quad S_i(k)>0.$$

Доказательство. Этот результат непосредственно следует из соотношений

$$P_{i+2}=P_i+q_{i+1}P_{i+1},\ Q_{i+2}=Q_i+q_{i+1}Q_{i+1},\ P_iQ_{i+1}-Q_iP_{i+1}=(-1)^i.$$

□

Теперь перейдем к доказательству четвертого пункта свойства 9^0. Пусть узлы $\gamma_\Omega^{(i)}$ и $\gamma_\Omega^{(i+k)}$ составляют базис решетки Γ_r. Стало быть, выполняется равенство

$$\left| det \begin{pmatrix} P_i - rQ_i & P_{i+k} - rQ_{i+k} \\ Q_i & Q_{i+k} \end{pmatrix} \right| = S_i(k) = 1.$$

С другой стороны, из леммы 1 получаем $S_i(k) \geq S_i(1) + S_i(2) \geq 2$. Свойство 9^0 доказано.

Свойство 10^0 — прямое следствие предыдущего свойства. Действительно, пусть $\gamma_{\Omega_\infty}^{(i)}, \gamma_{\Omega_\infty}^{(i+1)} \notin \mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$. Так как любые два смежных минимума в $\mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$ образуют базис Γ_r, то найдутся числа $m < i$ и $n > i+1$ такие, что узлы $\gamma_{\Omega_\infty}^{(n)}, \gamma_{\Omega_\infty}^{(m)}$ принадлежат $\mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$ и составляют базис решетки Γ_r. Но, так как $n - m \geq 3$, то они не могут образовывать базис Γ_r. Поэтому наше предположение неверно и свойство 10^0 доказано.

Свойство 11^0 непосредственно вытекает из свойств 9^0 и 10^0.

Рассмотрим конечную дробь

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_s|}{|b_s} \ \ (a_i \in \{-1, 1\},\ b_0 \in \mathbf{Z},\ b_i \in \mathbf{N} \text{ для всех } i \geq 1,\ b_s \geq 2). \quad (4)$$

По определению, для $i \geq 1$

$$\frac{P_i}{Q_i} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_{i-1}|}{|b_{i-1}}$$

$i-$ тая подходящая дробь к (4) с P_i- числителем и Q_i- знаменателем дроби.

Хорошо известно [11; введение, соотношения (8), (9)], что при $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, $P_1 = b_0$, $Q_1 = 1$ имеют место равенства

$$P_{i+2} = a_{i+1}P_i + b_{i+1}P_{i+1}, \ \ Q_{i+2} = a_{i+1}Q_i + b_{i+1}Q_{i+1} \quad (5)$$

для всех $i \geq 0$.

Определение 3. Назовем дробь (4) *обобщенной* Ω *— дробью числа* r $(0 < r < 1/2)$, если конечные последовательности чисел $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ удовлетворяют условиям:

1) $b_0 = 0$;

2) для всех $P_i - rQ_i \neq 0$ с $i \geq 1$ числа a_i, b_i такие, что узел $\gamma_\Omega^{(i+1)} = a_i\gamma_\Omega^{(i-1)} + b_i\gamma_\Omega^{(i)}$ — смежный с $\gamma_\Omega^{(i)}$ в $\mathfrak{M}(\Gamma_r; \Omega)$.

В соответствии с (5) и определением 3, для всех $i \geq 0$ выполняется

$$\gamma_\Omega^{(i)} = (P_i - rQ_i, Q_i). \quad (6)$$

Согласно свойству 8^0 и тому, что последовательность $\{|x_{i,\Omega}|\}$ монотонно убывает, получаем

$$a_i = \begin{cases} \ \ 1 & \text{если } \gamma_\Omega^{(i-1)}, \gamma_\Omega^{(i)} \text{лежат в соседних четвертях,} \\ -1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а так как выполняется (6), то

$$b_i = \begin{cases} k & \text{если } a_i\gamma_\Omega^{(i-1)} + k\gamma_\Omega^{(i)} - \text{смежный с } \gamma_\Omega^{(i)} \text{в } \mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega), \\ k+1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $k = [|P_{i-1} - rQ_{i-1}|/|P_i - rQ_i|]$.

Определение 4. *Дробь*

$$\frac{1|}{|1} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_s|}{|b_s}$$

назовем обобщенной Ω *— дробью числа* r $(1/2 < r < 1)$, *если*

$$\frac{a_1\ \ |}{|b_1+1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_s|}{|b_s}$$

—обобщенная Ω *— дробь числа* $1-r$.

В соответствии с определениями зависимость между величиной $s = s(r,\Omega)$ — длиной обобщенной $\Omega-$ дроби числа r и мощностью множества $\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)$ имеет вид

$$s(r,\Omega) = \begin{cases} \#\mathfrak{M}(\Gamma_r;\Omega)/2 - 2 & \text{если } \ r < 1/2, \\ \#\mathfrak{M}(\Gamma_{1-r};\Omega)/2 - 1 & \text{если } \ r > 1/2. \end{cases} \tag{7}$$

§3. Множества Ω_d, $\overline{\Omega}$

Для каждой пары смежных в $\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d})$ $(a, d \in \mathbf{N}, a \le d/2,\ \text{НОД}(a,d) = 1)$ минимумов $\gamma = (\gamma_1/d, \gamma_2)$ и $\eta = (\eta_1/d, \eta_2)$ с $\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbf{Z}$, $0 \le |\eta_1| < |\gamma_1|$, $0 \le \gamma_2 < \eta_2$ определим

$$(\alpha, \beta) = (\gamma_2/\eta_2, |\eta_1/\gamma_1|).$$

Согласно свойству 10^0 из этих двух узлов хотя бы один принадлежит $\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d};\Omega)$. Также из (1) и из условия $\text{НОД}(a,d) = 1$ следует $\text{НОД}(\gamma_1,\eta_1) = \text{НОД}(\gamma_2,\eta_2) = 1$. Эти два замечания позволяют нам ввести еще одно понятие.

Для фиксированного натурального числа $d > 2$ обозначим через Ω_d множество точек (α, β), для которых γ, η — смежные минимумы в $\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d})$ и $\eta \in \mathfrak{M}(\Gamma_{a/d};\Omega)$ по всем $\Gamma_{a/d}$ из $(\ldots)$. Здесь и в дальнейшем $(\ldots)$ означает множество решеток $\Gamma_{a/d}$ для всех a с ограничениями $1 \le a < d/2, \text{НОД}(a,d) = 1$.

Лемма 2. *Пусть функция* $\psi(x,y) = 0$ *описывает границу области* Ω *и не существует преобразования* $\mathfrak{T}$, *для которого выполнялось бы равенство* $\Omega_\infty = \mathfrak{T}(\Omega)$. *Для функции* $\beta_\Omega = \beta(\alpha)$, *определенной в формулировке теоремы 1 (см. введение), построим область*

$$\overline{\Omega} = \{(\alpha,\beta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le \beta(\alpha)\}.$$

Тогда для всех $d > 2$

$$\Omega_d = \left\{ \begin{array}{l} (\alpha,\beta) \in \boldsymbol{Q}^2, \\ (\alpha,\beta) \in \overline{\Omega} \end{array} \left| \begin{array}{l} \alpha = \gamma_2/\eta_2, \beta = \eta_1/\gamma_1, \\ \textit{НОД}(\gamma_1,\eta_1) = \textit{НОД}(\gamma_2,\eta_2) = 1, \\ \gamma_1\eta_2 + \eta_1\gamma_2 = d \end{array} \right. \right\}.$$

Доказательство. Из определения функции β_Ω следует, что $\beta(\alpha) \in [1/2, 1]$ для всех $\alpha \in [0,1]$ и $\beta(0) = 1/2,\ \beta(1) = 1$.

Возьмем какую-нибудь точку (α, β') из множества $\overline{\Omega}$ с рациональными координатами $\alpha = \gamma_2/\eta_2,\ \beta' = \eta_1'/\gamma_1'$ и с ограничением $\gamma_1'\eta_2 + \gamma_2\eta_1' > 2$. Подберем число $a/d = [0; q_1, \dots, q_s]$ ($a,\ d$ — взаимно простые числа, $q_1 \geq 2$), у которого для некоторого $i \geq 0$ подходящие дроби $P_i/Q_i,\ P_{i+1}/Q_{i+1}$ в каноническом разложении a/d в непрерывную цепную дробь удовлетворяют условиям: $\alpha = Q_i/Q_{i+1}$,

$$\beta' = \left| \frac{P_{i+1} - \frac{a}{d}Q_{i+1}}{P_i - \frac{a}{d}Q_i} \right|. \tag{8}$$

Если $\alpha = 0$, то $i = 0$ и $a/d = \beta'$. А так как $\beta' \leq \beta(0)$ и $d > 2$, то $a/d < 1/2$. Если $\alpha = 1$, то $i = 1, P_1 = 0, P_2 = 1, Q_1 = 1, Q_2 = 1$. Из равенства (8) находим $a/d = 1/(\beta' + 1)$. Учитывая ограничение $a/d \leq 1/2$, получаем $\beta' = 1$ и $a/d = 1/2$. В другой ситуации исходя из соотношения $\gamma_2/\eta_2 = [0; q_i, \dots, q_1]$ [1; теорема 6, стр. 14], определим подходящие дроби $P_i/Q_i, P_{i+1}/Q_{i+1}$ числа a/d. Затем из уравнения (8) найдем числа a и d и для d будет выполняться равенство $\gamma_1'\eta_2 + \eta_1'\gamma_2 = d$. Таким образом, пара чисел (α, β') однозначно определяет решетку $\Gamma_{a/d}$, и узлы $\gamma' = ((-1)^i\gamma_1'/d, \gamma_2), \eta' = ((-1)^{i+1}\eta_1'/d, \eta_2)$ — смежные локальные минимумы $\Gamma_{a/d}$.

Предположим, что $(\alpha, \beta') \notin \Omega_d$. То есть, $\eta' \notin \mathfrak{M}(\Gamma_{a/d}; \Omega)$. Тогда узлы γ' и $\gamma' + \eta'$ — смежные минимумы в $\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d}; \Omega)$ (свойство 11^0). Поэтому для некоторых вещественных чисел t_1, t_2 $(t_1 t_2 \neq 0)$

$$\psi(\gamma_1' t_1, \gamma_2 t_2) = \psi((\gamma_1' - \eta_1')t_1, (\gamma_2 + \eta_2)t_2) = 0 \ \text{ и } \ \psi(\eta_1' t_1, \eta_2 t_2) > 0.$$

Обозначим $s' = \gamma_1' t_1,\ v' = \eta_2 t_2,\ t' = v'\alpha,\ u' = s'\beta',\ x' = s'(1 - \beta'),\ y' = v'(\alpha + 1)$ и перепишем соотношения в другом виде:

$$\psi(s', t') = \psi(x', y') = 0, \ \ \psi(u', v') > 0.$$

С другой стороны, пара чисел $\alpha, \beta(\alpha)$ определяет на границе области Ω тройку точек (s,t), $(-u, v)$, (x, y), удовлетворяющих условиям $t = v\alpha$, $u = s\beta$, $x = s(1 - \beta)$, $y = v(\alpha + 1)$.

Если точка (s', t') лежит ниже отрезка $\{(\lambda s, \lambda t) \mid \lambda \in [0,1]\}$, то мы имеем $v' < v$. Поэтому точка $(-u', v')$ лежит ниже луча $\mathfrak{B}$, проходящего через точки $(0,0)$ и $(-u, v)$. Однако в силу того, что отрезок $\{(-\lambda u', \lambda v') | \lambda \in [0,1]\}$ получен в результате параллельного переноса отрезка $\{(\lambda x' + (1-\lambda)s', \lambda y' + (1-\lambda)t') | \ \lambda \in [0,1]\}$ и $y > y'$, точка $(-u', v')$ лежит выше луча $\mathfrak{B}$.

Если точка (s', t') лежит выше отрезка $\{(\lambda s, \lambda t) | \ \lambda \in [0,1]\}$, то $u' \leq u$ и $v' > v$. Отсюда, точка $(-u', v')$ лежит выше луча $\mathfrak{B}$. С другой стороны, точка $(-u', v')$ лежит ниже луча $\mathfrak{B}$ (в результате параллельного переноса и ограничения $y' > y$). Стало быть, $s' = s$ и $t' = t$, поэтому точка (u', v') лежит на границе области Ω. Это означает, что наше предположение неверно и $(\alpha, \beta') \in \Omega_d$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $d > 2$ — натуральное число. Возьмем любую точку (α, β') с рациональными координатами $\alpha = \gamma_2/\eta_2$, $\beta' = \eta_1'/\gamma_1'$ из Ω_d. Согласно определения множества Ω_d найдется натуральное число a (НОД$(a,d) = 1, a < d/2$) такое, что узлы $\gamma = (\pm\gamma_1'/d, \gamma_2), \eta = (\mp\eta_1'/d, \eta_2)$ — локальные минимумы решетки $\Gamma_{a/d}$ и $\eta \in \mathfrak{M}(\Gamma_{a/d}; \Omega)$.

Возможны два случая: $\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma_{a/d}; \Omega)$ и $\gamma \notin \mathfrak{M}(\Gamma_{a/d}; \Omega)$. И в том и другом случаях найдется преобразование $\mathfrak{T}$, при котором узлы γ и $\gamma + \eta$ лежат на границе области $\mathfrak{T}(\Omega)$, а η находится внутри или на границе $\mathfrak{T}(\Omega)$. Следовательно будут выполняться соотношения

$$\begin{gathered}\psi(s', t') = \psi(x', y') = 0, \;\; \psi(u', v') \leq 0, \\ \psi(s, t) = \psi(x, y) = \psi(u, v) = 0.\end{gathered}$$

Здесь мы используем обозначения, принятые при доказательстве прямого утверждения леммы.

Если точка (s', t') лежит выше отрезка $\{(\lambda s, \lambda t) \mid \lambda \in [0,1]\}$, то $v' > v$, $y' > y$. Заметим, что отрезок $\{(-\lambda u', \lambda v') \mid \lambda \in [0,1]\}$ получен в результате параллельного переноса отрезка $\{(\lambda s' + (1-\lambda)x', \lambda t' + (1-\lambda)y') \mid \lambda \in [0,1]\}$. Поэтому точка $(-u', v')$ лежит ниже луча $\mathfrak{B}$, проходящего через точки $(0,0)$ и $(-u, v)$. А учитывая, что $(-u', v')$ лежит внутри деформируемой области, получаем $v' < v$.

В других случаях получаем $s \leq s'$, $v' \leq v$. Также замечаем, что точка $(-u', v')$ лежит выше луча $\mathfrak{B}$ и поэтому $u' \leq u$. И, наконец, из соотношений $s\beta' \leq u' = s'\beta' \leq u = s\beta$ следует $\beta' \leq \beta$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *$\beta(\alpha)$—непрерывная, монотонно возрастающая функция и $\beta(\alpha) \in [1/2, 1]$.*

Доказательство. Мы уже знаем, что $\beta(\alpha) \in [1/2, 1]$. Докажем, что функция $t(\alpha)$ монотонно возрастает и непрерывна. Возьмем две тройки точек на границе области $\Omega : (s_i, t_i), (-u_i, v_i), (x_i, y_i)$, $i \in \{1, 2\}$, которые связаны соотношениями

$$\begin{gathered}0 \leq x_i \leq a_0 \leq u_i \leq a_1 \leq s_i \leq 2a_0, \\ (s_i, t_i) = (u_i/\beta(\alpha_i), v_i\alpha_i), \\ (x_i, y_i) = (-u_i, v_i) + (s_i, t_i), \; \alpha_i \in [0,1], \alpha_1 \neq \alpha_2.\end{gathered}$$

Не теряя общности будем считать, что $s_1 \leq s_2$. Покажем, что $x_2 \geq x_1$. Если это не так, то, с одной стороны, точка (x_2, y_2) лежит выше прямой, проходящей через точки $(-u_1, v_1), (x_1, y_1)$, с другой стороны, точка (x_2, y_2) лежит выше прямой, проходящей через точки $(-u_1, v_1), (x_1, y_1)$ (так как $s_1 \leq s_2$ и $u_1 < u_2$). Следовательно, $x_2 \geq x_1$.

Остается только заметить, что при $s_1 \leq s_2$ выполняется неравенство $t_1 \geq t_2$, из которого следует $v_1\alpha_1 \geq v_2\alpha_2$. А так как $x_2 \geq x_1$, то $v_2 \geq v_1$. Следовательно $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Таким образом, $t(\alpha)$ монотонно возрастает. Из свойств области Ω следует, что $t(\alpha)$ пробегает все значения из отрезка $[0, b_1]$. Согласно критерию непрерывности монотонной функции $t(\alpha)$ — непрерывная функция. Из тех же соображений следует, что $u(\alpha)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция, $s(\alpha)$ — монотонно убывающая непрерывная функция.

Из равенства $\beta(\alpha) = u(\alpha)s^{-1}(\alpha)$ следует возрастание функции $\beta(\alpha)$ и ее непрерывность. $\square$

Рассмотрим частный случай.

Лемма 4. *Для областей* Ω, *представимых в виде* $\mathfrak{T}(\Omega_\theta)$ *имеют место равенства*

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_\theta = \left\{ (\alpha,\beta) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le \alpha, \beta \le 1, \\ ((1+\alpha)^\theta - \alpha^\theta)\beta^\theta + 1 - (1-\beta)^\theta \le (1+\alpha)^\theta - \alpha^\theta(1-\beta)^\theta \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Положим

$$\overline{\Omega}' = \left\{ (\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le \alpha, \beta \le 1, \\ ((1+\alpha)^\theta - \alpha^\theta)\beta^\theta + 1 - (1-\beta)^\theta > (1+\alpha)^\theta - \alpha^\theta(1-\beta)^\theta \end{array} \right\}.$$

Мы имеем $\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega}' = \emptyset$ и

$$\overline{\Omega} \cup \overline{\Omega}' = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}.$$

Поэтому достаточно доказать лемму в следующей формулировке:

$$\eta \notin \mathfrak{M}_\theta(\Gamma_{a/d}) \Leftrightarrow (\alpha,\beta) \in \overline{\Omega}'.$$

Зафиксируем решетку $\Gamma_{a/d}$ (по-прежнему считаем, что НОД $(a,d) = 1$). Рассмотрим два смежных локальных минимума $\gamma = (\gamma_1/d, \gamma_2), \eta = (\eta_1/d, \eta_2)$ $(\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbf{Z})$. Если $\eta \notin \mathfrak{M}_\theta(\Gamma_{a/d})$, то $\gamma \in \mathfrak{M}_\theta(\Gamma_{a/d})$ (свойство 10^0). А так как любые два смежных минимума в $\mathfrak{M}_\theta(\Gamma_{a/d})$ образуют базис в $\Gamma_{a/d}$ (свойство 7^0), то согласно свойству 11^0 узел $\gamma' = (\gamma_1'/d, \gamma_2')$, смежный с η в $\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d})$ принадлежит $\mathfrak{M}_\theta(\Gamma_{a/d})$ и $\gamma' = \gamma + \eta$ с $|\gamma_1| > |\eta_1| > |\gamma_1'|$ и $0 \le \gamma_2 < \eta_2 < \gamma_2'$.

Применим преобразование плоскости $(Oxy) \to (Ouv)$, заданное равенствами $u = (dx)^\theta,\ v = y^\theta$. Из определения смежных минимумов в $\mathfrak{M}_\theta(\Gamma_{a/d})$ следует, что внутри ромба

$$|u| \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma_2^\theta \\ 1 & \gamma_2'^\theta \end{pmatrix} + |v| \det \begin{pmatrix} |\gamma_1|^\theta & 1 \\ |\gamma_1'|^\theta & 1 \end{pmatrix} \le \det \begin{pmatrix} |\gamma_1|^\theta & \gamma_2^\theta \\ |\gamma_1'|^\theta & \gamma_2'^\theta \end{pmatrix}$$

нет точек $(|dx|^\theta, |y|^\theta)$, с $(x,y) \in \Gamma_{a/d} \setminus \{(0,0)\}$. Поэтому

$$|\eta_1|^\theta \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma_2^\theta \\ 1 & \gamma_2'^\theta \end{pmatrix} + \eta_2^\theta \det \begin{pmatrix} |\gamma_1|^\theta & 1 \\ |\gamma_1'|^\theta & 1 \end{pmatrix} > \det \begin{pmatrix} |\gamma_1|^\theta & \gamma_2^\theta \\ |\gamma_1'|^\theta & \gamma_2'^\theta \end{pmatrix}.$$

Переписывая это неравенство относительно $\alpha = \gamma_2/\eta_2$ и $\beta = |\eta_1|/|\gamma_1|$, получаем $(\alpha,\beta) \in \overline{\Omega}'$, то есть верно утверждение

$$\eta \notin \mathfrak{M}_\theta(\Gamma_{a/d}) \Rightarrow (\alpha,\beta) \in \overline{\Omega}'.$$

Теперь возьмем произвольную точку (α, β) с рациональными координатами из множества $\overline{\Omega}'$. Обозначим $\alpha = \gamma_2/\eta_2$, $\beta = \eta_1/\gamma_1$ и предположим, что для соответствующей решетки $\Gamma_{a/d}$ узлы $\gamma = (\gamma_1/d, \gamma_2), \eta = (-\eta_1/d, \eta_2)$ — смежные локальные минимумы и $\eta \in \mathfrak{M}_\theta(\Gamma_{a/d})$.

Из условия $(\alpha, \beta) \in \overline{\Omega}'$ следует, что $\beta > 1/2$. Также для узла $\gamma' = \gamma + m\eta$ из $\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d})$ выполняется неравенство

$$\eta_1^\theta \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma_2^\theta \\ 1 & \gamma_2'^\theta \end{pmatrix} + \eta_2^\theta \det \begin{pmatrix} \gamma_1^\theta & 1 \\ \gamma_1'^\theta & 1 \end{pmatrix} \le \det \begin{pmatrix} \gamma_1^\theta & \gamma_2^\theta \\ \gamma_1'^\theta & \gamma_2'^\theta \end{pmatrix}.$$

Из определения минимума в $\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d})$ следует, что $0 \le \gamma_1 - m\eta_1 < \eta_1$, то есть $m = [\gamma_1/\eta_1] = [1/\beta] = 1$. Тогда последнее неравенство перепишется относительно переменных α, β в виде

$$((1+\alpha)^\theta - \alpha^\theta)\beta^\theta + 1 - (1-\beta)^\theta \le (1+\alpha)^\theta - \alpha^\theta(1-\beta)^\theta,$$

что противоречит условию $(\alpha, \beta) \in \overline{\Omega}'$. Таким образом, предположение не верно и справедливо утверждение

$$(\alpha, \beta) \in \overline{\Omega}' \Rightarrow \eta \notin \mathfrak{M}_\theta(\Gamma_{a/d}).$$

Тем самым лемма доказана. $\square$

Из этой леммы, свойства 4^0 и замечания 1 непосредственно следует

Замечание 2.

1) Для $1 \le \theta_1 \le \theta_2 < \infty$ имеют место вложения

$$\overline{\Omega}_{\theta_1} \subseteq \overline{\Omega}_{\theta_2} \subseteq \big\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 |\ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\big\},$$

2) для произвольной области Ω справедливы вложения

$$\overline{\Omega}_{\theta_1} \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \big\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 |\ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\big\}.$$

§4. Вспомогательные асимптотические формулы

Мы будем использовать следующие обозначения.

1. Для натуральных чисел n и d функция $\delta_n(d)$ — характеристическая функция делимости на n

$$\delta_n(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } d \equiv 0(\mod n) \\ 0, & \text{если } d \not\equiv 0(\mod n). \end{cases}$$

2. Для натуральных чисел d, n, m функция $\mu_{n,d}(m)$ — число решений сравнения $mx \equiv d (\mathrm{mod}\ n)$ относительно переменной $x \in \mathbf{N}$ в пределах $1 \le x \le n$.

3. Определим для чисел n, d $(n \in \mathbf{N}, d \in \mathbf{Z})$ сумму

$$K_n(d) = \sum_{m_1, m_2 = 1}^{n} \delta_n(m_1 m_2 - d).$$

4. Для целых чисел n, d $(n \geq 1)$ и вещественных чисел Q_1, Q_2, P_1, P_2 $(0 < P_1, P_2 \leq n)$ обозначим

$$\Phi_{n,d}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \sum_{\substack{Q_1 < m_1 \leq Q_1 + P_1 \\ Q_2 < m_2 \leq Q_2 + P_2}} \delta_n(m_1 m_2 - d).$$

Нам понадобятся следующие асимптотические равенства.

$$\Phi_{n,d}(Q, 0; P, n) = \frac{P}{n} K_n(d) + O(R_0(n, d)), \tag{9}$$

$$R_0(n, d) = \sigma_0(n)\sigma_0(a)a, \quad a = \text{НОД}(n, d) \ \ [8; \text{замечание } 2]. \tag{10}$$

$$\Phi_{n,d}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \frac{K_n(d)}{n^2} P_1 P_2 + O(R_1(n, d) + R_2(n, d)), \tag{11}$$

$$\begin{gathered} R_1(n, d) = \sigma_0(n)\sigma_0^2(a)\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2(n+1)n^{1/2}, \\ R_2(n, d) = \sigma_0(n)\sigma_0(a)\log(n+1)a, \quad a = \text{НОД}(n, d) \ \ [8; \text{лемма } 3], \end{gathered} \tag{12}$$

Лемма 5. *Пусть Q, P — действительные числа и $P \geq 2$. Определим величины $\Phi_{n,d}(f, Q, P), S_{n,d}(f, Q, P)$ равенствами*

$$\Phi_{n,d}(f, Q, P) = \sum_{\substack{Q < m_1 \leq Q + P \\ 0 < m_2 \leq f(m_1)}} \delta_n(m_1 m_2 - d),$$

$$S_{n,d}(f, Q, P) = \frac{1}{n} \sum_{Q < m_1 \leq Q + P} \mu_{n,d}(m_1) f(m_1).$$

Пусть на всем отрезке $[Q, Q + P]$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для некоторого $A > 0$

$$\frac{1}{A} \ll |f''(x)| \ll \frac{1}{A}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_{n,d}(f, Q, P) = S_{n,d}(f, Q, P) - \frac{P}{2} \cdot \delta_n(d) + O(R_3(P, f, n, d)),$$

в которой

$$R_3(P, f, n, d) = \sigma_0^{2/3}(n)\sigma_0^2(a) P A^{-1/3} + (A^{1/2} a^{1/2} + n^{1/2} + a) P^{\varepsilon}, \quad a = \textit{НОД}(n, d).$$

Доказательство. см. в [8; теорема 1, замечание 3]. □

Лемма 6. *Пусть Q, P — действительные числа и $0 < P \leq n$. На всем отрезке $[Q, Q+P]$ неотрицательная вещественная функция $f(x) = const$. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\Phi_{n,d}(f, Q, P) = S_{n,d}(f, Q, P) + O_\varepsilon(R_4(n, d)),$$

в которой

$$R_4(n, d) = (n^{1/2} + a)n^\varepsilon, \ \ a = НОД(n, d).$$

Доказательство. см. в [12; лемма 5]. □

Для области $\overline{\Omega}$ (см. лемму 2) и функций $\beta(\alpha), g(\alpha), \overline{g}(\beta)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1 (в дальнейшем будем рассматривать только такие функции), рассмотрим величины при $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$

$$\Phi(\Omega, \alpha_1, \alpha_2) = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} g(\alpha) d\alpha, \tag{13}$$

$$h(\Omega, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Bigg(\sum_{\frac{m}{n} \in (\alpha_1, \alpha_2]} \frac{\beta(m/n)}{n + m\beta(m/n)} - \Phi(\Omega, \alpha_1, \alpha_2) \Bigg). \tag{14}$$

Обозначим

$$\Phi(\Omega) = \Phi(\Omega, 0, 1) = \iint\limits_{\overline{\Omega}} \frac{d\alpha d\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}, \tag{15}$$

$$h_\beta(\Omega) = h(\Omega, 0, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Bigg(\sum_{m \leq n} \frac{\beta(m/n)}{n + m\beta(m/n)} - \Phi(\Omega) \Bigg), \tag{16}$$

$$h_\alpha(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Bigg(\sum_{n/2 \leq m \leq n} \frac{\alpha(m/n)}{n + m\alpha(m/n)} - \log 2 + \Phi(\Omega) \Bigg), \tag{17}$$

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Bigg(\sum_{n \leq m < 2n} \frac{1}{m} - \log 2 \Bigg), \tag{18}$$

$$h(\Omega) = h - h_\alpha(\Omega) + h_\beta(\Omega). \tag{19}$$

Заметим, что все представленные ряды сходятся.

Лемма 7. *Пусть $d \in \boldsymbol{N}, \alpha_1, \alpha_2, u \in \boldsymbol{R}$ и $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1, u > 0$. Положим*

$$S(g, \alpha_1, \alpha_2, d, u) = d \sum_{1 \leq n < u} \frac{1}{n} \sum_{\frac{m}{n} \in (\alpha_1, \alpha_2]} \mu_{n,d}(m) \frac{g(m/n)}{n}.$$

Имеет место асимптотическая формула

$$S(g,\alpha_1,\alpha_2,d,u)=\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{a|d}\frac{d}{a}\Bigg(\Phi(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)\bigg(\log\left(\frac{u}{a}\right)+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\bigg)+h(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)\Bigg)+$$

$$+O_\Omega\left(\frac{d\sigma_0(d)\log(u)}{u}\right),$$

в которой γ — константа Эйлера, $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Доказательство. Определим функции

$$\Psi(u,\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{n<u}\frac{1}{n^2}\sum_{\frac{m}{n}\in(\alpha_1,\alpha_2]}g\left(\frac{m}{n}\right),\ \Psi^*(u,\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{n<u}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{\frac{m}{n}\in(\alpha_1,\alpha_2]\\ \text{НОД}(n,m)=1}}g\left(\frac{m}{n}\right)$$

и получим для $\Psi(u,\alpha_1,\alpha_2)$ асимптотическую формулу, используя (13).

$$\Psi(u,\alpha_1,\alpha_2)=\Phi(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n<u}\frac{1}{n}+\sum_{n<u}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{\frac{m}{n}\in(\alpha_1,\alpha_2]}g\left(\frac{m}{n}\right)-\Phi(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)\right)=$$

$$=\Phi(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)(\log u+\gamma)+h(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)-\sum_{n\geq u}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{\frac{m}{n}\in(\alpha_1,\alpha_2]}g\left(\frac{m}{n}\right)-\Phi(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)\right)+O_\Omega\left(\frac{1}{u}\right).$$

Так как $g(\alpha)$ — непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{\frac{m}{n}\in(\alpha_1,\alpha_2]}g\left(\frac{m}{n}\right)=\Phi(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)+O_\Omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\Psi(u,\alpha_1,\alpha_2)=\Phi(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)(\log u+\gamma)+h(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)+O_\Omega(u^{-1}). \tag{20}$$

Теперь оценим $\Psi^*(u,\alpha_1,\alpha_2)$. Согласно второй формуле обращения Мебиуса

$$\Psi^*(u,\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{a<u}\frac{\mu(a)}{a^2}\Psi\left(\frac{u}{a},\alpha_1,\alpha_2\right).$$

К этому равенству применим (20) и соотношения

$$\sum_{n<u}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}+O\left(\frac{1}{u}\right),$$

$$\sum_{n<u}\frac{\mu(n)\log n}{n^2}=\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}+O\left(\frac{\log u}{u}\right):$$

$$\Psi^*(u,\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\Phi(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)}{\zeta(2)}\left(\log u+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+\frac{h(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)}{\zeta(2)}+O_\Omega\left(\frac{\log u}{u}\right).$$

Представим $\mu_{n,d}(m)=a\delta_a(d)$, где $a=$НОД(m,n). Тогда, учитывая полученную асимптотическую формулу, перепишем $S(g,\alpha_1,\alpha_2,d,u)$ в виде

$$S(g,\alpha_1,\alpha_2,d,u)=\sum_{a|d}\frac{d}{a}\sum_{n<u/a}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{\frac{m}{n}\in(\alpha_1,\alpha_2]\\ \text{НОД}(n,m)=1}}g\left(\frac{m}{n}\right)=\sum_{a|d}\frac{d}{a}\Psi^*\left(\frac{u}{a},\alpha_1,\alpha_2\right)=$$

$$=\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{a|d}\frac{d}{a}\left(\Phi(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)\left(\log\left(\frac{u}{a}\right)+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+h(\Omega,\alpha_1,\alpha_2)\right)+O_\Omega\left(\frac{d\sigma_0(d)\log(u)}{u}\right).$$

Лемма доказана. □

Для функции $\alpha=\alpha(\beta)$ (см. формулировку теоремы 1) определим область

$$\overline{\Omega}'=\left\{\ (x,y)\in\mathbf{R}^2|\ \ 1/2\le x\le 1,\ 0\le y\le\alpha(x)\ \right\}.$$

Лемма 8. *Пусть* $d\in\boldsymbol{N}$, $u\in\boldsymbol{R}$. *Для суммы*

$$S(\Omega,d,u)=d\sum_{1\le n<u}\frac{1}{n}\sum_{\frac{m}{n}\in(1/2,1]}\mu_{n,d}(m)\min\left\{\frac{\overline{g}(m/n)}{n},\frac{1}{m}-\frac{n}{mu}\right\}$$

справедлива асимптотическая формула

$$S(\Omega,d,u)=\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{a|d}\frac{d}{a}\left(\big(\log 2-\Phi(\Omega)\big)\left(\log\left(\frac{u}{a}\right)+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+C(\Omega)\right)+O_\Omega\left(\frac{d\sigma_0(d)\log u}{u}\right),$$

в которой

$$C(\Omega)=h_\alpha(\Omega)-\log 2+\Phi(\Omega)+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\log(1+\beta\alpha(\beta))}{\beta(1+\beta\alpha(\beta))}d\beta.$$

Доказательство. Определим функции $\Psi_\Omega(u),\Psi^*_\Omega(u)$ равенствами

$$\Psi_\Omega(u)=\sum_{n<u}\frac{1}{n}\sum_{\frac{m}{n}\in(1/2,1]}\min\left\{\frac{\overline{g}(m/n)}{n},\frac{1}{m}-\frac{n}{mu}\right\},$$

$$\Psi^*_\Omega(u)=\sum_{n<u}\frac{1}{n}\sum_{\substack{\frac{m}{n}\in(1/2,1]\\ \text{НОД}(m,n)=1}}\min\left\{\frac{\overline{g}(m/n)}{n},\frac{1}{m}-\frac{n}{mu}\right\}.$$

При помощи стандартных преобразований (см. лемму 7), получаем

$$S(\Omega,d,u)=\sum_{a|d}\frac{d}{a}\Psi^*_\Omega\left(\frac{u}{a}\right).\tag{21}$$

Ограничения $0 \le \alpha(m/n) \le 1, m \le n < u$,

$$\frac{\overline{g}(m/n)}{n} > \frac{1}{m} - \frac{n}{mu}$$

эквивалентны неравенствам $n + m\alpha(m/n) > u$, $n > u/2$. Поэтому $\Psi_\Omega(u)$ можно записать в виде

$$\Psi_\Omega(u) = \Psi_1 - \Psi_2, \tag{22}$$

$$\Psi_1 = \sum_{n<u} \frac{1}{n} \sum_{\frac{m}{n} \in (1/2,1]} \frac{\overline{g}(m/n)}{n}, \quad \Psi_2 = \sum_{\frac{u}{2}<n<u} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\frac{m}{n} \in (1/2,1] \\ n+m\alpha(m/n)>u}} \left(\frac{\overline{g}(m/n)}{n} - \frac{1}{m} + \frac{n}{mu} \right).$$

Асимптотическая формула для Ψ_1 находится из (16) и из равенства

$$\frac{1}{n} \sum_{\frac{m}{n} \in [1/2,1]} \overline{g}\left(\frac{m}{n}\right) = \log 2 - \Phi(\Omega) + O\left(\frac{1}{n}\right):$$

$$\Psi_1 = (\log 2 - \Phi(\Omega))(\log u + \gamma) + h_\alpha(\Omega) + O_\Omega\left(\frac{1}{u}\right).$$

Теперь вычислим Ψ_2. Поскольку

$$\frac{\overline{g}(m/n)}{n} - \frac{1}{m} + \frac{n}{mu} \ll \frac{1}{u},$$

то

$$\Psi_2 = \sum_{u/2<n<u} \frac{1}{n} \int_{\frac{n}{2}}^{n} \left(\frac{\overline{g}(m/n)}{n} - \frac{1}{m} + \frac{n}{mu} \right) \left[n + m\alpha\left(\frac{m}{n}\right) > u \right] dm + O_\Omega\left(\frac{1}{u}\right).$$

Здесь и далее запись $[A]$ означает 1, если утверждение A истинно, и 0 в противном случае. Сделаем замену переменной интегрирования $m : \beta = m/n$. Тогда

$$\Psi_2 = \sum_{u/2<n<u} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{\overline{g}(\beta)}{n} - \frac{1}{n\beta} + \frac{1}{\beta u} \right) \left[1 + \beta\alpha(\beta) > \frac{u}{n} \right] d\beta + O_\Omega\left(\frac{1}{u}\right).$$

Поменяем последовательность суммирования и интегрирования:

$$\Psi_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\overline{g}(\beta) - \frac{1}{\beta} \right) \left(\sum_{\frac{u}{1+\beta\alpha(\beta)}<n<u} \frac{1}{n} \right) d\beta + \frac{1}{u} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\beta} \left(\sum_{\frac{u}{1+\beta\alpha(\beta)}<n<u} 1 \right) d\beta + O_\Omega\left(\frac{1}{u}\right).$$

Используя (15), получаем

$$\Psi_2 = \log 2 - \Phi(\Omega) - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\log(1+\beta\alpha(\beta))}{\beta(1+\beta\alpha(\beta))} d\beta + O_\Omega\left(\frac{1}{u}\right).$$

Все необходимые оценки для Ψ_1 и Ψ_2 получены. Применим их к формуле (22):

$$\Psi_\Omega(u) = (\log 2 - \Phi(\Omega))(\log u + \gamma) + C(\Omega) + O_\Omega\left(\frac{1}{u}\right).$$

Согласно формуле обращения Мебиуса

$$\Psi_\Omega^*(u) = \sum_{a<u} \frac{\mu(a)}{a^2}\Psi_\Omega\left(\frac{u}{a}\right) =$$

$$= \frac{\log 2 - \Phi(\Omega)}{\zeta(2)}\left(\log u + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \frac{C(\Omega)}{\zeta(2)} + O_\Omega\left(\frac{\log u}{u}\right).$$

Осталось оценить $S(\Omega, d, u)$, пользуясь (21):

$$S(\Omega,d,u) = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{a|d}\frac{d}{a}\Bigg((\log 2 - \Phi(\Omega))\left(\log\left(\frac{u}{a}\right) + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + C(\Omega)\Bigg) + O_\Omega\left(\frac{d\sigma_0(d)\log u}{u}\right).$$

Лемма доказана. $\square$

§5. Доказательство основного результата

Положим

$$A_\Omega^*(d) = \sum_{\substack{a=1\\ \text{НОД }(a,d)=1}}^{[d/2]} \#\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d};\Omega),$$

$T_\Omega^*(d)$ — количество представлений числа d билинейной формой

$$d = m_1m_2 + n_1n_2, \tag{23}$$

причем натуральные числа m_1, n_1, m_2, n_2 имеют ограничения

$$m_1 \le n_1,\ m_2 \le n_2\beta(m_1/n_1), \tag{24}$$

$$\text{НОД }(n_1, m_1) = \text{НОД }(n_2, m_2) = 1.$$

Лемма 9. *Для всех натуральных чисел $d > 2$ выполняется равенство*

$$A_\Omega^*(d) = 2T_\Omega^*(d) + 3\varphi(d).$$

Доказательство. Определим множество

$$\mathfrak{N}_\Omega(d) = \left\{ (n_1,n_2,m_1,m_2)\in\mathbf{Z}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{НОД}(n_1,m_1) = \text{НОД}(n_2,m_2) = 1,\\ 0\le m_1\le n_1,\ 0\le m_2\le n_2\beta(m_1/n_1)\\ d = m_1m_2 + n_1n_2 \end{array} \right\}.$$

Величины $\#\mathfrak{N}_\Omega(d)$ и $T^*_\Omega(d)$ связаны соотношением

$$\#\mathfrak{N}_\Omega(d) = T^*_\Omega(d) + \frac{3}{2}\varphi(d) \tag{25}$$

Пусть a, d — фиксированные взаимно простые натуральные числа и $1 \le a < d/2$. Обозначим через $\{P_i/Q_i\}$ последовательность подходящих дробей числа a/d. Используя (1), получаем

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d};\Omega) = 2\#\{(|dP_i - aQ_i|, Q_i, |dP_{i+1} - aQ_{i+1}|, Q_{i+1}) | (P_{i+1} - \frac{a}{d}Q_{i+1}, Q_{i+1}) \in \mathfrak{M}(\Gamma_{a/d};\Omega)\} + 2.$$

Для некоторого i определим величины n_1, n_2, m_1, m_2 равенствами

$$n_2 = |dP_i - aQ_i|, m_1 = Q_i, m_2 = |dP_{i+1} - aQ_{i+1}|, n_1 = Q_{i+1}.$$

Так как имеют место ограничения (см. лемму 2)

$$d = m_1m_2 + n_1n_2,\ 0 \le m_1 \le n_1,\ 0 \le m_2 \le n_2\beta(m_1/n_1),$$
$$\text{НОД}(n_1, m_1) = \text{НОД}(n_2, m_2) = 1,$$

то $(n_1, n_2, m_1, m_2) \in \mathfrak{N}_\Omega(d)$. Таким образом, каждому числу a соответствует последовательность четверок (такую последовательность обозначим через $\mathfrak{N}_\Omega(a;d)$) из $\mathfrak{N}_\Omega(d)$. Для всех $1 \le a, b \le d/2$ с $a \ne b$, НОД$(a, d) =$ НОД$(b, d) = 1$ мы имеем

$$\mathfrak{N}_\Omega(a;d) \cap \mathfrak{N}_\Omega(b;d) = \emptyset,$$

поэтому

$$A^*_\Omega(d) = 2\sum_{\dots} \#\mathfrak{N}_\Omega(a;d) + \varphi(d).$$

С другой стороны

$$\#\mathfrak{N}_\Omega(d) = \sum_{\dots} \#\mathfrak{N}_\Omega(a;d) + \varphi(d)/2.$$

Собирая последние два равенства и (25), получаем утверждение леммы. □

Следуя Г.Хейльбронну ([4; стр. 87-96]), определим $T_\Omega(d)$ как число решений уравнения (23) с условиями (24). Применив дважды первую формулу обращения Мебиуса к функции $T_\Omega(d)$, получаем

$$T^*_\Omega(d) = \sum_{bc|d} \mu(b)\mu(c)T_\Omega\left(\frac{d}{bc}\right). \tag{26}$$

Дальше будем использовать метод получения асимптотических оценок, изложенный в работе [8; теорема 2].

Для некоторого вещественного положительного числа $u < d$ ($u \notin \mathbf{N}$) рассмотрим множества

$$T_1(d,u,\Omega) = \left\{ \ (n_1,n_2,m_1,m_2) \in \mathbf{N}^4 \ \left| \ \begin{array}{l} 1 \le m_1 \le n_1, \ 1 \le m_2 \le n_2\beta(m_1/n_1), \\ d = m_1m_2 + n_1n_2, \\ \ n_1 < u \end{array} \right. \right\},$$

$$T_2(d,u,\Omega) = \left\{ \ (n_1,n_2,m_1,m_2) \in \mathbf{N}^4 \ \left| \ \begin{array}{l} 1 \le m_1 \le n_1, \ 1 \le m_2 \le n_2\beta(m_1/n_1), \\ d = m_1m_2 + n_1n_2, \\ \ n_1 > u \end{array} \right. \right\}.$$

Тогда

$$T_\Omega(d) = \#T_1(d,u,\Omega) + \#T_2(d,u,\Omega). \tag{27}$$

Вычислим $\#T_1(d,u,\Omega)$. Исходя из определения

$$\#T_1(d,u,\Omega) = \sum_{1 \le n_1 < u} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \delta_{n_1}(m_1m_2 - d), \ \text{ при этом}$$

$$1 \le m_1 \le n_1, \ 1 \le m_2 \le \frac{d}{n_1} g\left(\frac{m_1}{n_1}\right). \tag{28}$$

То есть

$$\#T_1(d,u,\Omega) = \sum_{1 \le n_1 < u} T(g,d,n_1), \ \text{ где}$$

$T(g,d,n_1)$ — число решений сравнения $m_1m_2 \equiv d (\mathrm{mod}\ n_1)$, лежащих в области с ограничениями (28).

Для фиксированного числа n_1 разобьем отрезок $I = [1, n_1]$ на три группы интервалов $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}$,

$$I^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{k_j} I_i^{(j)}, \ \ I_i^{(j)} = (a_i^{(j)}n_1, b_i^{(j)}n_1], \ \ 0 \le a_i^{(j)}, b_i^{(j)} \le 1$$

по правилу:

1. функция $g(m_1/n_1)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной m_1 на каждом отрезке $[a_i^{(1)}n_1, b_i^{(1)}n_1]$, причем на каждом таком отрезке $g(m_1/n_1)$ либо выпукла вниз, либо выпукла вверх;

2. число m_1 относится к $I^{(2)}$, если выполняется равенство

$$g(m_1/n_1) = const_i \ \text{ для всех } \ m_1 \in [a_i^{(2)}n_1, b_i^{(2)}n_1];$$

3. число m_1 относится к $I^{(3)}$, если в точке m_1/n_1 функция $g(m_1/n_1)$ не имеет производной по переменной m_1.

Количество интервалов в группе $I^{(j)}$ обозначим через k_j.

В соответствии с ограничениями на функцию $g(\alpha)$ справедливы соотношения

$$I = I^{(1)} \cup I^{(2)} \cup I^{(3)} \text{ и } I^{(i)} \cap I^{(j)} = \emptyset \text{ для } i \neq j.$$

Применим на группах интервалов $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ леммы 5, 6, а на остальных интервалах тривиальную оценку

$$\Phi_{n,d}(f, Q, P) = S_{n,d}(f, Q, P) + O(P).$$

Величины $\Phi_{n,d}(f, Q, P)$, $S_{n,d}(f, Q, P)$ определены в лемме 5. В итоге получим асимптотическую формулу для $T_1(g, d, n_1)$:

$$T_1(g, d, n_1) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i \le k_j} S_{n_1,d}(f, a_i^{(j)} n_1, P_i^{(j)} n_1) + O(R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)}),$$

$$f(m_1) = \frac{d}{n_1} g\left(\frac{m_1}{n_1}\right),\ P_i^{(j)} = b_i^{(j)} - a_i^{(j)},$$

$$R^{(1)} = \sum_{i \le k_1} (n_1 \delta_{n_1}(d) + R_3(P_i^{(1)} n_1, f, n_1, d)), R^{(2)} = \sum_{i \le k_2} R_4(n_1, d), R^{(3)} = \sum_{i \le k_3} P_i^{(3)} n_1.$$

Суммируя величину $T_1(g, d, n_1)$ по индексу $n_1 \in [1, u)$, и учитывая лемму 7, а также то , что величина $R^{(2)}$ вносит меньший вклад в остаток, чем $R^{(1)}$, получаем

$$\# T_1(d, u, \Omega) = S(g, 0, 1, d, u) + O\left(\sum_{n_1 < u} (R^{(1)} + R^{(3)})\right). \tag{29}$$

Вычисление $\sum_{n_1 < u} R^{(1)}$.

Так как $g(m_1/n_1)$ — неотрицательная функция и на каждом из интервалов $I_j^{(1)}$

$$\left(\frac{d}{n_1} g\left(\frac{m_1}{n_1}\right)\right)''_{m_1^2} = \frac{d}{n_1^3} g''\left(\frac{m_1}{n_1}\right) \asymp \frac{d}{n_1^3} A_\Omega \ \ (0 < A_\Omega < \infty),$$

то в остатке $R_3(P_i^{(1)} n_1, f, n_1, d)$ (лемма 5) $A = n_1^3/(dA_\Omega)$. Оценим

$$\sum_{1 \le n_1 < u} \sum_{j=1}^{k_1} n_1 \delta_{n_1}(d) \ll_\Omega u \sigma_0(d),$$

$$\sum_{1 \le n_1 < u} \sum_{j=1}^{k_1} R_3(P_i^{(1)} n_1, f, n_1, d) \ll_\Omega \sum_{1 \le n_1 < u} R_3(n_1, f, n_1, d).$$

Представим

$$\sum_{1 \le n_1 < u} R_3(n_1, f, n_1, d) = R' + R'' + R''' + R'''',$$

$$R' \underset{\Omega}{\ll} d^{1/3} \sum_{1\le n_1<u} \sigma_0^{2/3}(n_1)\sigma_0^2(a), \quad R'' \underset{\Omega,\varepsilon}{\ll} d^{-1/2} \sum_{1\le n_1<u} n_1^{\varepsilon+3/2}a^{1/2},$$
$$R''' \underset{\Omega,\varepsilon}{\ll} \sum_{1\le n_1<u} n_1^{\varepsilon+1/2}, \quad R'''' \underset{\Omega,\varepsilon}{\ll} \sum_{1\le n_1<u} n_1^{\varepsilon}a.$$

Используя неравенство Гельдера, а также оценки $\sigma_0(an) \ll \sigma_0(a)\sigma_0(n)$, $\log d \underset{\varepsilon}{\ll} d^\varepsilon$, $\sigma_0(d) \underset{\varepsilon}{\ll} d^\varepsilon$,

$$\sum_{a<u} \sigma_0(a) \ll u\log u, \quad \sum_{a|u} \sigma_0^3(a)/a \underset{\varepsilon}{\ll} \log^\varepsilon d \ \ ([8;\text{ лемма } 8]),$$

получаем

$$R' \underset{\Omega,\varepsilon}{\ll} ud^{\frac{1}{3}}\log^{\frac{2}{3}+\varepsilon} d, \quad R'' \underset{\Omega,\varepsilon}{\ll} u^{\frac{5}{2}+\varepsilon}d^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad R''' \underset{\Omega,\varepsilon}{\ll} u^{\frac{3}{2}+\varepsilon}d^{\varepsilon}, \quad R'''' \underset{\Omega,\varepsilon}{\ll} u^{1+\varepsilon}d^{\varepsilon}$$

(подробное доказательство изложено в [8]). Собирая все оценки, получаем

$$\sum_{1\le n_1<u} R^{(1)} \underset{\Omega,\varepsilon}{\ll} ud^{\frac{1}{3}}\log^{\frac{2}{3}+\varepsilon} d + u^{\frac{5}{2}+\varepsilon}d^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} + u^{\frac{3}{2}+\varepsilon}d^{\varepsilon}. \tag{30}$$

Вычисление $\sum_{n_1<u} R^{(3)}$.

По определению, $R^{(3)}$ — остаток, который получен при подсчете числа решений сравнения $m_1m_2 \equiv d(\mathrm{mod}\ n_1)$ относительно переменных m_1, m_2, лежащих в области с ограничениями

$$\left\{\frac{m_1}{n_1} \in \bigcup_{j\le k_3} (a_j^{(3)}, a_j^{(3)} + P_j^{(3)}],\ 0 < \frac{m_2}{n_2} \le f(m_1)\right\},$$

причем $P_j^{(3)}$ может быть сколь угодно малым положительным числом. Возьмем $P_j^{(3)} = 1/((k_3+1)n_1)$. Тогда

$$\sum_{n_1<u} R^{(3)} = O_\Omega(u).$$

Подставляя эту оценку и (30) в (29), затем используя лемму 7 и (15), (16), получаем

$$\#T_1(d,u,\Omega) = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{a|d}\frac{d}{a}\left(\Phi(\Omega)\left(\log\left(\frac{u}{a}\right) + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + h_\beta(\Omega)\right) + O_\Omega(R(u,d)), \tag{31}$$

$$R(u,d) = u^{-1}d^{1+\varepsilon}\log(u) + ud^{\frac{1}{3}}\log^{\frac{2}{3}+\varepsilon} d + u^{\frac{5}{2}+\varepsilon}d^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} + u^{\frac{3}{2}+\varepsilon}d^{\varepsilon}. \tag{32}$$

Замечание 3. *Для* $u = (d\log d)^{1/2}$ *остаток* $R(u,d) \ll d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} d$.

Вычислим $\#T_2(d,u,\Omega)$. Учитывая, что $\beta(\alpha)\in[1/2,1]$, $\beta(0)=1/2$, представим

$$\#T_2(d,u,\Omega)=\#T^{(1)}(d,u)-\#T^{(2)}(d,u,\Omega)+O_{\Omega,\varepsilon}\left(\frac{d}{u}\log^{\varepsilon} d\right), \tag{33}$$

$$T^{(1)}(d,u)=\left\{\begin{array}{c|l} (n_1,n_2,m_1,m_2)\in\mathbf{N}^4 & \begin{array}{l} m_1\le n_1,\ m_2\le n_2,\\ d=m_1m_2+n_1n_2,\\ n_1>u\end{array}\end{array}\right\},$$

$$T^{(2)}(d,u,\Omega)=\left\{\begin{array}{c|l} (n_1,n_2,m_1,m_2)\in\mathbf{N}^4 & \begin{array}{l} n_2/2<m_2\le n_2,\ m_1\le n_1\alpha(m_2/n_2),\\ d=m_1m_2+n_1n_2,\\ n_1>u\end{array}\end{array}\right\}.$$

Асимптотическая формула для величины $\#T^{(1)}(d,u)$ в предположении $u=(d\log d)^{1/2}$ получена в [8]:

$$\#T^{(1)}(d,u)=\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{a|d}\frac{d}{a}\left(\log 2\left(\log\left(\frac{d}{ua}\right)+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-\frac{\log 2}{2}-1\right)+h\right)+O_{\varepsilon}(d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} d) \tag{34}$$

(h определена равенством (17)).

Приступим к вычислению $\#T^{(2)}(d,u,\Omega)$. Положим

$$F(\Omega,n_2,d,u;m_2)=d\min\left\{\frac{1}{n_2}\cdot\overline{g}\left(\frac{m_2}{n_2}\right),\frac{1-n_2u/d}{m_2}\right\}.$$

Тогда

$$\#T^{(2)}(d,u,\overline{\Omega})=\sum_{n_2<\frac{d}{u}}\sum_{m_2}\sum_{m_1}\delta_{n_2}(m_1m_2-d)=\sum_{n_2<\frac{d}{u}}T(F,d,n_2), \tag{35}$$

при этом

$$n_2/2<m_2\le n_2, 1\le m_1\le F(\Omega,n_2,d,u;m_2).$$

Согласно определения $F(\Omega,n_2,d,u;m_2)$ разобьем интервал $I=(n_2/2,n_2]$ на два интервала $I_1=(n_2/2,x],\ I_2=(x,n_2]$, где x находится из равенства

$$\frac{d}{n_2}\cdot\overline{g}\left(\frac{x}{n_2}\right)=\frac{d-n_2u}{x}.$$

Мы имеем

$$F(\Omega,n_2,d,u;m_2)=\begin{cases}\frac{d}{n_2}\cdot\overline{g}\left(\frac{m_2}{n_2}\right), & m_2\in I_1;\\ \frac{d-n_2u}{m_2}, & m_2\in I_2.\end{cases}$$

Пусть m_2 пробегает все целые значения из I_1. В этом случае мы повторим рассуждения при получении оценки для величины $\#T_1(d,u,\Omega)$:

$$T(F,d,n_2)=\frac{1}{n_2}\sum_{m_2\in I_1}\mu_{n_2,d}(m_2)F(\Omega,n_2,d,u;m_2)+O(R(n_2)), \tag{36}$$

где согласно (32)

$$\sum_{n_2<\frac{d}{u}} R(n_2) \ll R\left(\frac{d}{u}, u\right). \tag{37}$$

Теперь пусть $m_2 \in (x, n_2]$. Мы не можем воспользоваться леммой 5, потому что

$$F''_{m_2^2}(\Omega, n_2, d, u; m_2) \asymp \frac{d}{m_2^3}.$$

Поэтому разобьем интервал I_2 точками $2^{t+1}, \ldots,\ 2^k$ $(k = [\log_2 n_2],\ t = [\log_2 x])$:

$$I_2 = \bigcup_{j=t}^{k} I_{2,j}, \quad |I_{2,j}| \le 2^j.$$

Тогда на каждом из интервалов $I_{2,j}$

$$F''_{m_2^2}(\Omega, n_2, d, u; m_2) \asymp \frac{d}{2^{3j}}.$$

Теперь воспользуемся леммой 5

$$T(F, d, n_2) = \frac{1}{n_2} \sum_{m_2 \in I_2} \mu_{n_2,d}(m_2) F(\Omega, n_2, d, u; m_2) + O\left(\sum_{j=t}^{k} R_j\right), \tag{38}$$

$$R_j \ll \frac{P_j}{2} \cdot \delta_{n_2}(d) + \sigma_0^{2/3}(n_2)\sigma_0^2(a) P_j A_j^{-1/3} + (A_j^{1/2} a^{1/2} + n_2^{1/2} + a) P_j^{\varepsilon},$$
$$a = \text{НОД}(n_2, d), \quad P_j = 2^j, \quad A_j = P_j^3/d.$$

Суммируя R_j по индексу j, при этом учитывая соотношения

$$\sum_{j=t}^{k} P_j \ll n_2, \ \ \sum_{j=t}^{k} P_j^{\varepsilon} \ll d^{\varepsilon}, \ \ \sum_{j=t}^{k} P_j^{\varepsilon} A_j^{1/2} \ll d^{\varepsilon-1/2} n_2^{3/2},$$

получаем

$$\sum_{j=t}^{k} R_j \ll n_2 \delta_{n_2}(d) + d^{1/3} \log d \sigma_0^{2/3}(n_2) \sigma_0^2(a) + (d^{-1/2} n_2^{3/2} a^{1/2} + n_2^{1/2} + a) d^{\varepsilon}.$$

Дальше, как и в случае оценки остатка величины $\#T_1(d, u, \Omega)$, приходим в предположении $u = (d \log d)^{1/2}$ к оценке

$$\sum_{n_2<d/u} \sum_{j=t}^{k} R_j \underset{\Omega,\varepsilon}{\ll} d^{5/6} \log^{7/6+\varepsilon} d.$$

Отсюда и из (35)-(38) получаем асимптотическую формулу для $\#T^{(2)}(d,u,\Omega)$:

$$\#T^{(2)}(d,u,\Omega)=\sum_{n_2<d/u}\frac{1}{n_2}\sum_{n_2/2<m_2\le n_2}\mu_{n_2,d}(m_2)F(\Omega,n_2,d,u;m_2)+O_{\Omega,\varepsilon}(d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}d).$$

Оценка главного члена получена в лемме 8. Следовательно

$$\#T^{(2)}(d,u,\Omega)=\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{a|d}\frac{d}{a}\Bigg((\log 2-\Phi(\Omega))\Bigg(\log\left(\frac{d}{ua}\right)+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\Bigg)+C(\Omega)\Bigg)+$$

$$+O_{\Omega,\varepsilon}(d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}d).$$

Теперь мы можем вычислить $\#T_2(d,u,\Omega)$. Для этого подставим последнюю формулу и (34) в (33), учитывая (19):

$$\#T_2(d,u,\Omega)=\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{a|d}\frac{d}{a}\Bigg(\Phi(\Omega)\Bigg(\log\left(\frac{d}{ua}\right)+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\Bigg)+C_1(\Omega)-h_\beta(\Omega)\Bigg)+O_{\Omega,\varepsilon}(d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}d),$$

$$C_1(\Omega)=h(\Omega)-\frac{\log^2 2}{2}-\int_{\frac12}^{1}\frac{\log(1+\beta\alpha(\beta))}{\beta(1+\beta\alpha(\beta))}d\beta. \tag{39}$$

Дальше, пользуясь замечанием 3 и формулами (27), (31), вычислим $T_\Omega(d)$:

$$T_\Omega(d)=\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{a|d}\frac{d}{a}\Bigg(\Phi(\Omega)\Bigg(\log\frac{d}{a^2}+2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\Bigg)+C_1(\Omega)\Bigg)+O_{\Omega,\varepsilon}(d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}d).$$

Затем подставим $T_\Omega(d)$ в (26), и используя соотношения (см. [8], стр. 95)

$$d\sum_{abc|d}\frac{\mu(b)\mu(c)}{abc}=\varphi(d),\quad \sum_{abc|d}\frac{\mu(b)\mu(c)}{abc}\log(a^2bc)=0,$$

получим асимптотическую формулу для $T^*_\Omega(d)$:

$$T^*_\Omega(d)=\frac{\varphi(d)}{\zeta(2)}\Bigg(\Phi(\Omega)\Bigg(\log d+2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\Bigg)+C_1(\Omega)\Bigg)+O_{\Omega,\varepsilon}(d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}d).$$

Из результатов леммы 9 и из равенства

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d};\Omega)=\#\mathfrak{M}(\Gamma_{(d-a)/d};\Omega)\ \text{для всех}\ a>d/2$$

следует

$$\sum_{\substack{a=1\\ \text{НОД }(a,d)=1}}^{d}\#\mathfrak{M}(\Gamma_{a/d};\Omega)=4T^*_\Omega(d)+6\varphi(d).$$

Положив

$$\phi_1(\Omega)=\frac{4\Phi(\Omega)}{\zeta(2)},\ \phi_2(\Omega)=\frac{4\Phi(\Omega)}{\zeta(2)}\left(2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\right)+\frac{4C_1(\Omega)}{\zeta(2)}+6, \qquad (40)$$

получаем (2). Теорема 1 доказана.
Следствием теоремы 1 и (7) служит
Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда*

$$\sum_{\substack{a=1\\ НОД(a,d)=1}}^{d} s(a/d,\Omega)=\varphi(d)\left(\frac{\phi_1(\Omega)}{2}\log d+\frac{\phi_2(\Omega)}{2}-\frac{3}{2}\right)+O_{\Omega,\varepsilon}(d^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}d).$$

Замечание 4. *Функция $\phi_1(\Omega_\theta)$ возрастает по переменной θ.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из замечания 2 и (40). □

В завершение работы вычислим константы $\phi_1(\Omega_i),\phi_2(\Omega_i)$ для $i\in\{1,2\}$. Мы имеем из леммы 4 $\beta_{\Omega_1}(\alpha)=1/(2-\alpha)$, $\beta_{\Omega_2}(\alpha)=(1+2\alpha)/(2+\alpha)$, из (15) $\Phi(\Omega_1)=1/2$, $\Phi(\Omega_2)=\log 3/2$. Следовательно (см. (40))

$$\phi_1(\Omega_1)=\frac{2}{\zeta(2)},\ \ \phi_1(\Omega_2)=\frac{2\log 3}{\zeta(2)}. \qquad (41)$$

Согласно формулам (16)-(19) и (39)

$$h(\Omega_1)=h-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\sum_{n\le 2m\le 2n}\frac{2m-n}{m}-\log 2+\frac{1}{2}\right), \qquad (42)$$

$$h(\Omega_2)=h-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\sum_{n\le 2m\le 2n}\frac{2m-n}{n^2+m^2-mn}-\log 2+\frac{\log 3}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m\le n}\frac{n+2m}{n^2+m^2+mn}-\log 3\right), \qquad (43)$$

$$C_1(\Omega_1)=h(\Omega_1)-\frac{1}{2}\left(\log^2 2-\log 2+1\right),$$

$$C_1(\Omega_2)=h(\Omega_2)-\frac{\log^2 2}{2}-\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\log\left(\frac{2(\beta^2-\beta+1)}{2-\beta}\right)\frac{2-\beta}{\beta(\beta^2-\beta+1)}d\beta.$$

Первообразная для функции, стоящей в интеграле равна

$$\log(\beta^2-\beta+1)\log\left(\frac{2-\beta}{2\sqrt{\beta^2-\beta+1}}\right)-\log 3\log(2-\beta)+2Li_2\left(\frac{\beta}{2}\right)-$$

$$-2\left(Li_2\left(\frac{\beta}{2}(1+i\sqrt{3})\right)+Li_2\left(\frac{\beta}{2}(1-i\sqrt{3})\right)\right)+Li_2\left(\frac{2-\beta}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}+i)\right)+Li_2\left(\frac{2-\beta}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}-i)\right),$$

где
$$Li_2(z) = -\int_0^z z^{-1}\log(1-z)dz \text{ — дилогарифм Эйлера.}$$
Дальше применим свойства дилогарифма Эйлера (см. [13; глава 1, §1.3, §1.4, глава 5, §5.4,§5.5])
$$Li_2(z^2) = 2Li_2(z) + 2Li_2(-z),$$
$$Li_2(z) + Li_2(1-z) = \pi^2/6 - \log z\log(1-z),$$
$$Li_2(r,\varphi) + Li_2(R,\Phi) = -\log r\log R - \varphi\Phi + \pi^2/6,$$
$$\text{если}\quad \tan\Phi = r\sin(\varphi)/(1-r\cos(\varphi)), R = \sin(\varphi)/\sin(\Phi+\varphi)),$$
$$Li_2(r,\pi/3) = \frac{1}{6}Li_2(-r^3) - \frac{1}{2}Li_2(-r)$$
(здесь $Li_2(r,\varphi) = Re(Li_2(re^{i\varphi}))$). Тогда
$$C_1(\Omega_2) = h(\Omega_2) - \log^2 2 - \frac{\log^2 3}{8} + \frac{11\pi^2}{72} - \frac{Li_2(-1/8)}{2} + \frac{7Li_2(-1/2)}{2}.$$
Используя (40), вычислим
$$\phi_2(\Omega_1) = \frac{2}{\zeta(2)}\left(2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + 2h(\Omega_1) - \log^2 2 + \log 2 - 2\right) + 6, \tag{44}$$
$$\phi_2(\Omega_2) = \frac{2}{\zeta(2)}\left(\log 3\left(2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1\right) + 2(h(\Omega_2) - \log^2 2) - \frac{\log^2 3}{4} - Li_2\left(-\frac{1}{8}\right) + 7Li_2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{31}{3}. \tag{45}$$
Таким образом, мы доказали

Следствие. *Пусть для области Ω найдется преобразование $\mathfrak{T}$, для которого $\mathfrak{T}(\Omega) = \Omega_i$ $i \in \{1,2\}$. Тогда $\phi_1(\Omega) = \phi_1(\Omega_i)$, $\phi_2(\Omega) = \phi_2(\Omega_i)$. Величины $\phi_1(\Omega_i), \phi_2(\Omega_i)$ определены равенствами (18), (41)-(45).*

Автор глубоко признательна В.А. Быковскому и А. В. Устинову за постановку задачи, внимание к работе, советы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хинчин А.Я. Цепные дроби. — М.:Наука, 1978.

[2] Hermite CH. Sur L'introduction des variables continues dans la theorie des nombres. — Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1851, Bd. 41.

[3] Minkowski H. Zur Theorie der Kettenbruche. — Annales de l'Ecole Normale Superieure, 1894, V.13, №3.

[4] Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions. — in Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin, VEB, 1968, 87-96.

[5] Tonkov T. On the average length of finite continued fractions. — in Acta Arith., 26 (1974), 47-57.

[6] Porter J.W. On a theorem of Heilbronn. — Mathematika, 1975, v/ 22, №1, 20-28.

[7] Knuth D.E. Evaluation of Porter's Constant. — Comp. and Maths/ with Appls., v. 2, 1976, 137-139.

[8] Устинов А.В. О числе решений сравнения $xy \equiv l(\mod q)$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции. — Алгебра и анализ, том 20, є 5, стр. 186-216.

[9] Вороной Г.Ф. Собрание сочинений в трех томах. — Киев: Издательство АН УССР, 1952.

[10] Касселс Дж. В.С. Введение в геометрию чисел. — М.:Мир, 1965.

[11] Боднар Д.И. Ветвящиеся подходящие дроби. — Киев.:Наука, 1986.

[12] Устинов А.В. О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами. — Математический сборник, в печати.

[13] Lewin L.Polylogarithms and associated functions. — in North-Holland Publishing Co. , 1981.

Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

O. A. Gorkusha

On finite special continued fractions.

In the present work the asymptotical formula is obtained for average length of a special class of finite continued fractions with a fixed denominator.