Введение в функциональный анализ: учебное пособие

А. А. Илларионов

26 декабря 2008 г.

Оглавление

Глава I

Пространства

§ 1 Линейные пространства

Определение. Множество X называется *линейным пространством над полем вещественных чисел,* если в нем определены следующие операции

- *умножение элемента на скаляр:* $\alpha \cdot x = z \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X;$
- *сложение элементов:* $x + y = z \in X \qquad\qquad \forall x, y \in X;$

удовлетворяющие для любых $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in R$ аксиомам:

1) $x + y = y + x$; 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$; 3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$; 4) $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$; 5) $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta y$; 6) $1\cdot x = x$; 7) существует элемент $\theta \in X$ такой, что $\theta + x = x$, $0 \cdot x = \theta \ \forall x \in X$.

Элемент θ называется *нулем* (нулевым элементом) X. В дальнейшем будем обозначать его просто 0.

Используя эти операции можно ввести разность элементов: $x-y = x + (-1) \cdot y$ и противоположный по знаку элемент: $-x = (-1) \cdot x$.

Если в определении вещественные числа заменить на комплексные, то получаем линейное пространство над полем комплексных чисел. В дальнейшем будем рассматривать только линейные пространства над полем вещественных чисел и называть их просто линейными пространствами.

Очевидными примерами линейных пространств являются

1) $\mathbb{R}^n$ — множество n-мерных векторов,

2) $C[a, b]$ — множество всех непрерывных на $[a, b]$ функций,

3) P — множество всех многочленов.

Определение. *Линейной комбинацией* элементов $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства X называется элемент x вида

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, — коэффициенты линейной комбинации.

Элементы $x_1, \ldots, x_n$ называются

— *линейно зависимыми,* если существуют числа $c_1,\ldots,c_n$ не равные нулю одновременно такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0; \tag{1.1}$$

— *линейно независимыми,* в противном случае, то есть, если равенство (1.1) возможно только при $c_i = 0$ $(1 \le i \le n)$.

Линейное пространство X называется *n-мерным,* если

1) существуют n линейно независимых элементов пространства X;

2) любые $n + 1$ элементов X линейно зависимы.

Любые n линейно независимых элементов n-мерного пространства X называют *базисом* X.

Пространство называют *бесконечномерным,* если для любого натурального n можно указать n линейно независимых элементов этого пространства.

Упражнения. Доказать, что

1.1 элементы линейно зависимы, если и только если хотя бы один из них является линейной комбинацией других;

1.2 если $\{e_i\}_1^n$ — базис в X, то для любого $x \in X$ существуют числа c_i, определяемые единственным образом, такие, что

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i. \tag{1.2}$$

1.3 множество многочленов степени не выше n конечномерно и найти его размерность;

1.4 пространство $C[a, b]$ бесконечномерное.

Равенство (1.2) называют *разложением* элемента x по базису e_i, числа c_i — *коэффициенты разложения* по базису.

Определение. Множество L называется *линейным многообразием* линейного пространства X, если

$$\alpha x + \beta y \in L \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x, y \in L.$$

Упражнение 1.5. Доказать, что если L линейное многообразие, то оно содержит любую линейную комбинацию своих элементов.

Примеры.

1. Множество всех непрерывно дифференцируемых функций — линейное многообразие в $C[a, b]$;
2. Множество точек вида $(x_1, x_2, 0)$ — линейное многообразие в $\mathbb{R}^3$.

Упражнения. Доказать, что

1.6 прямая (плоскость) является линейным многообразием в $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$), если и только если она проходит через начало координат;

1.7 множество $\{x \in C[a, b] : \quad \int_a^b x(t)\, dt = \alpha, \quad x(a) = \beta\}$ является линейным многообразием в $C[a, b]$ только при $\alpha = \beta = 0$.

§ 2 Нормированные пространства

Норма является обобщением понятия модуля для чисел и длины для векторов.

Определение. Линейное пространство X называется *нормированным,* если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие число $\|x\| \in \mathbb{R}$ (норма x) так, что выполнены следующие три аксиомы:

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (аксиома тривиальности);

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x \in X$;

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Примеры.

1. $X = \mathbb{R}^3$. Норму можно ввести следующими способами:

$$\|x\| = \max_{1 \le i \le 3} |x_i|; \quad \|x\| = \sum_{i=1}^{3} |x_i|; \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2};$$

Выполнение аксиом для первых двух норм очевидно. Для последней 1-я и 2-я аксиома очевидна. Аксиома 3 вытекает из неравенства Минковского (6.7), которое будет доказано позже.

2. $C[a, b]$ — множество всех непрерывных на $[a, b]$ функций,

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \qquad \forall x = x(t) \in C[a, b].$$

3. $L^1(a, b)$ — множество всех интегрируемых по Лебегу на (a, b) функций,

$$\|x\|_{L^1(a,b)} = \int_a^b |x(t)|\, dt \qquad \forall x = x(t) \in L^1(a, b).$$

4. В любом конечномерном пространстве X с базисом $e_1, \dots, e_n$ можно ввести норму
$$\|x\|_c = \sum_{k=1}^{n} |c_k|,$$
где c_i — коэффициенты разложения элемента x по базису $\{e_i\}$ (т.е. $x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$).

Подчеркнем, что нормированное пространство определяется, во-первых, составом своих элементов, во-вторых, нормой. На одном и том же линейном пространстве можно по разному вводить нормы и соответственно получать разные нормированные пространства.

Наличие нормы позволяет определить *расстояние* между элементами x и y, как число
$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$
Тогда естественно назвать множество
$$B_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\}$$
шаром с центром в точке $a \in X$ *радиуса* $r > 0$. Множество $\{x \in X : \|x - a\| < r\}$ называют открытым шаром.

Окрестностью точки называется любой открытый шар с центром в этой точке.

Пусть $M \subset X$. Точка x называется

— *внутренней* точкой множества M, если существует окрестность x, содержащаяся в M;

— *граничной* точкой множества M, если в любой окрестности x существуют точки как принадлежащие M, так и не принадлежащие M.

Множество всех граничных точек M называется *границей* M и обозначается ∂M.

Множество M называется

— *ограниченным,* если существует постоянная C такая, что
$$\|x\| \leq C \quad \forall x \in M;$$

— *открытым,* если все его точки внутренние;

— *замкнутым,* если оно содержит все свои граничные точки.

Замыканием множества M называется множество $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Упражнения. Доказать, что

2.1 если множество M содержится в некотором шаре, то оно ограничено;

2.2 $\partial(M \cup N) \subset \partial M \cup \partial N$;

2.3 M замкнуто $\Longleftrightarrow M = \overline{M}$;

2.4 $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

§ 3 Сходимость в нормированных пространствах

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов нормированного пространства X *сходится к* элементу $x \in X$, если
$$\|x_n - x\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Символически это записывается $x_n \to x$ или $\lim x_n = x$, элемент x называют *пределом* последовательности x_n.

Упражнения. Доказать, что

3.1 предел единственен;

3.2 сходящаяся последовательность ограничена;

3.3 непрерывность нормы: $\|x_n\| \to \|x\|$, если $x_n \to x$;

3.4 множество M замкнуто $\Longleftrightarrow$ из условий: $x_n \in M$, $x_n \to x$ вытекает $x \in M$ (т.е. M содержит все свои предельные точки).

Подчеркнем, что из определения и упр. 2.3, 3.4 вытекает
множество M замкнуто, если выполняется одно из условий:

(а) M содержит свои граничные точки;

(б) $\overline{M} = M$;

(в) из $x_n \in M$, $x_n \to x$ вытекает $x \in M$.

(а) является определением замкнутого множества, (б) и (в) можно рассматривать как эквивалентные определения.

Определение. Замкнутое линейное многообразие нормированного пространства X называют *линейным подпространством* X.

Примеры.

1. Любая прямая, проходящая через начало координат, является линейным подпространством в $\mathbb{R}^2$.

2. Множество $L = \{x \in C[a,b] : \int_a^b x(t)\,dt = 0, \quad x(a) = 0\}$ является линейным подпространством в $C[a,b]$. Действительно, L — линейное многообразие в $C[a,b]$ (упр. 1.7). Осталось доказать, что множество L замкнуто. Пусть $x_n \in L$, $x_n \to x$. Так как

$$\|x_n - x\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - x_n(t)| \to 0, \quad x_n \in L,$$

то

$$x_n(a) \to x(a) \implies x(a) = 0;$$
$$\left|\int_a^b x_n(t)\,dt - \int_a^b x(t)\,dt\right| \le \int_a^b |x_n(t)\,dt - x(t)|\,dt \le$$
$$\le \max_{t\in[a,b]} |x(t) - x_n(t)| \int_a^b dt \to 0 \implies \int_a^b x(t)\,dt = 0.$$

Следовательно, $x \in L$, множество L замкнуто и, значит, является линейным подпространством.

3. Множество всех многочленов P является линейным многообразием в $C[a,b]$, но не является линейным подпространством. Действительно, определим последовательность многочленов

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^n}{n!}.$$

Из курса матем. анализа (разложение функций в ряд Тейлора) вытекает, что $x_n \to e^t \notin P$. Поэтому P не замкнуто и, следовательно, не может быть линейным подпространством.

Упражнение 3.5. Доказать, что замыкание линейного многообразия является линейным подпространством.

Введем еще одно понятие.

Определение. Множество $M_1 \subset X$ *плотно* в $M_2 \subset X$, если для любого $x \in M_2$ существует последовательность элементов x_n из M_2 такая, что $x_n \to x$.

Плотность M_1 в M_2 означает, что любой элемент из M_2 можно сколь угодно точно приблизить (аппроксимировать) элементами из множества M_1. Например, множество рациональных чисел плотно в множестве вещественных чисел.

Упражнения. Доказать, что

3.6 M_1 плотно в $M_2 \iff \forall x \in M_2$, $\epsilon > 0$ $\exists x_\epsilon \in K_1$: $\|x - x_\epsilon\| < \epsilon$;

3.7 если M_1 плотно в M_2, M_2 плотно в M_3, то M_1 плотно в M_3.

Из определения и упражнения 3.6 вытекает
множество M плотно в K, если выполняется одно из условий:

(а) для любого $x \in K \setminus M$ существует $x_n \in M$, $x_n \to x$;

(б) для любого $\epsilon > 0$, $x \in K$ существует $x_\epsilon \in M$ такой, что $\|x - x_\epsilon\| \le \epsilon$;

(в) $K \subset \overline{M}$.

(а) является определением плотного множества, (б) и (в) можно рассматривать как эквивалентные определения.

§ 4 Банаховы пространства

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов нормированного пространства X называется *фундаментальной,* если

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Из свойств предела числовой последовательности вытекает

Эквивалентное определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов нормированного пространства X называется *фундаментальной,* если для любого $\epsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\|x_n - x_{n+p}\| \le \epsilon \qquad \forall n \ge N, \quad \forall p > 0.$$

Упражнения. Доказать, что

4.1 сходящаяся последовательность фундаментальна;

4.2 фундаментальная последовательность ограничена;

4.3 если $\{x_n\}$ фундаментальна и содержит сходящуюся подпоследовательность, то $\{x_n\}$ сходится.

Лемма 4.1. *Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в нормированном пространстве X. Тогда, если существует постоянная $\gamma \in (0, 1)$ такая, что*

$$\|x_n - x_{n+1}\| \le \gamma \cdot \|x_n - x_{n-1}\| \qquad \forall n \ge 2, \tag{4.1}$$

то последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная.

Доказательство. Из (4.1) вытекает оценка

$$\|x_n - x_{n+1}\| \le C\gamma^n, \quad C = \|x_1 - x_2\| \quad \text{(проверить!)},$$

используя которую и неравенство треугольника, получаем при $n < m$

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \|(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \ldots + (x_{m-1} - x_m)\| \le \\ &\le \|(x_n - x_{n+1})\| + \|(x_{n+1} - x_{n+2})\| + \ldots + \|(x_{m-1} - x_m)\| \le \\ &\le C\gamma^n(1 + \gamma + \ldots + \gamma^{m-1}) \le C\gamma^n \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k = C\gamma^n(1 + (1-\gamma)^{-1}).\end{aligned}$$

В последнем равенстве при суммировании ряда использовано условие $\gamma \in (0, 1)$. Случай $m < n$ аналогичен. В итоге получаем

$$\rho(x_n, x_m) \le C\gamma^{\min\{m,n\}}(1 + (1-\gamma)^{-1}) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Лемма доказана.

Определение. Пространство называется *полным,* если в нем любая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство называют *банаховым пространством.*

Как хорошо известно любая фундаментальная *числовая* последовательность сходится. В бесконечномерных нормированных пространствах это выполняется не всегда, то есть существуют бесконечномерные нормированные пространства, которые не являются полными.

Пример. Пусть X — линейное пространство, состоящее из всех непрерывных на $[-1, 1]$ функций с нормой

$$\|x\| = \int_{-1}^{1} |x(t)|\, dt.$$

Определим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \le t \le 0, \\ \sqrt{nt} & \text{при } 0 < t \le 1/n, \\ 1 & \text{при } 1/n < t \le 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $x_n \in C[-1, 1]$. Положим

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \le 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\int_{-1}^{1} |x(t) - x_n(t)|\, dt = \int_0^{1/n} (1 - nt)\, dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \to 0.$$

Следовательно,

$$\|x_n - x_m\| = \int_{-1}^{1} |x_m(t) - x_n(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} |x_m(t) - x(t) + x(t) - x_n(t)|\, dt \le$$
$$\le \int_{-1}^{1} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_a^b |x(t) - x_n(t)|\, dt \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty,$$

то есть последовательность x_n фундаментальная. Но ее предельный элемент x не является непрерывной на $[a, b]$ функцией, то есть $x \notin X$. Следовательно, x_n не сходится в пространстве X и, поэтому X не является банаховым пространством.

Отметим, что любое *конечномерное* нормированное пространство является банаховым. Это будет доказано в следующем параграфе.

Теорема 4.1 (принцип вложенных шаров). *Пусть X — банахово пространство, последовательность шаров $\{B_n\} \subset X$ радиуса r_n удовлетворяет условиям:*

$$r_n \to 0, \quad B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$$

Тогда существует единственная точка $x \in X$, принадлежащая всем шарам B_n.

Доказательство. Введем обозначения: x_n — центр, r_n — радиус шара B_n. Сначала докажем, что последовательность x_n сходится. Если $m > n$, то

$$B_m \subset B_n \implies x_m \in B_n \implies \|x_n - x_m\| \le r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty, \quad m > n.$$

Следовательно, $\|x_n - x_m\| \to 0$ при любых $n, m \to \infty$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Так как пространство X полное, то $x_n \to x \in X$.

Докажем, что x принадлежит всем шарам B_n. Возьмем любой шар B_n. Для любого $m > n$ имеем

$$B_m \subset B_n \implies x_m \in B_n \implies \|x_n - x_m\| \le r_n$$

и используя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &= \|(x - x_m) + (x_m - x_n)\| \le \|x - x_m\| + \|x_n - x_m)\| \le \\ &\le \|x - x_m\| + r_n \to r_n \quad \text{при } m \to \infty. \end{aligned}$$

Значит, $\|x - x_n\| \le r_n$, то есть $x \in B_n$.

Осталось доказать, что x — единственная точка, принадлежащая всем шарам. Пусть x' — еще одна точка, принадлежащая всем B_n. Тогда

$$\|x - x'\| \le \|x - x_n\| + \|x' - x_n\| \le r_n + r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Значит, $x = x'$. Теорема доказана.

§ 5 Соотношения между нормами

Пусть X, Y — нормированные пространства. Если $X \subset Y$, то говорят, что X *вложено* в Y.

Определение. Вложение $X \subset Y$ называется *непрерывным,* если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|x\|_Y \le C\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Здесь $\|x\|_X$ — норма элемента x в пространстве X, $\|x\|_Y$ — в Y.

Пример. Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на $[a, b]$. Значит, $C[a, b] \subset L^1(a, b)$. Из очевидной оценки

$$\|x\|_{L^1(a,b)} = \int_a^b |x(t)|\, dt \le \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \int_a^b dt = (b - a)\|x\|_{C[a,b]}$$

вытекает непрерывность вложения $C[a,b] \subset L^1(a,b)$.

В одном и том же пространстве можно по разному вводить норму. Пусть в X введены две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Норма $\|\cdot\|_1$ *подчинена* норме $\|\cdot\|_2$, если существует константа $C>0$ такая, что

$$\|x\|_1 \le C\|x\|_2 \quad \forall x \in X.$$

Грубо говоря, подчиненная — это меньшая, более «слабая» норма.

Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются *эквивалентными,* если каждая из них подчинена другой. Очевидно, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, если и только если существуют постоянные α и β такие, что

$$\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1 \quad \forall x \in X,$$

то есть, любую норму можно оценить снизу и сверху через эквивалентную. Эквивалентность норм обозначают $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

Пример. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\|x\|_{e^\alpha} = \max\limits_{t\in[a,b]} |e^{\alpha t}x(t)|$ — эквивалентная норма в пространстве $C[a,b]$. Это вытекает из оценок

$$\begin{aligned}
\|x\|_{C[a,b]} &= \max_{t\in[a,b]} |x(t)e^{\alpha t}e^{-\alpha t}| \le C_1 \max_{t\in[a,b]} |x(t)e^{\alpha t}| = C_1\|x\|_{e^\alpha},\\
\|x\|_{e^\alpha} &= \max_{t\in[a,b]} |e^{\alpha t}x(t)| \le C_2 \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = C_2\|x\|_{C[a,b]},\\
& \quad C_1 = \max_{t\in[a,b]} |e^{-\alpha t}|, \quad C_2 = \max_{t\in[a,b]} |e^{\alpha t}|.
\end{aligned}$$

Упражнения. Доказать, что

5.1 если X непрерывно вложено в Y, то из условия $x_n \to x$ в X вытекает $x_n \to x$ в Y;

5.2 если $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$, то $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$;

5.3 если $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, то условие $x_n \to x$ по норме $\|\cdot\|_1$ эквивалентно $x_n \to x$ по норме $\|\cdot\|_2$;

5.4 если $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_1$, то X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_2$.

Возникает естественный вопрос: не являются ли все нормы в одном и том же пространстве эквивалентными? Это оказывается верным только в конечномерном случае.

Теорема 5.1. *В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство теоремы мы опустим. Его можно найти в [**?**].

Следствие 5.1. *Любое конечномерное пространство банахово.*

Доказательство. Пусть X — конечномерное пространство с базисом $e_1, \dots, e_n$ с нормой $\|\cdot\|$. Введем еще одну норму:

$$\|x\|_c = \sum_{i=1}^n |c_i| \quad \text{при } x = \sum_{i=1}^n |c_i|, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

По теореме 5.1 нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_c$ эквивалентны. Поэтому достаточно доказать, что X — банахово пространство по норме $\|\cdot\|_c$ (упр. 5.4). Пусть $x_k = \sum\limits_{i=1}^n c_i^{(k)} e_i$ — фундаментальная последовательность. Тогда

$$\|x_k - x_m\|_c = \sum_{i=1}^n |c_i^{(k)} - c_i^{(m)}| \to 0 \quad \text{при } k,m \to \infty.$$

Следовательно, последовательность векторов $c^{(k)} = (c_1^{(k)}, \dots, c_n^{(k)})$ — фундаментальная в $\mathbb{R}^n$ и, значит, она сходится: $c^{(k)} \to c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Полагая $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$, получаем $\|x_k - x\|_c \to 0$, т.е. последовательность x_k сходится. Следствие доказано.

Следствие 5.2. *Любое конечномерное линейное многообразие нормированного пространства является линейным подпространством.*

Доказательство. Пусть L — конечномерное линейное многообразие нормированного пространства X. Тогда L можно рассматривать, как самостоятельное линейное нормированное пространство с нормой пространства X. По следствию 5.1 L — банахово пространством. Значит, множество L замкнуто. Следствие доказано.

В бесконечномерных пространствах разные нормы не обязательно эквивалентны.

П р и м е р. Введем в $C[a,b]$ две нормы:

$$\|x(t)\|_{C[a,b]} = \max_{a\le t\le b} |x(t)|, \quad \|x(t)\|_{L^1(a,b)} = \int_a^b |x(t)|\,dt.$$

Докажем, что $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ – норма не подчинена $\|\cdot\|_{L^1}$ – норме. Это означает, что для любого (сколь угодно большого) числа C найдется функция $x \in C[a,b]$ такая, что

$$\|x\|_{C[a,b]} > C\|x\|_{L^1(a,b)}. \tag{5.1}$$

Для простоты считаем $a=0$, $b=1$. Пусть

$$x_n(t) = \begin{cases} n - n^2 t & \text{при } 0 \le t \le 1/n, \\ 0 & \text{при } 1/n < t \le 1. \end{cases}$$

Тогда $x_n \in C[0,1]$, $\|x_n\|_{C[a,b]} = n$, $\|x_n\|_{L^1[0,1]} = 1/2$. Значит, при $n > C/2$ функция x_n удовлетворяет (5.1). Следовательно, нормы не эквивалентны.

§ 6 Неравенства Гельдера и Минковского

Имеет место неравенство Юнга

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}, \quad p,q \in (1,+\infty), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{6.1}$$

Равенство возможно только при $|a|^p = |b|^q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из курса математического анализа известно, что функция $\varphi(t) = e^t$ строго выпуклая, то есть

$$\varphi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) < \alpha\varphi(t_1) + (1-\alpha)\varphi(t_2) \quad \forall t_1 \ne t_2, \ \ \alpha \in (0,1). \tag{6.2}$$

Неравенство (6.2) означает, что отрезок, соединяющий точки графика функции $\varphi(t)$ с абсциссами t_1 и t_2, лежит выше самого графика. Используя свойства логарифма и неравенство (6.2), в котором $\alpha = 1/p$,

$1-\alpha = 1/q$, $t_1 = \ln|a|^p$, $t_2 = \ln|b|^q$, получаем

$$\begin{aligned} |ab| &= \exp(\ln|ab|) = \exp(\frac{1}{p}\ln|a|^p + \frac{1}{q}\ln|b|^q) < \\ &< \frac{1}{p}\exp(\ln|a|^p) + \frac{1}{q}\exp(\ln|b|^q) = \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \end{aligned}$$

если $|a|^p \ne |b|^q$. Если $|a|^p = |b|^q$, то (6.1) переходит в равенство.

Теорема 6.1. *Пусть D — измеримое по Лебегу множество из $\mathbb{R}^n$,*

$$p,q \in (1,+\infty), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

Тогда имеет место неравенство Гельдера

$$\int_D |f\cdot g|\,dx \le \left(\int_D |f|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g|^q\,dx\right)^{1/q}, \tag{6.3}$$

которое справедливо для любых функций f и g, для которых интегралы, входящие в правую часть, существуют и конечны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для краткости, обозначим

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad \|g\|_q = \left(\int_D |g|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Если $\|f\|_p = 0$ либо $\|g\|_q = 0$, то (6.3) очевидно. Пусть $\|f\|_p \ne 0$, $\|g\|_q \ne 0$. Используя неравенство Юнга, получаем соотношение

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q} \le \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q},$$

интегрируя которое, имеем

$$\int_D \frac{|fg|}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}\,dx \le \int_D \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p}\,dx + \int_D \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}\,dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Из последнего вытекает (6.3). Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Пусть D — измеримое по Лебегу множество из $\mathbb{R}^n$, $p \in (1,+\infty)$. Тогда имеет место неравенство Минковского*

$$\left(\int_D |f+g|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g|^p\,dx\right)^{1/p}, \tag{6.4}$$

которое справедливо для функций f и g, для которых интегралы, входящие в правую часть неравенства, существуют и конечны.

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_D |f+g|^p\,dx = \int_D |f+g|\cdot|f+g|^{p-1}\,dx \le$$
$$\le \int_D |f|\cdot|f+g|^{p-1}\,dx + \int_D |g|\cdot|f+g|^{p-1}\,dx. \qquad (6.5)$$

Используя неравенство Гельдера (6.3), в котором $g = |f+g|^{p-1}$, и учитывая, что $(p-1)q = p$, получаем

$$\int_D |f|\cdot|f+g|^{p-1}\,dx \le \left(\int_D |f|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f+g|^p\,dx\right)^{1/q}.$$

Аналогично

$$\int_D |g|\cdot|f+g|^{p-1}\,dx \le \left(\int_D |g|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f+g|^p\,dx\right)^{1/q}.$$

Применяя последние два неравенства к (6.5), получаем

$$\int_D |f+g|^p\,dx \quad\le\quad \left(\int_D |f|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f+g|^p\,dx\right)^{1/q} +$$
$$+\left(\int_D |g|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f+g|^p\,dx\right)^{1/q}.$$

Сокращая на $\left(\int_D |f+g|^p\,dx\right)^{1/q}$ и учитывая, что $1-1/q = 1/p$, получаем (6.4). Теорема доказана.

Теорема 6.3. *Пусть*

$$p,q\in(0,+\infty),\quad 1/p{+}1/q=1,\quad a=(a_1,\dots,a_n),\quad b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда имеет место неравенство Гельдера для сумм:

$$\sum_{i=1}^n |a_ib_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}. \qquad (6.6)$$

Теорема 6.4. *Пусть*

$$p\in(0,+\infty),\quad a=(a_1,\dots,a_n),\quad b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда имеет место неравенство Минковского для сумм:

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p}. \qquad (6.7)$$

Неравенства для сумм (6.6) и (6.7) доказываются точно также, как и соответствующие неравенства (6.3), (6.4) для интегралов. Надо знак интеграла поменять на знак суммы, f поменять на a_i, а g на b_i.

Упражнения.

6.1 Доказать неравенства (6.6) и (6.7).

6.2 Доказать обобщение неравенства Гельдера для интегралов

$$\int |f_1\cdot\ldots\cdot f_m|\,dx \le$$
$$\le \left(\int_D |f_1|^{p_1}\,dx\right)^{1/p_1}\cdot\ldots\cdot\left(\int_D |f_m|^{p_m}\,dx\right)^{1/p_m}$$

при условии $1/p_1+1/p_2+\ldots+1/p_m = 1$ (сначала рассмотреть случай $m=3$),

6.3 Пусть $p=q=2$. В каких случаях неравенства Гельдера для интегралов и сумм переходят в равенство?

§ 7 Примеры нормированных пространств

Конечномерные пространства

В $\mathbb{R}^n$, как правило, норму вводят одним из следующих способов

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}\quad(1\le p<\infty);\quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|$$

для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Выполнение аксиом 1, 2 нормы очевидно. Аксиома 3 (неравенство треугольника) вытекает из свойств суммы (максимума) для $p = 1$ ($p = \infty$) и из неравенства Минковского для сумм (6.7) при $1 < p < \infty$. Отметим, что норма $\|x\|_2$ — это «обычная» длина вектора x.

Можно указать ряд других норм в пространстве $\mathbb{R}^n$ (упр. 7.2 ниже). Используя нормы пространства $\mathbb{R}^n$, можно вводить нормы в любом другом конечномерном пространстве (упр. 7.1).

Упражнения. Доказать, что

7.1 в любом конечномерном пространстве X с базисом $\{e_i\}_1^n$ можно ввести норму следующим образом

$$\|x\| = \|c\|_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall x = \sum_{i=1}^n c_i e_i, \quad c = c(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $\|c\|_{\mathbb{R}^n}$ — норма в $\mathbb{R}^n$;

7.2 если A — матрица размера $n \times n$, $\det A \neq 0$, $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, то $\|x\|_A = \|Ax\|$ — тоже норма в $\mathbb{R}^n$;

7.3 $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ при $p \to +\infty$ (Подсказка: сначала рассмотреть случай: $\|x\|_\infty = 1$).

7.4 Что такое шар в пространстве $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) с нормой $\|x\|_1$? $\|x\|_\infty$?

Пространство C^m

$C[a,b]$ — множество всех непрерывных на $[a,b]$ функций;
$C^m[a,b]$ — множество всех m-раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций.

Очевидно, что $C^0[a,b] = C[a,b]$, $C^m[a,b] \subset C^n[a,b]$ при $m > n$. Норму вводят следующим образом:

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \quad \|x\|_{C^m[a,b]} = \sum_{k=0}^m \|x^{(k)}\|_{C[a,b]}.$$

Выполнение аксиом 1, 2 нормы очевидно. Аксиома 3 вытекает из свойств модуля и максимума (проверить!).

Из курса математического анализа [7, § 31] известно, что сходимость

$$\max_{a\le t\le b} |x(t) - x_n(t)| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

эквивалентна

$$x_n(t) \to x(t) \text{ равномерно на } [a,b].$$

То есть сходимость по норме в $C[a,b]$ — это равномерная сходимость на $[a,b]$. Соответственно, сходимость $f_n \to f$ в $C^m[a,b]$ эквивалентна

$$x_n^{(k)}(t) \to x^{(k)}(t) \text{ равномерно на } [a,b], \quad 0 \le k \le m.$$

Вложение $C^m[a,b] \subset C^n[a,b]$ непрерывно при $m > n$, причем

$$\|x\|_{C^n[a,b]} \le \|x\|_{C^m[a,b]} \quad \forall x \in C^m[a,b].$$

Согласно критерию Коши равномерной сходимости последовательности функций [7, § 31] пространство $C[a,b]$ банахово. Можно доказать, что $C^m[a,b]$ также банахово используя этот же критерий.

Через $C^\infty[a,b]$ обозначают множество всех бесконечное число раз дифференцируемых на $[a,b]$ функций. Отметим, что нельзя ввести норму на $C^\infty[a,b]$ так, чтобы получилось банахово пространство (см. [3]).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($1 < d < \infty$). Аналогичным образом определяются пространства функций d-переменных $C^m(\overline{\Omega})$.

Пространства Гельдера C^m_α

Функция $x = x(t)$ удовлетворяет *условию Гельдера* с показателем $\alpha \in (0,1]$ на $[a,b]$, если существует постоянная C такая, что

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le C|t_1 - t_2|^\alpha \quad \forall t_{1,2} \in [a,b]. \tag{7.1}$$

Подчеркнем, что постоянная C не зависит от $t_{1,2}$.

$C_\alpha[a,b]$ — множество функций, удовлетворяющих (7.1).

Очевидно, что это линейное пространство. Действительно, пусть $x_1, x_2 \in C_\alpha[a,b]$. Тогда существуют константы C_1 и C_2 такие, что

$$|x_1(t_1)-x_1(t_2)| \le C_1|t_1-t_2|^\alpha, \quad |x_2(t_1)-x_2(t_2)| \le C_2|t_1-t_2|^\alpha \quad \forall t_{1,2} \in [a,b].$$

Если $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, то функция $x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}|x(t_1) - x(t_2)| &= \left|\beta_1\left(x_1(t_1) - x_1(t_2)\right) + \beta_2\left(x_2(t_1) - x_2(t_2)\right)\right| \le \\ &\le |\beta_1| \cdot |x_1(t_1) - x_1(t_2)| + |\beta_2| \cdot |x_2(t_1) - x_2(t_2)| \le \\ &\le |\beta_1| \cdot C_1|t_1 - t_2|^\alpha + |\beta_2| \cdot C_2|t_1 - t_2|^\alpha = C|t_1 - t_2|^\alpha,\end{aligned}$$

где $C = |\beta_1|C_1 + |\beta_2|C_2$. Следовательно, $x \in C_\alpha[a,b]$.

При $\alpha = 0$ считают $C_\alpha[a,b] = C[a,b]$.

Пространство $C_\alpha[a,b]$ лежит «между» $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$.

Теорема 7.1. *Если* $1 \ge \beta > \alpha > 0$, *то*

$$C^1[a,b] \subset C_\beta[a,b] \subset C_\alpha[a,b] \subset C[a,b] \tag{7.2}$$

Доказательство. Если $x = x(t) \in C_\alpha[a,b]$, то из условия Гельдера (7.1) очевидным образом вытекает непрерывность функции x на $[a,b]$, значит, $x \in C[a,b]$, следовательно, $C_\alpha[a,b] \subset C[a,b]$.

Докажем, что $C_\beta[a,b] \subset C_\alpha[a,b]$. Пусть $x = x(t) \in C_\beta[a,b]$. Тогда существует константа C_1 такая, что

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le C_1|t_1 - t_2|^\beta = C_1|t_1 - t_2|^{\beta-\alpha}|t_1 - t_2|^\alpha.$$

Так как $\beta > \alpha$, то $|t_1 - t_2|^{\beta-\alpha} \le (b-a)^{\beta-\alpha}$. Условие (7.1), в котором $C = C_1(b-a)^{\beta-\alpha}$, выполнено. Значит, $x \in C_\alpha[a,b]$, $C_\beta[a,b] \subset C_\alpha[a,b]$.

Осталось доказать, что $C^1[a,b] \subset C_\beta[a,b]$. Пусть $x = x(t) \in C^1[a,b]$. Тогда $x'(t)$ непрерывна на $[a,b]$ и, следовательно, ограничена. Согласно формуле Лагранжа для любых чисел $t_1, t_2 \in [a,b]$ существует точка ξ, лежащая между t_1 и t_2, такая, что

$$x(t_1) - x(t_2) = x'(\xi)(t_1 - t_2).$$

Значит,

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le |x'(\xi)| \cdot |t_1 - t_2| \le \|x'\|_{C[a,b]}|t_1 - t_2| \ \ \forall t_1, t_2 \in [a,b].$$

Следовательно, $x \in C_\beta[a,b]$ и поэтому $C_1[a,b] \subset C_\beta[a,b]$. Теорема доказана.

Замечание. Вложения (7.2) строгие, то есть ни одно из них не является равенством.

Из (7.1) вытекает, что

$$\frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} < C \ \ \forall t_1, t_2 \in [a,b], \ t_1 \ne t_2. \tag{7.3}$$

Значит, выражение слева в (7.3) имеет точную верхнюю грань

$$K_\alpha(x) = \sup_{t_{1,2}\in[a,b],\ t_1 \ne t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}.$$

Введем норму в $C_\alpha[a,b]$

$$\|x\|_{C_\alpha[a,b]} = \|x\|_{C[a,b]} + K_\alpha(x).$$

Из определения $K_\alpha(x)$ и $\|x\|_{C_\alpha[a,b]}$ вытекает, что для всех $x \in C_\alpha[a,b]$

$K_\alpha(x)$ — наименьшая из констант C, удовлетворяющих (7.1);

$|x(t_1) - x(t_2)| \le K_\alpha(x)|t_1 - t_2|^\alpha \le \|x\|_{C_\alpha[a,b]}|t_1 - t_2|^\alpha \quad \forall t_{1,2} \in [a,b].$

Упражнения. Доказать, что

7.5 $\|\cdot\|_{C_\alpha[a,b]}$ — норма;

7.6 вложения (7.2) непрерывны (подсказка: повторить рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 7.2).

Пространство $C^m_\alpha[a,b]$ состоит из всех функций $x \in C^m[a,b]$, чья m-я производная удовлетворяет условию Гельдера (7.1). Очевидно, что $C^m_\alpha[a,b]$ — линейное нормированное пространство с нормой

$$\|x\|_{C^m_\alpha[a,b]} = \|x\|_{C^m[a,b]} + K_\alpha\left(x^{(m)}\right) \equiv \|x\|_{C^{m-1}[a,b]} + \|x^{(m)}\|_{C_\alpha[a,b]}.$$

Т е о р е м а 7.2. *Если $n+\beta > m+\alpha$, $\alpha, \beta \in [0,1)$, то вложение $C^n_\beta[a,b] \subset C^m_\alpha[a,b]$ непрерывно.*

Упражнение 7.7. Доказать теорему 7.2 (использовать результат упр. 7.6).

Т е о р е м а 7.3. *Пространство $C^n_\alpha[a,b]$, $\alpha \in [0,1]$, $n \geq 0$ банахово.*

Т е о р е м а 7.4. *$C^\infty[a,b]$ плотно в $C^n_\alpha[a,b]$, $\alpha \in [0,1]$, $n \geq 0$.*

Доказательство двух последних теорем можно найти в [1, 12].

З а м е ч а н и я.

1. Пространство Гельдера C^m_α обозначают еще $C^{m,\alpha}$ либо $C^{m+\alpha}$.
2. При $\alpha = 1$ условие Гельдера (7.1) называют *условием Липшица.*

Пространства Лебега L^p

Пространство $L^p(a,b)$ $(1 \leq p < \infty)$ состоит из всех измеримых на (a,b) функций x, для которых интеграл Лебега

$$\int_a^b |x(t)|^p\, dt$$

существует и конечен. Пишут $x(t) = y(t)$ в $L^p(a,b)$, если $x(t) = y(t)$ почти везде на $[a,b]$. То есть, любая функция, как элемент $L^p(a,b)$, определяется с точность до множества меры ноль. Пространство $L^p(a,b)$ линейное.

Упражнение 7.8. Доказать, что пространство $L^p(a,b)$ линейное (подсказка: из неравенства $|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ вытекает утверждение: если $x, y \in L^p(a,b)$, то $x+y \in L^p(a,b)$.)

Введем норму в пространстве $L^p(a,b)$

$$\|x\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Выполнение аксиом 1, 2 очевидно, 3-я аксиома вытекает из свойств модуля и интеграла при $p=1$ и из неравенства Минковского (6.4) при $p>1$.

Очевидно, что $C[a,b] \subset L^p(a,b)$ причем вложение непрерывно. Это вытекает из очевидного неравенства:

$$\|x\|_{L^p(a,b)} \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \left(\int_a^b dt\right)^{1/p} = (b-a)^{1/p} \|x\|_{C[a,b]} \quad \forall x \in C[a,b].$$

Т е о р е м а 7.5. *Вложение $L^p(a,b) \subset L^q(a,b)$ непрерывно при $p > q \geq 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала вложение $L^p[a,b] \subset L^q[a,b]$. Пусть $x \in L^p(a,b)$, $p > q \geq 1$. Используя неравенство Юнга (6.1), в котором $a = |x|^q$, $b = 1$, p заменяем на p/q, q — на $p/(p-q)$, получаем

$$|x|^q \leq \frac{q|x|^p}{p} + \frac{p-q}{p}.$$

Так как $x \in L^p(a,b)$, то функция в правой части полученного неравенства интегрируема по (a,b), значит и неотрицательная функция в левой части неравенства интегрируема по (a,b), то есть $x \in L^q[a,b]$, $L^p[a,b] \subset L^q[a,b]$.

Осталось доказать непрерывность вложения. Для этого надо получить оценку

$$\|x\|_{L^q[a,b]} \leq C\|x\|_{L^p[a,b]} \qquad \forall x \in L^p[a,b], \tag{7.4}$$

где постоянная C не зависит от x. Используя неравенство Гельдера (6.3), в котором x заменяем на $|x|^q$, g — на 1, p — на p/q, q — на $p/(p-q)$, получаем соотношение

$$\int_a^b |x|^q\, dt \leq \left(\int_a^b |x|^p\, dt\right)^{q/p} \left(\int_a^b dt\right)^{1-q/p} \quad \forall x \in L^p(a,b),$$

извлекая из которого корень q-й степени, получаем (7.4) с $C = (b-a)^{1/q-1/p}$. Теорема доказана.

Обозначим через $C_0^\infty(a,b)$ множество всех функций из $C^\infty(a,b)$, каждая из которых равна нулю в некоторой окрестности точек a, b.

Теорема 7.6. *$C_0^\infty(a,b)$ плотно в $L^p(a,b)$, $1 < p < \infty$.*

Теорема 7.7. *Пространство $L^p(a,b)$, $1 < p < \infty$ банахово.*

Доказательство этих теорем можно найти в [1, 11].

Упражнение 7.9. Доказать, что вложения $C[a,b] \subset L^p(a,b) \subset L^q(a,b)$ при $p > q \geq 1$ строгие.

§ 8 Принцип сжимающих отображений

Пусть X — нормированное пространство.

Определение. Отображение, которое каждому элементу $x \in D_\Phi \subset X$ ставит в соответствие элемент $\Phi(x) \in X$ называется *оператором* Φ, определенным на D_Φ со значениями в X (пишут $\Phi : D_\Phi \to Y$).

Определение. Любое решение $x \in X$ уравнения

$$\Phi(x) = x \tag{8.1}$$

называют *неподвижной точкой* оператора Φ.

Определение. Оператор $\Phi : D \subset X \to X$ называется *сжимающим (сжатием)* на D, если существует число $\gamma \in (0,1)$:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \gamma\|x - y\| \quad \forall x, y \in D. \tag{8.2}$$

Постоянная γ — *коэффициент сжатия.*

Пример. Пусть функция $f \in C^1[a,b]$. Из формулы Лагранжа вытекает, что для любых $x_{1,2} \in [a,b]$ существует точка ξ, лежащая между x_1 и x_2 такая, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2|.$$

Поэтому, если $|f'(x)| < 1$ на $[a,b]$, то

$$|f'(\xi)| \leq \gamma = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$$

и функция f является сжатием на $[a,b]$. Если хотя бы в одной точке x_0 выполняется $|f'(x_0)| > 1$, то f не является сжатием.

Теорема 8.1 (принцип сжимающих отображений). *Пусть X — банахово пространство, D — замкнутое множество из X, оператор Φ удовлетворяет условиям:*

(а) $\Phi : D \to D$, то есть отображение Φ определено на D, причем $\Phi(x) \in D$ для любого $x \in D$;

(б) Φ сжатие на D с коэффициентом сжатия $\gamma \in (0,1)$.

Тогда Φ имеет единственную неподвижную точку $x \in D$, причем

$$\|x - x_n\| \leq \gamma^n \|x - x_0\|. \tag{8.3}$$

Последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ определяется формулами: $x_n = \Phi(x_{n-1})$. В качестве x_0 можно взять любой элемент из D.

Доказательство. В силу (а) последовательность $\{x_n\}$ содержится в D. Значит, можно использовать условие сжатия

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1}\| \leq \gamma\|x_n - x_{n-1}\| \quad \forall n \geq 1.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна (лемма 4.1). Так как X банахово, то $x_n \to x$. Так как D замкнуто, то $x \in D$. В силу условия сжатия

$$\|\Phi(x) - \Phi(x_n)\| \leq \gamma\|x - x_n\| \to 0,$$

то есть $\Phi(x_n) \to \Phi(x)$ и поэтому, переходя к пределу в равенстве $x_n = \Phi(x_{n-1})$, получаем (8.1). Существование неподвижной точки доказано.

Докажем единственность. Пусть x' — еще одна неподвижная точка из D. Тогда

$$\|x' - x\| = \|\Phi(x') - \Phi(x)\| \leq \gamma\|x' - x\| < \|x' - x\|.$$

Это возможно только при $x' = x$.

Оценки (8.3) вытекают из неравенства

$$\|x - x_n\| = \|\Phi(x) - \Phi(x_{n-1})\| \leq \gamma\|x - x_{n-1}\| \quad \forall n \geq 1.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 8.1 является конструктивной, так как в ней предложен алгоритм решения уравнения (8.1). В качестве приближенного решения можно взять элементы x_n. В вычислительной математике подобные методы называют методами простой итерации, либо просто итерационными. Отметим, что сжимаемость оператора не является необходимым условием сходимости x_n к точному решению.

§ 9 Приложения принципа сжимающих отображений

Итерационные методы решения алгебраических уравнений

Любое алгебраическое уравнение $f(x) = b$ можно записать в виде

$$x = \varphi(x), \tag{9.1}$$

если соответствующим образом выбрать функцию φ, например, $\varphi(x) = x + b - f(x)$. Следуя методу простых итераций будем искать решение (9.1), как предел последовательности

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad \forall n \geq 0. \tag{9.2}$$

Следствие 9.1. *Пусть*

$$\varphi \in C^1[a,b], \qquad \varphi : [a,b] \to [a,b], \qquad |\varphi'(x)| \leq \gamma < 1 \quad \forall x \in [a,b].$$

Тогда уравнение (9.1) имеет на отрезке $[a,b]$ единственное решение x_*, причем

$$|x_* - x_n| \leq \gamma^n|x_* - x_0|,$$

последовательность x_n определяется формулами (9.2), в качестве x_0 можно взять любое число из $[a,b]$.

Доказательство. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ рассматриваем, как нормированное пространство с нормой $\|x\| = |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Тогда функция φ является оператором, действующим из $[a,b] \subset \mathbb{R}$ в $[a,b]$. Из условия $|\varphi'| \leq \gamma$ вытекает, что оператор φ является сжатием на $[a,b]$ с коэффициентом сжатия γ (см. пример в предыдущем параграфе). Осталось применить принцип сжимающих отображений. Следствие доказано.

Замечание. Утверждения следствия остаются в силе, если заменить множество $[a,b]$ на $(-\infty, b]$ либо $[a, +\infty)$, либо $(-\infty, +\infty)$.

Пример. Рассмотрим уравнение $x = \cos(x/2) + 3$. Положим $\varphi(x) = \cos(x/2) + 3$. Тогда $|\varphi'(x)| = |\sin(x/2)|/2 < 1/2$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Значит, уравнение $x = \cos(x/2)+3$ имеет единственное решение $x_* \in \mathbb{R}$, причем

$$|x_* - x_n| \leq \frac{1}{2^n}|x_* - x_0|,$$

последовательность x_n определяется формулами:

$$x_{n+1} = \cos(x_n/2) + 3 \qquad \forall n \geq 0,$$

в качестве x_0 можно взять любое вещественное число.

Замечание. Условие $|\varphi'(x)| \leq \gamma < 1$ не является необходимым для сходимости последовательности x_n.

П р и м е р. При реализации различных математических действий на ЭВМ возникает следующая задача: вычислить $\sqrt{a}$ используя только элементарные арифметические операции. Для этого надо решить уравнение

$$x^2 = a \qquad (x > 0), \tag{9.3}$$

которое эквивалентно

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Функция $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ не является сжимающей на множестве $x > 0$. Однако можно доказать, что последовательность

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

сходится к $\sqrt{a}$, причем сходимость монотонная (более того, все x_n лежат между $\sqrt{a}$ и x_0) при любом выборе $x_0 > 0$.

З а м е ч а н и е. Уравнение $f(x) = b$ можно разными способами записать в виде (9.1). Сходимость метода простых итераций зависит от выбора функции $\varphi(x)$. Например, запишем уравнение (9.3) в виде $x = a/x$. Последовательность $x_{n+1} = a/x_n$ расходится, если $x_0 \neq \sqrt{a}$.

Упражнения. Пусть уравнение (9.1) имеет единственное решение x_*, последовательность x_n определяется (9.2). Доказать, что

9.1 если $|\varphi'(x_*)| < 1$, то $x_n \to x_*$, если начальное приближение выбрать достаточно близким к x_*;

9.2 если $|\varphi'(x_*)| > 1$, то последовательность x_n либо расходится, либо при некотором N выполняется $x_N = x_*$;

Итерационные методы решения СЛАУ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), записанную в виде

$$x - Bx = b, \tag{9.4}$$

где B — матрица размера $n \times n$, $b, x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|B\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Упражнение 9.3. Доказать, что $\|Bx\|_1 \le \|B\|_1 \|x\|_1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Будем искать решение (9.4), как предел последовательности

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + b \qquad \forall n \ge 0. \tag{9.5}$$

Следствие 9.2. *Пусть $\|B\|_1 < 1$. Тогда уравнение (9.5) имеет единственное решение x^*, причем*

$$\|x^* - x^{(n)}\|_1 \le \|B\|_1^n \cdot \|x^* - x^{(0)}\|_1,$$

последовательность $x^{(n)}$ определяется формулами (9.5), в качестве $x^{(0)}$ можно взять любой вектор из $\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Систему (9.4) можно записать в виде: $x = \Phi(x)$, оператор $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ действует по формуле: $\Phi(x) = Bx + b$. Используя оценку $\|Bx\|_1 \le \|B\|_1 \|x\|_1$ (упр. 9.3), получаем

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_1 = \|B(x-y)\|_1 \le \|B\|_1 \|x - y\|_1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Значит, оператор Φ является сжатием на $\mathbb{R}^n$ с коэффициентом сжатия $\gamma = \|B\|_1$. Осталось применить принцип сжимающих отображений. Следствие доказано.

З а м е ч а н и е.

1. Необходимым и достаточным условием сходимости $x^{(n)} \to x^*$ является: «все собственные числа матрицы B по абсолютной величине меньше единицы» (см. [12]).

2. Существует большое число итерационных методов решения СЛАУ $Ax = b$. Они отличаются выбором матрицы B, с помощью которой

задача $Ax = b$ записывается в виде (9.4). Самый простой способ: $B = E - A$, где E — единичная матрица.

3. Итерационные методы более выгодны по сравнению с методом Гаусса, если размерность системы достаточно высока (больше $10^3 - 10^4$). При $n \le 100 - 250$ обычно более эффективным является метод Гаусса.

Интегральное уравнение Вольтерры

Пусть $k = k(t,s) \in C([0,T] \times [0,T])$. Тогда для любой $x \in C[0,T]$ формула

$$y(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)\,ds \qquad t \in [0,T]$$

определяет непрерывную на $[0,T]$ функцию $y = y(t)$. Рассмотрим следующее уравнение, относительно неизвестной функции $x = x(t)$

$$x(t) + \int_0^t k(t,s)x(s)\,ds = y(t) \qquad t \in [0,T]. \tag{9.6}$$

Оно называется *интегральным уравнением Вольтерры.*

Теорема 9.1. *Пусть $k \in C([0,T] \times [0,T])$, $y \in C[0,T]$. Тогда уравнение (9.6) имеет единственное решение $x \in C[0,T]$, причем $x_n \to x$ в $C[0,T]$, где последовательность x_n определяется формулами*

$$x_{n+1}(t) = -\int_0^t k(t,s)x_n(s)\,ds + y(t) \qquad \forall n \ge 0,$$

в качестве x_0 можно взять любую функцию из $C[0,T]$.

Доказательство. Обозначим

$$\mu = \max_{t,s\in[a,b]} |k(t,s)|, \quad \gamma = (1 - e^{-\mu T}), \quad \|x\|_{e^{-\mu}} = \max_{t\in[0,T]} |e^{-\mu t}x(t)|.$$

Отметим, что $\|\cdot\|_{e^{-\mu}}$ является эквивалентной нормой в $C[0,T]$ (см. § 5). Определим оператор $\Phi : C[0,T] \to C[0,T]$, действующий по формуле $\Phi(x) = z$, где

$$z(t) = -\int_0^t k(t,s)x(s)\,ds + y(t) \quad t \in [0,T], \qquad \forall x \in C[0,T].$$

Тогда уравнение (9.6) эквивалентно $\Phi(x) = x$. Докажем, что Φ — сжатие на $C[0,T]$. Пусть $x_{1,2} \in C[0,T]$, $x = x_1 - x_2$, $z = \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$. Тогда для любого $t \in [0,T]$

$$|z(t)| = \left|\int_0^t k(t,s)x(s)\,ds\right| \le \int_0^t |k(t,s)| \cdot |x(s)e^{-\mu s}| \cdot e^{\mu s}\,ds \le$$
$$\le \mu\|x\|_{e^{-\mu}} \int_0^t e^{\mu s}\,ds = \mu\|x\|_{e^{-\mu}} \frac{e^{\mu t} - 1}{\mu} = \|x\|_{e^{-\mu}} \left(e^{\mu t} - 1\right).$$

Следовательно,

$$\left|z(t)e^{-\mu t}\right| \le \|x\|_{e^{-\mu}} \left(1 - e^{-\mu t}\right) \le \|x\|_{e^{-\mu}} \left(1 - e^{-\mu T}\right) = \gamma\|x\|_{e^{-\mu}},$$
$$\Longrightarrow \quad \|z\|_{e^{-\mu}} = \max_{t\in[0,T]} \left|z(t)e^{-\mu t}\right| \le \gamma\|x\|_{e^{-\mu}},$$
$$\Longrightarrow \quad \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_{e^{-\mu}} \le \gamma\|x_1 - x_2\|_{e^{-\mu}}.$$

Так как $\gamma \in (0,1)$, то оператор Φ является сжатием на $C[0,T]$. Осталось применить принцип сжимающих отображений. Теорема доказана.

Задача Коши для ОДУ

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$x'(t) = f\left(t, x(t)\right) \quad t \in [0,T], \qquad x(0) = 0. \tag{9.7}$$

Теорема 9.2. *Пусть $f(t,x) \in C([0,T] \times \mathbb{R})$, существует постоянная μ такая, что*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le \mu|x_1 - x_2| \qquad \forall t \in [0,T], \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}. \tag{9.8}$$

Тогда задача Коши (9.7) имеет единственное решение $x \in C^1[0,T]$.

Доказательство. Функция $x \in C^1[0,T]$ является решением задачи (9.7), если и только если $x \in C[0,T]$ и выполняется интегральное уравнение:

$$x(t) = \int_0^t f\left(s, x(s)\right)\,ds \qquad t \in [0,T]. \tag{9.9}$$

Действительно, если $x \in C^1[0,T]$ — решение (9.7), то интегрируя уравнение

$$x'(s) = f\left(s,\, x(s)\right)$$

по $s \in [0,t]$ и учитывая условие $x(0)=0$, получаем (9.9). Обратно, если $x \in C[0,T]$ — решение (9.9), то дифференцируя (9.9) по t, получаем $x' = f(t,x)$. Выполнение условия $x(0)=0$ очевидно. Таким образом, надо доказать существование единственного решения уравнения (9.9).

Определим оператор $\Phi : C[0,T] \to C[0,T]$ по формуле $\Phi(x) = z$, где

$$z(t) = \int_0^t f\Big(s,\, x(s)\Big)\, ds \qquad t \in [0,T].$$

Тогда уравнение (9.9) можно можно записать в виде $x = \Phi(x)$. Введем в $C[0,T]$ эквивалентную норму

$$\|x\|_{e^{-\mu}} = \max_{t\in[0,T]} |e^{-\mu t} x(t)| \qquad \forall x \in C[0,T].$$

Докажем, что Φ — сжатие на $C[0,T]$. Пусть $x_{1,2} \in C[0,T]$, $x = x_1 - x_2$, $z = \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$. Тогда используя условие (9.8), получаем для любого $t \in [0,T]$

$$|z(t)| = \left|\int_0^t (\, f(s,x_1) - f(s,x_2)\,)\, ds\right| \le \int_0^t \mu |x_1(s) - x_2(s)|\, ds =$$
$$= \mu \int_0^t |x(s) e^{-\mu s}| e^{\mu s}\, ds \le \mu \|x\|_{e^{-\mu}} \int_0^t e^{\mu s}\, ds = \mu \|x\|_{e^{-\mu}} \frac{e^{\mu t} - 1}{\mu}.$$

Положим $\gamma = \left(1 - e^{-\mu T}\right)$. Тогда

$$\left|z(t) e^{-\mu t}\right| \le \|x\|_{e^{-\mu}} \left(1 - e^{-\mu t}\right) \le \|x\|_{e^{-\mu}} \left(1 - e^{-\mu T}\right) = \gamma \|x\|_{e^{-\mu}},$$
$$\Longrightarrow \quad \|z\|_{e^{-\mu}} = \max_{t\in[0,T]} \left|z(t) e^{-\mu t}\right| \le \gamma \|x\|_{e^{-\mu}},$$
$$\Longrightarrow \quad \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_{e^{-\mu}} \le \gamma \|x_1 - x_2\|_{e^{-\mu}}.$$

Так как $\gamma \in (0,1)$, то Φ является сжатием на $C[0,T]$. Осталось применить принцип сжимающих отображений. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Можно доказать существование решения (но не единственность!) более сложным способом, в случае, когда f непрерывна на $[0,T] \times \mathbb{R}$, т.е. без условия (9.8) (см., напр., [10]). Если условие (9.8) не выполнено, то задача Коши может иметь более одного решения. Например, решениями задачи $x'(t) = \sqrt{x(t)}$ $(t \ge 0)$, $x(0) = 0$ являются $x \equiv 0$ и $x(t) = t^2/4$.

Упражнение 9.4. Доказать, что условие (9.8) выполняется, если производная $f'_x(t,x)$ существует и ограничена на $[0,T] \times \mathbb{R}$.

§ 10 Ряды и базис в нормированных пространствах

Пусть X — нормированнное пространство, $\{x_k\}_1^\infty \subset X$. Формально, рядом называется бесконечная сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Обозначим через $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ *частичные суммы* ряда.

О п р е д е л е н и е. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится* , если сходится последовательность его частичных сумм, т.е. $s_n \to s$ при $n \to \infty$, s — *сумма* ряда.

В дальнейшем, для краткости, ряд $\sum_{k=1}^\infty x_k$ будем обозначать $\sum x_k$.

Т е о р е м а 10.1 (критерий Коши). *Для сходимости ряда $\sum x_k$ необходимо, а в случае банахова пространства и достаточно, чтобы*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \qquad \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| \le \epsilon \quad \forall n \ge N,\ p > 0. \tag{10.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть ряд $\sum x_k$ сходится. Тогда последовательность частичных сумм s_n является фундаментальной и, значит,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0: \qquad \|s_{n+p} - s_n\| \le \epsilon \quad \forall n \ge N,\ p > 0. \qquad (10.2)$$

Так как

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k, \qquad (10.3)$$

то из (10.2) вытекает (10.1).

Достаточность. Пусть выполняется (10.1). Тогда из (10.3) вытекает (10.2), т.е. последовательность частичных сумм s_n является фундаментальной. Если X банахово, то s_n сходится. Теорема доказана.

Если ряд $\sum x_k$ сходится, то из теоремы 10.1 вытекает, что $x_k \to 0$.

Определение. Ряд $\sum x_k$ сходится *абсолютно,* если сходится числовой ряд $\sum \|x_k\|$.

Точно также как и для числовых рядов, из абсолютной сходимости вытекает «обычная» сходимость.

Теорема 10.2. *В банаховом пространстве любой абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. По критерию Коши (для числовых рядов)

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N > 0: \ \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \le \epsilon \ \ \forall n \ge N,\ p > 0.$$

Так как

$$\| \sum x_k \| \le \sum \|x_k\|,$$

то выполняется условие (10.1) и из теоремы 10.1 вытекает сходимость ряда $\sum x_k$. Теорема доказана.

Замечание. Справедливо и обратное утверждение: *если в нормированном пространстве X любой абсолютно сходящийся ряд сходится, то пространство X банахово* (см. [12]).

Определение. Последовательность $\{e_k\}$ из X называется *базисом* в нормированном пространстве X, если

(а) для любого $x \in X$ существуют числа $c_k \in \mathbb{R}$ такие, что

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k; \qquad (10.4)$$

(б) равенство $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = 0$ возможно только при $c_k = 0$ $(k = \overline{1, \infty})$.

Равенство (10.4) называют разложением x по базису e_k, числа c_k — коэффициенты разложения по базису $\{e_k\}$.

Упражнение 10.1. Доказать, что коэффициенты разложения по базису определяются единственным образом.

§ 11 Скалярное произведение

Определение. Линейное пространство X называется *пространством со скалярным произведением,* если для любой пары элементов $x, y \in X$ определено вещественное число (x, y) так, что выполняются следующие аксиомы

1) $(x, y) = (y, x) \qquad \forall x, y \in X;$
2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, y) + \beta(y, z) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x, y, z \in X;$
3) $(x, x) > 0 \qquad \forall x \ne 0.$

Число (x, y) называют *скалярным произведением* элементов x и y. Отметим, что из аксиом 1, 2 вытекает

$$(z, \alpha x + \beta y) = \alpha(z, x) + \beta(z, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x, y, z \in X.$$

Также очевидно, что $(x, 0) = (0, x) = 0$ для всех $x \in X$.

По аналогии с модулем вектора, который можно определить через скалярное произведение, введем норму

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \qquad (11.1)$$

Она называется *евклидовой* нормой. Пространство в котором норма определяется формулой (11.1) называется *евклидовым.*

Аксиома 1 нормы (11.1) вытекает из аксиомы 3 скалярного произведения, аксиома 2 — из аксиомы 2. Чтобы доказать выполнение аксиомы 3 нормы нам потребуется следующая оценка.

Неравенство Коши-Буняковского: если $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, то

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x,y \in X. \tag{11.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функцию $f(t) = \|x+ty\|^2$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Согласно аксиомам скалярного произведения

$$0 \le f(t) = t^2\|y\|^2 + 2t(x,y) + \|x\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Функция f является квадратным многочленом, поэтому она неотрицательная только при условии

$$D = 4(x,y)^2 - 4\|x\| \cdot \|y\| \le 0 \quad (D \text{ — дискриминант } f),$$

из которого вытекает (11.2).

Докажем неравенство треугольника. Используя (11.2), получаем

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x+y)+(y,x+y) \le \|x\|\cdot\|x+y\|+\|y\|\cdot\|x+y\|.$$

Сокращая на $\|x+y\|$, получаем требуемую оценку.

Отметим следующую полезную формулу для евклидовой нормы

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

Подчеркнем скалярное произведение непрерывно, то есть

$$(x_n,y_n) \to (x,y) \quad \text{при } x_n \to x, \;\; y_n \to y.$$

Упражнения. Доказать, что

11.1 если $(x,z) = (y,z)$ для всех $z \in X$, то $x = y$;

11.2 скалярное произведение непрерывно;

11.3 равенство в (11.2) возможно, только если x, y линейно зависимы (подсказка: подобрать $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\|x+cy\|^2 = 0$);

11.4 квадрат евклидовой нормы строго выпуклый, то есть

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|^2 < \alpha\|x\|^2+(1-\alpha)\|y\|^2 \quad \forall \alpha \in (0,1),\; x \ne y. \tag{11.3}$$

(подсказка: сначала доказать нестрогое неравенство используя неравенство треугольника и неравенство Коши $ab \le a^2/2+b^2/2$).

О п р е д е л е н и е. Полное евклидовое пространство называется *гильбертовым пространством.*

Таким образом, гильбертово пространство — это банахово пространство с нормой $\sqrt{(x,x)}$.

П р и м е р ы.

1. В $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение определяется формулой

$$(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n,$$

то есть является «обычным» скалярным произведением x и y. Пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_2$ является евкидовым.

2. Любое конечномерное пространство X — с базисом $\{e_i\}_1^n$ является евклидовым со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{i=1}^n c_i d_i \qquad \forall x = \sum_{i=1}^n c_i e_i, \;\; y = \sum_{i=1}^n d_i e_i$$

(c_i и d_i — коэффициенты разложения x и y по базису $\{e_i\}$).

3. Пространство $L^2(a,b)$ евклидово со скалярным произведением

$$(x,y)_{L^2(a,b)} = \int_a^b x(t)y(t)\,dx \qquad \forall x,y \in L^2(a,b).$$

Все эти пространства полные и, значит, являются гильбертовыми.

Отметим, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ (либо $\mathbb{R}^3$) угол φ между векторами x и y определяется соотношением

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}.$$

Вектора x и y ортогональны, если и только если, $(x,y)=0$.

По аналогии, можно ввести понятия угла и ортогональности для произвольного евклидова пространства.

Определение. Элементы x, y евклидова пространства X *ортогональны* (обозначается $x \perp y$), если $(x,y)=0$. *Углом* между элементами x и y называется угол φ такой, что

$$\varphi\in[0,\pi],\ \ \cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}.$$

Очевидно, что для ненулевых элементов $x \perp y \Longleftrightarrow \varphi = \pi/2$.

§ 12 Расстояние от точки до множества

Определение. *Расстоянием* от точки $x\in X$ до множества M нормированного пространства X называется число

$$\operatorname{dist}(x,M) = \inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

Лемма 12.1. *Если M замкнутое множество X, то*

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x,M) &= 0 \text{ при } x\in M,\\ \operatorname{dist}(x,M) &> 0 \text{ при } x\notin M.\end{aligned}$$

Доказательство. По определению inf, существует последовательность $y_n\in M$ такая, что $\|x-y_n\|\to\operatorname{dist}(x,M)$. Если $\operatorname{dist}(x,M)=0$, то $y_n\to x$, причем $x\in M$, так как M замкнуто. Лемма доказана.

Замечание. Если множество M не замкнуто, то утверждение леммы 12.1 не верно. Действительно, если M не замкнуто, то существует точка x такая, что $x\in\partial M$, $x\notin M$ и тогда $\operatorname{dist}(x,M)=0$.

Определение. *Отрезком* $[x,y]$ линейного пространства X называется множество

$$[x,y] = \left\{\alpha x + (1-\alpha)y: \quad \alpha\in[0,1]\right\}.$$

Если $X=\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$), то $[x,y]$ — «обычный» отрезок, соединяющий точки $x,y\in\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) (проверить!).

Определение. Множество называется *выпуклым,* если оно содержит любой отрезок, соединяющий две точки этого множества.

Эквивалентное определение. Множество M выпуклое, если

$$\alpha x + (1-\alpha)y\in M \qquad \forall x,y\in M,\quad \alpha\in[0,1].$$

Упражнение 12.1. Доказать, что в нормированном пространстве любой шар — выпуклое множество, а кольцо нет (кольцом называется множество вида: $\{x\in X: r\le\|x-x_0\|\le R\}$, $0<r<R$, $x_0\in X$)

Определение. Элемент $P_M(x)\in M$ называется *проекцией* элемента $x\in X$ на множество M, если

$$\|P_M(x)-x\| = \operatorname{dist}(x,M).$$

То есть проекция — это самый близкий к x элемент множества M. Проекцию еще называют наилучшим приближением элемента x элементами множества M.

Возникает вопрос: когда проекция существует и единственна? Очевидно, что для существования необходима замкнутость множества M. Например, в пространстве $\mathbb{R}$ не существует проекции числа 2 на интервал $(0,1)$. Для единственности необходима выпуклость множества.

Например, проекцией точки x_0 на кольцо $\{x \in X : r \le \|x - x_0\| \le R\}$ является любой y такой, что $\|y - x_0\| = r$.

Теорема 12.1. *Пусть M — замкнутое выпуклое множество гильбертова пространства X. Тогда для любого $x \in X$ существует единственная проекция $P_M(x)$ на множество M*

Доказательство. Докажем существование. Если $x \in M$, то $P_M(x) = x$. Пусть $x \notin M$. Положим $d = \operatorname{dist}(x, M)$. Так как M замкнуто, то $d > 0$ (лемма 12.1),

$$d \le \|x - y\| \;\; \forall y \in M.$$

По определению d и inf для любого $\epsilon > 0$ существует

$$y_\epsilon \in M, \quad \inf_{y\in M} \|x - y\| \le \|x - y_\epsilon\| \le \inf_{y\in M} \|x - y\| + \epsilon.$$

Полагая $\epsilon = 1/n$ и обозначая $y_\epsilon = y_n$, получаем последовательность

$$y_n \in M, \;\; d \le \|x - y_n\| \le d + \frac{1}{n}. \qquad (12.1)$$

Докажем, что последовательность $\{y_n\}$ фундаментальная, то есть $\|y_n - y_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Так как множество M выпуклое, то $y_n/2 + y_m/2 \in M$. Значит, $d \le \|x - (y_n + y_m)/2\|$, следовательно,

$$4d^2 \le \|2x - y_n - y_m\|^2. \qquad (12.2)$$

Запишем равенство параллелограмма (**??**) в виде

$$\|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) - \|u + v\|^2.$$

Положим $u = x - y_m$, $v = x - y_n$. Из оценок (12.1), (12.2) вытекает

$$\|y_n - y_m\| = 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|2x - y_m - y_n\| \le$$
$$\le 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty.$$

Значит, последовательность $\{y_n\}$ фундаментальная. Так как X гильбертово пространство, то оно полное, значит $y_n \to y$. Так как M замкнуто, то $y \in M$. Переходя в (12.1) к пределу при $n \to \infty$, получаем $d = \|x - y\|$. Значит, $y = P_M(x)$. Существование проекции доказано.

Докажем единственность. Пусть существует две проекции: $y_{1,2} = P_M(x)$, $y_1 \ne y_2$. Тогда $\|x - y_1\| = d$, $\|x - y_2\| = d$. Так как множество M выпуклое, то $(y_1/2 + y_2/2) \in M$, следовательно, $d \le \|x - (y_1 + y_2)/2\|$. Используя строгую выпуклость евклидовой нормы (упр. 11.4), получаем

$$d^2 \le \left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{x - y_1}{2} + \frac{x - y_2}{2}\right\|^2 < \frac{1}{2}\|x - y_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y_2\|^2 = d^2.$$

Следовательно, $d^2 < d^2$. Противоречие. Теорема доказана.

§ 13 Ортогональные дополнения

Определение. Элемент x евклидова пространства X называется *ортогональным* множеству $L \subset X$ (обозначают $x \perp L$), если он ортогонален любому элементу из L, то есть

$$(x, y) = 0 \qquad \forall y \in L.$$

Определение. Множество всех ортогональных к $L \subset X$ элементов называют *ортогональным дополнением* $L^\perp$ к множеству L

$$L^\perp = \Big\{x \in X : \quad x \perp L\Big\} \equiv \Big\{x \in X : \quad (x, y) = 0 \;\; \forall y \in L\Big\}.$$

Из определения вытекает, что

$$(x, y) = 0 \;\; \forall x \in L, \; y \in L^\perp.$$

Примеры.

1. Если L — прямая в $\mathbb{R}^2$, проходящая через точку $x = 0$, то $L^\perp$ — прямая, проходящая через точку $x = 0$, которая ортогональна L. Действительно пусть уравнение L имеет вид $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, причем $a_1 \neq 0$. Тогда
$$L = \left\{(x_1, x_2) : \quad x_1 = -kx_2, \quad x_2 \in \mathbb{R}\right\}, \qquad k = -a_2/a_1.$$
Если $y = (y_1, y_2) \in L^\perp$, то
$$(x, y) = y_1x_1 + y_2x_2 = 0 \quad \forall x = (x_1, x_2) \in L$$
$$\iff \quad x_2(-ky_1 + y_2) = 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$
Получили $y_2 = ky_1$ — это уравнение прямой ортогональной L и проходящей через т. $x = 0$.
2. Ортогональным дополнение в $L^2(a, b)$ к множеству функций
$$L = \left\{x \in L^2(a, b) : \int_a^b x(t)\, dt = 0\right\}$$
является множество функций $y = const$ почти везде на (a, b). Действительно, пусть $y \in L^\perp$. Положим
$$\tilde{y} = y - C, \quad C = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(t)\, dt.$$
Тогда $\int_a^b \tilde{y}(t)\, dt = 0$ и поэтому $\tilde{y} \in L$. Далее для любого $x \in L$
$$0 = (x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, (y(t) - C)\, dt = \int_a^b x(t)\, \tilde{y}(t)\, dt.$$
Выбирая $x = \tilde{y}$, получаем $\int_a^b \tilde{y}^2(t)\, dt = 0$, значит, $\tilde{y} = 0$, $x = C$ п.в. на (a, b).

Упражнения. Доказать, что

13.1 $L \cap L^\perp = \{0\}$;

13.2 $L^\perp$ — линейное подпространство;

13.3 $L^\perp = (\overline{L})^\perp$.

Если $y \in \mathbb{R}^3$ — проекция точки $x \in \mathbb{R}^3$ на некоторую плоскость L, то вектор $x - y$ ортогонален этой плоскости. Этот результат справедлив и для произвольного евклидова пространства, если плоскость заменить на линейное подпространство.

Теорема 13.1. *Если L — линейное подпространство гильбертова пространства X, то*
$$x - P_L(x) \perp L \quad \forall x \in X.$$
$P_L(x)$ — проекция x на L.

Доказательство. Прежде всего отметим, что по теореме 12.1 проекция $P_L(x)$ существует и единственна (линейное подпространство является выпуклым и замкнутым множеством). Нужно доказать, что
$$(x - P_L(x), y) = 0 \quad \forall y \in L.$$
Так как L — линейное подпространство, $P_L(x) \in L$, то
$$P_L(x) + \lambda z \in L \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ z \in L.$$
По определению проекции $\|x - P_L(x)\| \leq \|x - y\|$ $\forall y \in L$. Полагая $y = P_L(x) + \lambda z$, получаем для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in X$
$$\|x - P_L(x)\|^2 \leq \big\|x - \big(P_L(x) + \lambda z\big)\big\|^2 = \big\|\big(\,x - P_L(x)\,\big) - \lambda z\big\|^2 =$$
$$= \|x - P_L(x)\|^2 + \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda(x - P_L(x), z)$$
$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \lambda^2\|z\|^2 - 2\lambda(x - P_L(x), z) \quad \Longrightarrow \quad \lambda(x - P_L(x), z) \leq 0.$$
Выбирая $\lambda = \pm 1$, получаем $(x - P_L(x), z) = 0$. Теорема доказана.

§ 14 Разложение гильбертова пространства на ортогональные подпространства

Пусть $M_{1,2}$ — множества линейного пространства X.

Определение. Если каждый элемент $x \in X$ можно представить в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_{1,2} \in M_{1,2}$, то говорят, что X является *суммой* M_1 и M_2 (пишут $X = M_1 + M_2$). Если, дополнительно, элементы $x_{1,2}$ определяются единственным образом, то говорят, что X является *прямой суммой* M_1 и M_2 (пишут $X = M_1 \oplus M_2$).

Теорема 14.1. *Если L — линейное подпространство гильбертова пространства X, то*

$$X = L \oplus L^\perp.$$

Доказательство. Надо доказать, что любой элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде: $x = y+z$, где $y \in L$, $z \in L^\perp$.

Возьмем любой $x \in X$ и положим $y = P_L(x)$, $z = x - P_L(x)$. Тогда $x = y + z$, $y \in L$. В силу теоремы 13.1, $z \perp L$, то есть $z \in L^\perp$. Существование элементов y и z доказано. Докажем единственность. Пусть

$$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2, \qquad y_{1,2} \in L, \quad z_{1,2} \in L^\perp.$$

Тогда $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$. Скалярно умножая последнее уравнение на $(y_1 - y_2)$ и учитывая, что $(y_1 - y_2) \in L$, $(z_2 - z_1) \in L^\perp$, получаем $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, то есть $y_1 = y_2$. Тогда и $z_1 = z_2$. Теорема доказана.

Следствие 14.1. *Линейное многообразие плотно в гильбертовом пространстве X, если и только если $L^\perp = \{0\}$* .

Доказательство. Пусть L плотно в X. Возьмем любой $y \in L^\perp$. Тогда существует $\{y_n\} \subset L$, $y_n \to y$. Так как $y_n \in L$, $y \in L^\perp$, то $(y_n, y) = 0$, переходя к пределу, получаем $(y, y) = 0$. Значит, $y = 0$, $L^\perp = \{0\}$.

Пусть $L^\perp = \{0\}$. Так как L — линейное многообразие, то $\overline{L}$ — линейное подпространство (упр. 3.5). Тогда $X = \overline{L} \oplus (\overline{L})^\perp$. Так как $L^\perp = (\overline{L})^\perp$ (упр. 13.3), то $(\overline{L})^\perp = \{0\}$ и поэтому $X = \overline{L}$, т.е. L плотно в X. Следствие доказано.

§ 15 Декартово произведение пространств

Определение. *Декартовым произведением* пространств X и Y называется множество упорядоченных пар

$$X \times Y = \Big\{(x, y) : \quad x \in X,\ y \in Y\Big\}.$$

Очевидно, что если X и Y линейные пространства, то $X \times Y$ также линейное, со следующими операциями сложения элементов и умножения на скаляр

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1,\ \alpha y_1)$$

для всех $x_{1,2} \in X$, $y_{1,2} \in Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Если X и Y нормированные, то на $X \times Y$ можно ввести норму, например, так

$$\|z\|_{X\times Y} = \|x\| + \|y\| \quad \forall z = (x, y) \in X \times Y. \tag{15.1}$$

Если пространства X и Y евклидовы, то $X \times Y$ также будет евклидовым со скалярным произведением

$$(z_1, z_2)_{X\times Y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \quad \forall z_1 = (x_1, y_1),\ \ z_2 = (x_2, y_2). \tag{15.2}$$

Упражнения. Доказать, что

15.1 если пространства X, Y нормированные, то

$$\|z\|_p = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \quad (1 < p < \infty),$$
$$\|z\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\} \qquad \forall z = (x, y)$$

будут нормами в $X \times Y$ эквивалентными (15.1);

15.2 если пространства X, Y банаховы, то $X \times Y$ также будет банаховым с нормой (15.1);

15.3 (15.2) — скалярное произведение.

Аналогично определяется декартовое произведение

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Если все пространства $X_1, \ldots, X_n$ равны X, то их декартовое произведение обозначают X^n. Например, пространство вектор-функций $x = (x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $x_k \in C[a,b]$ можно рассматривать, как $(C[a,b])^n$.

§ 16 Ортогональные системы. Ортогонализация Грамма-Шмидта

Пусть X — евклидово пространство.

Определение. Система $\{e_i\}_1^\infty \subset X$ называется *ортогональной,*

$$\text{если} \quad (e_i, e_j) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Отметим, что если к ортогональной системе присоединить нулевой элемент, то полученная система останется ортогональной. В дальнейшем всюду рассматриваем ортогональные системы, не содержащие нулевой элемент, и специально это условие оговаривать не будем.

Упражнение 16.1. Доказать, что если $x = \sum_{i=1}^\infty x_i$, то $(x,y) = \sum_{i=1}^\infty (x_i, y)$ $\forall y \in X$.

Ортогональные системы обладают следующими свойствами.

Теорема 16.1. *Если $\{e_i\}$ — ортогональная система, то*

(а) из условия $\sum\limits_{i=1}^\infty c_i e_i = 0$ вытекает $c_i = 0$;

(б) если $x = \sum\limits_{i=1}^\infty c_i e_i$, то

$$c_i = \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2}. \tag{16.1}$$

Доказательство. Достаточно доказать (б), так как (а) является его очевидным следствием. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^\infty c_i e_i$. Тогда в силу условия ортогональности справедливо равенство

$$(x, e_i) = \left(\sum_{j=1}^\infty c_j e_j \,,\, e_i \right) = \sum_{j=1}^\infty c_j\,(e_j, e_i) = c_i (e_i, e_i),$$

из которого вытекает (16.1). Теорема доказана.

Особый интерес представляют ортогональные базисы, так как коэффициенты разложения по ним несложно вычислить по формулам (16.1). Из любой системы можно получить ортогональную, используя следующий процесс.

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Пусть имеется система $\{x_i\}_1^\infty$, которую, для упрощения, считаем линейно независимой. Полагаем $e_1 = x_1$. Элемент e_2 ищем в виде

$$e_2 = x_2 - \lambda_{21} e_1,$$

где коэффициент λ_{21} выбираем из условия ортогональности

$$0 = (e_2, e_1) = (x_2, e_1) - \lambda_{21} \|e_1\|^2,$$

то есть

$$\lambda_{21} = \frac{(x_2, e_1)}{\|e_1\|^2}.$$

Пусть найдены $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Ищем e_n в виде:

$$e_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni} e_i. \tag{16.2}$$

Коэффициенты λ_{ni} находим из условий ортогональности:

$$0 = (e_n, e_j) = (x_n, e_j) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni} (e_i, e_j) = (x_n, e_j) - \lambda_{nj} (e_j, e_j) \quad 1 \le j \le n-1.$$

Следовательно,
$$\lambda_{nj} = \frac{(x_n, e_j)}{\|e_j\|^2} \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{16.3}$$

Таким образом, система определяемая формулами (16.2), (16.3) является ортогональной.

Упражнение 16.2. Пусть $x_n(t) = t^n$. Ортогонализировать систему $\{x_n\}$ в $L^2(-1,1)$ (ограничиться первыми 4 элементами).

Отметим, что из (16.2) вытекает

$$x_n = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni} e_i, \tag{16.4}$$

то есть x_n является конечной линейной комбинацией элементов e_i. Следовательно, если $\{x_i\}$ было базисом в X, то $\{e_i\}$ будет ортогональным базисом.

Определение. Система $\{e_i\}$ называется *ортонормированной,* если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \qquad \text{— символ Кронекера}$$

Очевидно, что из любой ортогональной системы можно сделать ортонормированную, если элементы e_i заменить на $e_i/\|e_i\|$.

Следствие 16.1. *В любом бесконечномерном евклидовом пространстве существует бесконечная ортонормированная система.*

Для доказательства достаточно взять любую бесконечную линейно независимую систему, ортогонализировать ее с помощью процесса Грамма-Шмидта и заменить e_i на $e_i/\|e_i\|$.

§ 17 Ряды Фурье

Пусть $\{e_i\}_1^\infty$ — ортогональная в евклидовом пространстве X система.

Определение. Числа $c_i = \dfrac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2}$ называют *коэффициентами Фурье,* ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ — *рядом Фурье* элемента x по системе $\{e_i\}$.

Отметим, что если $\{e_i\}$ — базис в X, то разложение x по базису $\{e_i\}$ совпадает с рядом Фурье, коэффициенты разложения по базису равны коэффициентам Фурье. Это вытекает из теоремы 16.1 (б).

Определение. *Линейной оболочкой* множества $M \subset X$ называется множество

$$\operatorname{Span} M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \ x_i \in M \ \ i = \overline{1, n}, \ \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

То есть $\operatorname{Span} M$ — это множество всех возможных конечных линейных комбинаций элементов из M. Очевидно, что $\operatorname{Span} M$ — линейное многообразие в X. Линейная оболочка конечного числа элементов является линейным подпространством (т.к. конечномерное линейное многообразие является линейным подпространством).

Множество $L_n = \operatorname{Span}\{e_i\}_1^n$ является n-мерным подпространством X. Рассмотрим задачу: наилучшим образом приблизить x элементами конечномерного пространства L_n (то есть найти проекцию x на L_n). Эта задача эквивалентна следующей

$$\text{Найти числа } \alpha_i : \quad \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \to \min .$$

Оказывается, что решением являются коэффициенты Фурье. Подобные задачи часто возникают в вычислительной математике.

Теорема 17.1 (свойство минимальности коэффициентов Фу-

рье). *Пусть* $x \in X$, $L_n = \mathrm{Span}\,\{e_i\}_1^n$, $d_n = \mathrm{dist}\,(x, L_n)$. *Тогда*

$$d_n = \|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\|, \tag{17.1}$$

$$d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|e_i\|^2 \tag{17.2}$$

где $c_i = (x, e_i)/\|e_i\|^2$ *— коэффициенты Фурье элемента* x.

Доказательство. Докажем (17.1). Равенство (17.1) означает

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| = \inf_{y \in L_n} \|x - y\| = \inf_{\alpha_i \in \mathbb{R}} \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|.$$

Найдем α_i доставляющие минимум неотрицательной функции

$$\varphi(\alpha) = \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|.$$

Используя ортогональность системы $\{e_i\}$, получаем

$$\varphi^2(\alpha) = \left(x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\,,\, x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x, e_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|e_i\|^2.$$

Очевидно, что минимум φ^2, а значит и φ, достигается на числах α_i, каждое из которых минимизирует функцию

$$\varphi_i(\alpha_i) = -2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x, e_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|e_i\|^2.$$

Минимум квадратичной функции φ_i достигается в точке

$$\alpha_i = (x, e_i)/\|e_i\|^2,$$

то есть $\alpha_i = c_i$. Формула (17.1) доказана. Для доказательства (17.2) достаточно возвести (17.1) в квадрат и раскрыть выражение в правой части, используя ортогональность $\{e_i\}$ и равенство $(x, e_i) = c_i \|e_i\|^2$. Теорема доказана.

Упражнение 17.1. Найти наилучшее в $L^2(-1, 1)$ приближение функций t^{10}, e^t многочленами степени 2 (использовать упр. 16.2).

Следствие 17.1. *Пусть* $\{e_i\}_1^\infty$ *— ортогональная в* X *система,* $x \in X$, c_i *— коэффициенты Фурье элемента* x. *Тогда*

(а) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \|e_i\|^2$ *сходится, причем выполняется неравенство Бесселя*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \|e_i\|^2 \le \|x\|^2; \tag{17.3}$$

(б) если дополнительно $\|e_i\|^2 \ge \gamma > 0$, *то* $c_n \to 0$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ *сходится;*

(в) если $m > n$, *то* $\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| \ge \|x - \sum_{i=1}^{m} c_i e_i\|$, *то есть последовательность чисел* $d_n = \|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\|$ *не возрастает.*

Доказательство. Из неравенства (17.2) вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \|e_i\|^2 \le \|x\|^2 \quad \forall n \ge 1,$$

из которой следует утверждение (а).

(б) вытекает из неравенства Бесселя (17.3).

Осталось доказать (в). Из (17.2) следует при $m > n$

$$d_m^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} c_i^2 \|e_i\| \le \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|e_i\| = d_n^2.$$

(неравенство выполняется, так как в правой части меньше отрицательных слагаемых). Осталось воспользоваться формулой (17.1) для d_m и d_n. Следствие доказано.

§ 18 Полнота ортогональных систем

Определение. Ортогональная в X система $\{e_i\}$ называется *полной,* если для всех $x \in X$ выполняется *равенство Парсеваля-Стеклова*

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)^2 = \|x\|^2. \tag{18.1}$$

Теорема 18.1. *Ортогональная система $\{e_i\}$ пространства X полна, если и только если она является базисом в X, то есть*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i, \quad c_i = \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2} \quad \forall x \in X.$$

Доказательство. Из (17.1) и (17.2) вытекает

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)^2.$$

(использовали формулу $c_i = (x, e_i)/\|e_i\|^2$). Из этого равенства очевидным образом следует утверждение теоремы.

Теорема 18.2. *Ортогональная система $\{e_i\}$ пространства X полна, если и только если линейная оболочка* $\mathrm{Span}\,\{e_i\}_1^{\infty}$ *плотна в X.*

Доказательство. Напомним, что

$$\mathrm{Span}\,\{e_i\}_1^{\infty} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \ n < \infty\right\}.$$

Пусть система $\{e_i\}_1^{\infty}$ полная. Тогда по теореме 18.1 она является базисом в X. Нужно доказать, что множество $L = \mathrm{Span}\,\{e_i\}_1^{\infty}$ плотно в X. Пусть $x \in X \setminus L$. Определим последовательность

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i.$$

Тогда $x_n \in L$, $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Значит, L плотно в X.

Пусть $L = \mathrm{Span}\,\{e_i\}_1^{\infty}$ плотно в X. Нужно доказать, что система $\{e_i\}$ полная. Пусть $x \in X$. Так как L плотно в X, то для $\forall \epsilon > 0$ существует $x_\epsilon \in L$ такой, что

$$\|x - x_\epsilon\| \le \epsilon.$$

Так как $x_\epsilon \in L$, то $x_\epsilon = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$. По свойству минимальности коэффициентов Фурье

$$\|x - \sum_{i=1}^{N} c_i e_i\| \le \|x - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i\| = \|x - x_\epsilon\| \le \epsilon.$$

По следствию 17.1 (в)

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| \le \|x - \sum_{i=1}^{N} c_i e_i\| \quad \forall n \ge N.$$

Таким образом, для $\forall \epsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| \le \epsilon \quad \forall n \ge N.$$

Значит, $\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$. Система $\{e_i\}$ является базисом в X и значит она полна. Теорема доказана.

Теорема 18.3. *Для полноты ортогональной системы $\{e_i\}$ в пространстве X необходимо, а в случае гильбертова X и достаточно, чтобы равенства*

$$(x, e_i) = 0 \quad \forall i \ge 1$$

выполнялись только при $x = 0$

Замечание. Теорему можно сформулировать еще так: *«Для полноты ортогональной системы $\{e_i\}$ в пространстве X необходимо, а в случае гильбертова X и достаточно, чтобы к ней нельзя было* *присоединить ненулевой элемент так, чтобы получившаяся система осталась ортогональной».*

Доказательство. Пусть система $\{e_i\}$ полная. Следовательно она базис. Если элемент x ортогонален всем e_i, то его коэффициенты Фурье равны нулю. Значит и $x = 0$.

Пусть пространство X гильбертово, условия $(x, e_i) = 0$ выполняются только при $x = 0$. Тогда $(\mathrm{Span}\,\{e_i\}_1^\infty)^\perp = \{0\}$. Следовательно, линейное многообразие $\mathrm{Span}\,\{e_i\}_1^\infty$ плотно в X (следствие 14.1). Система $\{e_i\}$ полная по теореме 18.2. Теорема доказана.

Глава II
Линейные операторы

§ 1 Основные понятия

На протяжении всей главы считаем, что X, Y — нормированные пространства. Пусть $D_A \subset X$.

Отображение, которое каждому элементу $x \in D_A$ ставит в соответствие элемент $y = A(x) \in Y$, называется *оператором* A, определенным на D_A со значениями в Y (пишут $A : D_A \to Y$).

D_A	—	*область определения* A,
$\mathrm{Im}\,(A) = \{A(x) : x \in D_A\}$	—	*образ* оператора A,
$\mathrm{Ker}\,(A) = \{x \in D_A : A(x) = 0\}$	—	*ядро* оператора A.

Равенство $A = B$ означает, что $D_A = D_B$, $A(x) = B(x)$ $\forall x \in D_A$. Для любого множества $M \subset D_A$ обозначаем

$$A(M) = \{A(x) : \quad x \in D_A\}.$$

Оператор $A : D_A \to Y$ называется

— *нулевым,* если $D_A = X$, $Ax = 0$ для всех $x \in X$ (пишут $A = 0$);

— *единичным,* если $D_A = X$, $Ax = x$ для всех $x \in X$, единичный оператор принято обозначать буквой E;

— *непрерывным в точке $x_0 \in D_A$,* если

$$A(x_n) \to A(x_0) \text{ в } Y \text{ при } x_n \to x_0 \text{ в } X, \quad x_n \in D_A,$$

т.е., если $\{x_n\}$ — любая последовательность из D_A, удовлетворяющая условию $\|x_n - x_0\| \to 0$, то $\|A(x_n) - A(x_0)\| \to 0$;

— *непрерывным,* если он непрерывен в любой точке $x_0 \in D_A$;

— *ограниченным,* если он ограниченные множества из D_A переводит в ограниченные, т.е., если множество $M \subset D_A$ ограничено в X, то $A(M)$ ограничено в Y.

— *линейным,* если

(a) D_A — линейное многообразие;

(b) $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) \quad \forall \alpha_{1,2} \in \mathbb{R},\ x_{1,2} \in D_A$.

Значение линейного оператора A на элементе x обозначают

$$Ax = A(x).$$

Произведением операторов $A : D_A \to Y$ и $B : \mathrm{Im}\,(A) \to Z$ называется оператор $B \cdot A : D_A \to Z$, действующий по формуле:

$$(B \cdot A)(x) = B(Ax).$$

П р и м е р ы.

1. Скалярная функция $y = f(x)$, определенная на множестве $D \subset \mathbb{R}$, является оператором A, действующим из $D \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ по формуле $A(x) = f(x)$. Если $f(x) = kx$ $(k \in \mathbb{R})$, то очевидно, что $D = \mathbb{R}$ и оператор A линейный. Если $f(x) = \sin(e^x)$, то $A = (B \cdot C)$, $C(x) = e^x$, $B(y) = \sin y$.
2. Отображение, которое каждой дифференцируемой на $[a, b]$ функции $x = x(t)$, ставит в соответствие ее производную $x' = x'(t)$ является линейным оператором, действующим из $C^1[a, b]$ в $C[a, b]$.

Упражнения. Пусть A — линейный оператор. Доказать, что

1.1 если $x = 0$, то $Ax = 0$;

1.2 $\mathrm{Im}\, A$ — линейное многообразие;

1.3 $\mathrm{Ker}\, A$ — линейное многообразие (линейное подпространство, если A непрерывен);

1.4 если $Ax = 0$ на некотором шаре, то $Ax = 0$ всюду;

1.5 если X — n-мерное пространство с базисом $\{e_i\}$, Y — m-мерное пространство с базисом $\{\eta_j\}$, то для любого линейного оператора $A : X \to Y$ существует матрица $\tilde{A}$ размера $m \times n$ такая, что

$$Ax = \sum_{j=1}^{m} b_j \eta_j, \quad b = \tilde{A} \cdot c \qquad \forall x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \quad c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(Подсказка: матрица A составляется из коэффициентов разложения векторов Ae_i по базису $\{\eta_j\}$).

§ 2 Необходимые и достаточные условия непрерывности и ограниченности линейных операторов

Лемма 2.1. *Если линейный оператор непрерывен в точке $x = 0$, то он непрерывен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A : D_A \to Y$ непрерывен в точке $x = 0$. Нужно доказать, что он непрерывен в любой $x \in D_A$. Пусть $x \in D_A$, $x_n \in D_A$, $x_n \to x$. Тогда

$$(x_n - x) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad Ax_n - Ax = A(x_n - x) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad Ax_n \to Ax.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть оператор $A : D_A \subset X \to Y$ линейный, число $r > 0$,*

$$B_r \cap D_A = \{x \in D_A : \quad \|x\| \le r\}.$$

Тогда, если множество $A(B_r \cap D_A)$ ограничено, то оператор A ограниченный.

Доказательство. По условиям леммы существует число $C > 0$ такое, что

$$\|Ax\| \le C \quad \forall x \in D_A, \quad \|x\| \le r$$

Нужно доказать, что A любое ограниченное множество из D_A переводит в ограниченное. Пусть M — ограниченное множество из D_A. Это означает, что существует число $R > 0$ такое, что $\|x\| \le R \ \forall x \in M$. Тогда для всех $x \in M$

$$\left\|\frac{r}{R}x\right\| \le r \implies \left\|A\,x\frac{r}{R}\right\| \le C \implies \|Ax\| \le \frac{CR}{r}.$$

То есть множество $A(M)$ ограничено. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Для линейного оператора $A : D_A \to Y$ следующие утверждения эквивалентны*

(а) оператор A непрерывен;

(б) оператор A ограничен;

(в) существует постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$\|Ax\| \le \beta\|x\| \quad \forall x \in D_A. \tag{2.1}$$

Доказательство проведем по схеме (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (а).

(а) $\Longrightarrow$ (б). Пусть A непрерывен. Если он неограничен, то множество

$$A(B_1 \cap D_A) = \{Ax : \quad x \in D_A, \ \|x\| \le 1\}$$

неограничено (если оно ограничено, то и оператор A ограничен по лемме 2.2). Значит, для любого числа $C > 0$ существует элемент $x_c \in B_1 \cap D_A$, для которого $\|Ax_c\| \ge C$. Полагая $C = n$, получаем последовательность

$$x_n \in D_A, \quad \|x_n\| \le 1, \quad \|Ax_n\| \ge n.$$

Определим $y_n = x_n/n$. Тогда $\|y_n\| = \|x_n\|/n \le 1/n \to 0$, то есть $y_n \to 0$. Однако $\|Ay_n\| = \|Ax_n\|/n \ge 1$, то есть $Ay_n \not\to 0$. Противоречие с непрерывностью A.

(б) $\Longrightarrow$ (в). Пусть A ограничен. Тогда множество $A(B_1 \cap D_A)$ ограничено, то есть существует константа $\beta > 0$ такая, что

$$\|Ax\| \le \beta \quad \forall x \in B_1 \cap D_A.$$

Возьмем $x \in D_A$, $x \ne 0$. Тогда $x/\|x\| \in B_1 \cap D_A$. Значит,

$$\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \le \beta \implies \|Ax\| \le \beta\|x\|$$

(в) $\Longrightarrow$ (а). Пусть выполняется (2.1). Если $x_n \to x$, то $(x_n - x) \to 0$. Используя (2.1), получаем

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \le \beta\|x_n - x\| \to 0.$$

Значит, $Ax_n \to Ax$, оператор A непрерывен. Теорема доказана.

Таким образом, для линейных операторов понятия ограниченности и непрерывности эквивалентны. Поэтому, линейные непрерывные операторы часто называют ограниченными.

Определение. Линейный оператор, который не является непрерывным, называют *неограниченным.*

Для нелинейных операторов из ограниченности непрерывность не вытекает. Например, оператор $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, действующий по формулам $f(x) = 1$, если x — рациональное число и $f(x) = 0$, если x — иррациональное, ограничен, но не является непрерывным ни в одной точке.

Упражнение 2.1. Пусть оператор $A : D_A \to Y$ линейный. Множество $M \subset D_A$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, множество $A(M)$ ограничено. Доказать, что A ограничен (сначала рассмотреть случай: M — шар).

§ 3 Пространство $\mathcal{L}(X,Y)$. Норма оператора

$\mathcal{L}(X,Y)$ — множество всех линейный непрерывных операторов, определенных всюду в X, со значениями в Y;

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

Очевидно, что $\mathcal{L}(X,Y)$ — линейное пространство со следующими операциями сложения и умножения на скаляр

$$(A+B)x = Ax+Bx, \quad (\alpha A)x = \alpha(Ax) \quad \forall x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathcal{L}(X,Y).$$

Введем норму. Из теоремы 2.1 вытекает, что для линейного непрерывного A величина $\|Ax\|$ ограничена при $x \in D_A$, $\|x\| = 1$. Значит, она имеет точную верхнюю грань.

Определение. *Нормой линейного непрерывного оператора* $A : D_A \subset X \to Y$ называют число

$$\|A\| = \sup_{x \in S_1 \cap D_A} \|Ax\|, \quad S_1 = \{x \in X : \quad \|x\| = 1\}. \tag{3.1}$$

Проверим аксиомы нормы (для $\mathcal{L}(X,Y)$).

1. Если $\|A\| = 0$, то $\|Ax\| = 0$ для всех $x \in X$ с $\|x\| = 1$. Возьмем любой $y \in X$, $y \neq 0$. Тогда $\|y/\|y\|\| = 1$, значит, $Ay/\|y\| = 0 \Longrightarrow Ay = 0$ для всех $y \in X$, т.е. $A = 0$.

2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда

$$\|\alpha A\| = \sup_{x \in S_1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{x \in S_1} \|Ax\| = \alpha \|A\|.$$

3. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \sup_{x \in S_1} \|(A+B)x\| \leq \sup_{x \in S_1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \\ &\leq \sup_{x \in S_1} \|Ax\| + \sup_{x \in S_1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

Норму можно также вычислять по следующим формулам.

Лемма 3.1. *Пусть $A : D_A \to Y$ линейный и непрерывный. Тогда*

$$\|A\| = \sup_{x \in D_A,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}; \tag{3.2}$$

$\|A\|$ — *наименьшая из констант β, удовлетворяющих (2.1);* (3.3)

$$\|A\| = \sup_{x \in D_A,\, \|x\| \leq 1} \|Ax\|. \tag{3.4}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$S_1 \cap D_A = \{x/\|x\| : \quad x \in D_A, \quad x \neq 0\}$$
$$\Longrightarrow \|A\| = \sup_{x \in D_A \cap S_1} \|Ax\| = \sup_{x \in D_A,\, x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{x \in D_A,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Формула (3.2) доказана.

Из (3.2) и определения inf вытекает, что $\|A\|$ — наименьшая из констант β, для которых выполняется неравенство $\|Ax\|/\|x\| \leq \beta$ для всех $x \in D_A$, $x \neq 0$. Это эквивалентно (3.3).

Осталось доказать (3.4). Из (3.2) вытекает

$$\|A\| = \sup_{x \in D_A,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in D_A,\, x \neq 0, \|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in D_A,\, \|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

С другой стороны, используя определение $\|A\|$, получаем

$$\|A\| = \sup_{x \in D_A,\, \|x\| = 1} \|Ax\| \leq \sup_{x \in D_A,\, \|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Следовательно, выполняется (3.4). Лемма доказана.

Подчеркнем, что из определения $\|A\|$, теоремы 2.1 и леммы 3.1 вытекают следующие свойства линейного оператора A.

1. Если A непрерывен, то $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ $\forall x \in D_A$.

2. Если $\|A\| < +\infty$, то A непрерывен.

3. Если доказано одно из неравенств

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq C\|x\| \quad \forall x \in D_A; \\ \|Ax\| &\leq C \qquad \forall x \in D_A,\ \|x\| = 1, \end{aligned}$$

то A непрерывный, причем $\|A\| \leq C$.

Упражнение 3.1. Доказать, что если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$, то $B \cdot A \in \mathcal{L}(X,Z)$, причем $\|B \cdot A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.

§ 4 Примеры линейных операторов

Операторы в конечномерных пространствах

Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ линейный оператор. Тогда (упр. 1.5) существует матрица $\tilde{A}$ размера $m \times n$ такая, что

$$Ax = \tilde{A}x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

То есть изучение линейных операторов в конечномерных пространствах сводится к рассмотрению матриц и векторов. Очевидно, что A непрерывен. Более того, справедлив следующий результат.

Теорема 4.1. *Если пространство X конечномерно, то любой линейный оператор $A : X \to Y$ является непрерывным.*

Доказательство. Пусть X — n–мерное пространство с базисом $\{e_i\}_1^n$; $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ — нормы в пространствах X и Y соответственно. Введем в X еще одну норму

$$\|x\|_c = \sum_{i=1}^n |c_i| \qquad \forall x = \sum_{i=1}^n c_i e_i, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Положим $\alpha = \max\{\|Ae_i\|_Y : \ 1 \leq i \leq n\}$. Так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то существует постоянная β: $\|x\|_c \leq \beta\|x\|_X$ $\forall x \in X$. Тогда для всех $x \in X$

$$\|Ax\|_Y = \left\| A\left(\sum_{i=1}^n c_i e_i\right)\right\|_Y \leq \sum_{i=1}^n |c_i| \cdot \|Ae_i\|_Y \leq \alpha\|x\|_c \leq \alpha\beta\|x\|_X.$$

Отсюда по теореме 2.1 вытекает непрерывность A. Теорема доказана.

Норма оператора зависит от того каким образом введены нормы в пространствах X и Y.

Пример. Пусть X — пространство, состоящее из векторов $x \in \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_1 = \sum |x_i|$. Введем линейный оператор $A : X \to X$, действующий по формуле $Ax = \tilde{A} \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\tilde{A} = ((a_{ij}))$ — матрица размера $m \times n$. Докажем, что

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|. \tag{4.1}$$

Действительно, для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = 1$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^m |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \sum_{i=1}^m |a_{ij}|\right) \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

Следовательно, $\|A\| \leq \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}|$.

Осталось доказать обратное неравенство. Пусть max в (4.1) достигается, например, при $j = 1$. Положим $x = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \sum_{i=1}^m |a_{i1}| = \|Ax\|_1 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 = \|A\|.$$

Упражнения. Пусть X и Y — пространства векторов из $\mathbb{R}^n$, оператор A такой же, как и в примере. Вычислить $\|A\|$, если

4.1 $\|x\|_X = \|x\|_Y = \|x\|_\infty \equiv \max |x_i|$;

4.2 $\|x\|_X = \|x\|_1, \quad \|x\|_Y = \|x\|_\infty$.

Замечание. Если X — бесконечномерное пространство, то из линейности не вытекает непрерывность оператора. Например, рассмотрим оператор дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t} : D_A \to C[a,b],$$

где $D_A \subset C[a,b]$ — множество всех непрерывно дифференцируемых функций. Определим последовательность $x_n(t) = n^{-1}\sin(nt)$. Тогда

$$\|x_n\|_{C[a,b]} = \frac{1}{n} \to 0, \qquad \left\|\frac{\partial}{\partial t} x_n\right\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |\cos(nt)| \not\to 0.$$

Следовательно, оператор не является непрерывным. Очевидно, что $\partial/\partial t$ непрерывен, как действующий из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$.

Интегральные операторы

Пусть $k = k(t,s)$ — заданная на $[a,b]\times[a,b]$ функция, $x = x(t)$ — заданная на $[a,b]$ функция. Тогда равенство

$$y(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds \quad \forall t\in[a,b] \tag{4.2}$$

определяет на $[a,b]$ функцию $y = y(t)$, если, разумеется, интеграл существует и конечен для любого t. Оператор, который каждой функции $x(t)$ ставит в соответствие функция $y(t)$, определяемую формулой (4.2), называется *интегральным.* Обозначим его через A, то есть

$$Ax(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds \quad \forall t\in[a,b]. \tag{4.3}$$

Теорема 4.2. *Пусть оператор A определяется формулой (4.3). Тогда, если функция $k = k(t,s)$ непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$, то $A \in \mathcal{L}\left(C[a,b]\right)$, причем*

$$\|A\|_{\mathcal{L}\left(C[a,b]\right)} \le \beta = \max_{a\le t\le b}\int_a^b |k(t,s)|\,ds. \tag{4.4}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $k\in C([a,b]\times[a,b])$, $x\in C[a,b]$, то $y = Ax \in C[a,b]$. Это вытекает из курса матем.

анализа. Используя свойства интеграла, получаем

$$|Ax(t)| = \left|\int_a^b k(t,s)x(s)\,ds\right| \le$$
$$\le \int_a^b |k(t,s)|\cdot|x(s)|\,ds \le \|x\|_{C[a,b]}\int_a^b |k(t,s)|\,ds \;\; \forall t\in[a,b].$$
$$\Longrightarrow \quad \|Ax\|_{C[a,b]} \le \alpha\|x\|_{C[a,b]} \quad \forall x\in C[a,b].$$

Значит, оператор $A : C[a,b]\to C[a,b]$ непрерывен и выполняется оценка (4.4). Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть оператор A определяется формулой (4.3). Тогда, если $k\in L^2\left((a,b)\times(a,b)\right)$, то $A\in\mathcal{L}\left(L^2(a,b)\right)$, причем*

$$\|A\|_{\mathcal{L}\left(L^2(a,b)\right)} \le \beta = \sqrt{\int_a^b\int_a^b k^2(t,s)\,ds\,dt} \tag{4.5}$$

Доказательство. Применим неравенство Гельдера (6.3) гл. I:

$$|Ax(t)|^2 = \left|\int_a^b k(t,s)x(s)\,ds\right|^2 \le$$
$$\le \int_a^b k^2(t,s)\,ds\cdot\|x\|^2_{L^2(a,b)}, \quad \forall t\in[a,b], \quad x\in L^2(a,b) \tag{4.6}$$

Так как $k\in L^2\left((a,b)\times(a,b)\right)$, то функция, стоящая в правой части неравенства, интегрируемая по $t\in(a,b)$. Значит, и функция, стоящая в левой части неравенства, интегрируемая по $t\in(a,b)$. Доказали, что $Ax\in L^2(a,b)$, т.е. $A : L^2(a,b)\to L^2(a,b)$. Интегрируя (4.6) по $t\in(a,b)$, получаем для всех $x\in L^2(a,b)$

$$\int_a^b |Ax(t)|^2\,ds \le \beta^2\|x\|^2_{L^2(a,b)} \quad\Longrightarrow\quad \|Ax\|_{L^2(a,b)} \le \beta\|x\|_{L^2(a,b)}.$$

Следовательно, оператор $A : L^2(a,b)\to L^2(a,b)$ непрерывен и выполняется (4.5). Теорема доказана.

Упражнение 4.3. Пусть $k(t,s)$ непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$. Доказать, что $A\in\mathcal{L}\left(L^1(a,b)\,,\,C[a,b]\right)$ и получить оценку нормы.

Точно такими же свойствами обладает интегральный оператор A, который каждой функции n-переменных $x(t_1, \dots, t_n)$ ставит в соответствие функцию $y = Ax$ такую, что

$$y(t_1, \dots, t_m) = \int_D k(t,s)x(s)\,ds \quad t \in D. \tag{4.7}$$

Здесь D — связное, ограниченное, измеримое по Лебегу множество, $k = k(t_1, \dots, t_m, s_1, \dots, s_n)$ — функция $m+n$-переменных. Если $k \in L^2(D \times D)$, то $A \in \mathcal{L}\,(L^2(D))$; если $k \in C(\overline{D \times D})$, то $A \in \mathcal{L}\,(C(\overline{D}))$.

Дифференциальные операторы

Определим дифференциальный оператор A порядка n по формуле

$$Ax(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) x^{(k)}(t).$$

Пусть $a_k(t) \in C[a,b]$. Тогда $A \in \mathcal{L}\,\big(C^n[a,b], C[a,b]\big)$. Это вытекает из очевидной оценки

$$\|Ax\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k(t)x^{(k)}(t) \right| \le \sum_{k=0}^{n} \max_{t\in[a,b]} \left| a_k(t)x^{(k)}(t) \right| \le$$
$$\le \alpha \sum_{k=0}^{n} \max_{t\in[a,b]} \left| x^{(k)}(t) \right| = \alpha \|x\|_{C^n[a,b]} \qquad \left(\alpha = \max_{0\le i\le n} \max_{t\in[a,b]} |a_i(t)| \right).$$

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^d$. Аналогичным образом вводятся дифференциальные операторы, определенные на функциях d-переменных. Например, общий вид линейного дифференциального оператора 2-го порядка:

$$Ay(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial y(x)}{\partial x_i} + c(x)y(x).$$

Если функции $a_{i,j}$, b_j, c непрерывны в $\overline{\Omega}$, то $A \in \mathcal{L}\,\big(C^2(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})\big)$.

§ 5 Обратный оператор

Пусть $A : D_A \subset X \to Y$. Напомним, что $\operatorname{Im} A \equiv \{Ax : x \in D_A\}$ — образ оператора A.

Определение. Оператор $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to X$ называется *левым обратным* к оператору A, если

$$A^{-1}Ax = x \quad \forall x \in D_A.$$

Определение. Оператор A называется *взаимно однозначным,* если $Ax_1 \ne Ax_2$ при $x_1 \ne x_2$ (т.е. A разные точки переводит в разные).

Очевидно, что обратные операторы существуют только у взаимно однозначных операторов.

Упражнение 5.1. Пусть оператор A линеен. Доказать, что если существует A^{-1}, то он линеен.

Напомним, что ядром оператора A называется множество

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in D_A : Ax = 0\}.$$

Следующие две теоремы дают необходимые и достаточные условия существования и непрерывности обратного оператора.

Теорема 5.1. *Линейный оператор A имеет левый обратный, если и только если* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Доказательство. Пусть существует A^{-1}. Если $Ax_0 = 0$, то $x_0 = A^{-1}(Ax_0) = 0$. Следовательно, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Пусть $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Если $Ax_1 = Ax_2$, то

$$A(x_1 - x_2) = 0 \implies (x_1 - x_2) \in \operatorname{Ker} A \implies x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2.$$

Следовательно, $Ax_1 \ne Ax_2$ при $x_1 \ne x_2$. Оператор A взаимно однозначный, и поэтому существует A^{-1}. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть $A : D_A \to Y$. Оператор $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to X$ существует и непрерывен, если и только если существует $\alpha > 0$:*

$$\|Ax\| \geq \alpha\|x\| \quad \forall x \in D_A. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to X$ существует и непрерывен. Тогда, по теореме 2.1, найдется постоянная $\beta > 0$:

$$\|A^{-1}y\| \leq \beta\|y\| \quad \forall y \in \operatorname{Im} A. \tag{5.2}$$

Полагая $y = Ax$, учитывая, что $A^{-1}(Ax) = x$, получаем (5.1), в котором $\alpha = 1/\beta$.

Пусть выполняется (5.1). Тогда очевидно, что $Ax = 0 \iff x = 0$. Значит, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, оператор A^{-1} существует. Полагая в (5.1) $x = A^{-1}y$, получаем (5.2), в котором $\beta = 1/\alpha$. Следовательно, A^{-1} непрерывен. Теорема доказана.

Упражнение 5.2. Доказать, что из (5.1) вытекает $\|A^{-1}\| \leq 1/\alpha$

Определение. Оператор $A : D_A \to Y$ называется *непрерывно обратимым,* если $\operatorname{Im} A = Y$ и левый обратный A^{-1} существует, непрерывен и определен на всем Y.

Упражнение 5.3. Доказать, что если A и B непрерывно обратимы, то и $B \cdot A$ непрерывно обратим, причем

$$(B \cdot A)^{-1} = A^{-1}B^{-1}. \tag{5.3}$$

Теорема 5.3 (Банаха об обратном операторе). *Пусть X, Y — банаховы пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ взаимно однозначно отображает X на все Y (т.е. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, $\operatorname{Im} A = Y$). Тогда A непрерывно обратим.*

Доказательство можно найти в [2, 4, 6, 12].

Следствие 5.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $D_A \subset X$, оператор $A : D_A \to Y$ линеен и непрерывен, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, D_A и*

$\operatorname{Im} A$ — замкнутые множества. Тогда оператор $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to D_A$ существует и непрерывен.

Доказательство. Из условий вытекает, что D_A и $\operatorname{Im} A$ — линейные подпространства в X и Y соответственно. Значит, их можно рассматривать как самостоятельные банаховы пространства. Тогда $A \in \mathcal{L}(D_A, \operatorname{Im} A)$ и, так как $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то можно применить теорему Банаха, согласно которой оператор $A : D_A \to \operatorname{Im} A$ непрерывно обратим. Следствие доказано.

Упражнения.

5.4 Доказать, что операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t} : X_1 \to C^n[a, b]$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2} : X_2 \to C^n[a, b]$, непрерывно обратимы, если $X_1 = \{x \in C^{n+1}[a, b] : x(a) = 0\}$, $X_2 = \{x \in C^{n+1}[a, b] : x(a) = x(b) = 0\}$ — пространства с нормой $\|\cdot\|_{C^{n+1}[a,b]}$.

5.5 Почему оператор $\frac{\partial^2}{\partial t^2} : X \to C[a, b]$, $X = \{x \in C^2[a, b] : x(a) = 0\}$ не является обратимым? Какие можно добавить условия на пространство X, чтобы получить непрерывно обратимый оператор?

5.6 Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ непрерывно обратимый. Доказать, что если одно из пространств X или Y банахово, то другое также банахово.

§ 6 Операторные уравнения

Все математические задачи, описываемые уравнениями,

$$A(x) = y \quad (A : D_A \subset X \to Y). \tag{6.1}$$

Примеры.

1. Система алгебраических уравнений

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = y_i \qquad i = \overline{1, m}$$

записывается в виде (6.1), если положить

$$X = \mathbb{R}^n, \quad Y = \mathbb{R}^m, \quad A(x) = \Big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\Big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Если система (6.1) линейная, то и оператор A будет линейным.

2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\mu x(t) + \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds = y(t) \quad \forall t \in [a,b].$$

Здесь x — неизвестная функция. Число $\mu \in \mathbb{R}$ и функции k, y заданы. Полагая

$$Ax(t) = \mu x(t) + \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b]$$

получаем операторное уравнение (6.1). Выбор пространств X, Y зависит от того, в каком классе мы ищем решение $x(t)$. Если, например, требуется $x \in C[a,b]$, то $X = C[a,b]$, в качестве Y можно также взять $Y = C[a,b]$.

3. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad t \in [0,T], \quad x_i(0) = z_i \quad i = \overline{1,n}.$$

Полагая

$$X = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in (C^1[0,T])^n : \quad x_i(0) = 0 \quad i = \overline{1,n}\Big\},$$
$$Y = (C[0,T])^n \times \mathbb{R}^n,$$
$$Ax = \Big(x_1' - f_1(t,x)\,,\ \ldots\,,\ x_n' - f_n(t,x),\ x_1(0),\ \ldots\,,\ x_n(0)\Big),$$

получаем (6.1), в котором $y = (0, \ldots 0, z_1, \ldots, z_n)$.

Упражнение 6.1. Записать задачу:

$$x''(t) = b(t)x'(t) + c(t)x(t) + y(t) \quad t \in [a,b], \quad x(a) = \alpha, \ \ x(b) = \beta$$

в виде (6.1) с линейным оператором A

Определение. Уравнение (6.1) называется *линейным,* если оператор A линеен. Линейное уравнение (6.1) называется

– *однородным,* если $y = 0$,

– *неоднородным,* если $y \neq 0$.

Если оператор A имеет левый обратный, и он нам известен, то решение (6.1) определяется формулой $x = A^{-1}(y)$.

Решение уравнения (6.1) называется устойчивым (по правой части), если оно непрерывным образом зависит от y. Устойчивость очень важна для практического решения задач, так как в реальности исходные данные задачи известны, как правило, не точно, а приближенно. Отметим несколько причин этого

1. Исходные данные y получены в результате «измерений» (например, температуры, давления и т. д.). Любой измерительный прибор имеет погрешность.

2. Исходные данные y получены в результате решения другой задачи. Большое количество задач точно решить нельзя (например, систему нелинейных алгебраических либо дифференциальных уравнений). Их решают приближенно.

3. Пусть нам y известно точно по какой-то явной формуле. Для решения задачи (6.1) используется ЭВМ. Тогда любое иррациональное число, входящая в y будет заменено на конечную дробь (десятичную, если используется десятичная система исчисления).

Если решение задачи неустойчиво, то небольшая погрешность в исходных данных может сильно повлиять на x, и, в итоге, мы получим решение далекое от реального.

Очевидно, что устойчивость эквивалентна непрерывности левого обратного оператора A^{-1}.

Определение. Уравнение (6.1) называется *корректно разрешимым* на паре (X, Y), если для любой правой части $y \in Y$

(а) задача (6.1) имеет решение $x \in X$;

(б) решение $x \in X$ единственно;

(в) решение устойчиво.

Замечание. Нетрудно заметить, что уравнение (6.1) корректно разрешимо, если и только если оператор A непрерывно обратим.

Задача, которая сводится к решению корректно разрешимого уравнения, называется *корректно поставленной* (по Адамару).

Необходимое и достаточное условие единственности решения приведено в следующей теореме.

Теорема 6.1. *Пусть оператор A линеен. Тогда следующие утверждения эквивалентны*

(а) если уравнение (6.1) имеет решение, то оно единственно;

(б) однородное уравнение $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение $x = 0$.

Упражнение 6.2. Доказать теорему 6.1

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости решения.

Пусть существует постоянная $C > 0$ (не зависящая от x и y) такая, что любое решение (6.1) удовлетворяет оценке

$$\|x\| \leq C\|y\|. \tag{6.2}$$

Неравенство (6.2) называют *априорной* оценкой решения.

Теорема 6.2. *Пусть оператор A линеен и существует постоянная $C > 0$ для которой выполняется априорная оценка (6.2). Тогда, если задача (6.1) имеет решение, то оно единственно и устойчиво.*

Доказательство. Пусть задача (6.1) имеет два решения $x_{1,2}$. Тогда $Ax_{1,2} = y$, следовательно, $A(x_1 - x_2) = 0$ и из из априорной оценки (6.2) вытекает $\|x_1 - x_2\| \leq C\|0\| = 0$, то есть $x_1 - x_2 = 0$. Единственность доказана.

Докажем устойчивость. Заменяя в (6.2) элемент y на Ax (напомним, что x — решение уравнения (6.1)), получаем $\|x\| \leq C\|Ax\|$. Значит, оператор A^{-1} существует и непрерывен (теорема 5.2). Теорема доказана.

Теорема 6.3. *Пусть X, Y банаховые пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, задача (6.1) имеет единственное решение $x \in X$ для любого $y \in Y$. Тогда уравнение (6.1) корректно разрешимо.*

Доказательство. Нужно доказать, что оператор A непрерывно обратим. Из условий теоремы вытекает, что $\operatorname{Im} A = Y$, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Выполнены все условия теоремы Банаха об обратном операторе. Значит, оператор A непрерывно обратим. Теорема доказана.

Замечание. Согласно теореме 6.3 из существования и единственности решения вытекает устойчивость. Подчеркнем, что это верно только для линейных задач и только в банаховых пространствах.

§ 7 Решение линейных уравнений в «малом»

Теорема 7.1. *Пусть X — банахово пространство, $B \in \mathcal{L}(X)$, $\|B\| < 1$. Тогда*

(а) уравнение

$$x - Bx = y. \tag{7.1}$$

имеет единственное решение $x \in X$ для любого $y \in X$, причем

$$\|x - x_n\| \leq \|B\|^n \|x - x_0\| \quad \forall n \geq 0, \tag{7.2}$$

последовательность $\{x_n\} \subset X$ определяется формулами $x_n = Bx_{n-1} + y$ $(n \geq 1)$, в качестве x_0 можно взять любой элемент пространства X;

(б) оператор $E - B$ непрерывно обратим.

Доказательство. (а) Введем (нелинейный) оператор $\Phi : X \to X$ по формуле: $\Phi(x) = Bx + y$. Тогда (7.1) эквивалентно уравнению $\Phi(x) = x$. Так как

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \|B(x_1 - x_2)\| \leq \|B\| \cdot \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_{1,2} \in X,$$

то, оператор B является сжимающим на X с коэффициентом сжатия $\gamma = \|B\|$. Утверждения (а) вытекают из принципа сжимающих отображений (теорема 8.1 гл. I).

Утверждение (б) вытекает из (а) и теоремы 6.3. Теорема доказана.

Пусть теперь $A, C \in \mathcal{L}(X, Y)$, пространства X, Y банаховы, оператор A непрерывно обратим. Тогда уравнение

$$Ax - Cx = z \tag{7.3}$$

эквивалентно (7.1), в котором $B = A^{-1}C$, $y = A^{-1}z$.

Упражнение 7.1. Сформулировать аналог теоремы 6.1 для задачи (7.3). Получить априорные оценки решений уравнений (7.1) и (7.3).

Из теоремы 7.1 также вытекает, что операторы, достаточно близкие к непрерывно обратимым, также являются непрерывно обратимыми.

Следствие 7.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ непрерывно обратим. Тогда любой оператор $C \in \mathcal{L}(X, Y)$, удовлетворяющий неравенству: $\|A - C\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, также является непрерывно обратимым.*

Доказательство. Представим C в виде:

$$C = E - A^{-1}(A - C).$$

Так как

$$\|A^{-1}(A - C)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|(A - C)\| < 1,$$

то C непрерывно обратим по теореме 7.1. Следствие доказано.

§ 8 Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода в «малом»

Уравнение

$$x(t) - \int_a^b k(t, s)x(s)\, ds = y(t) \quad t \in [a, b]. \tag{8.1}$$

называется *интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.* Здесь $x(t)$ — неизвестная функция, $k(t, s)$ и $y(t)$ — заданные на $[a, b] \times [a, b]$ и $[a, b]$ соответственно функции. Определим оператор A по формуле

$$Ax(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)\, ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Тогда (8.1) можно записать в виде

$$x - Ax = y.$$

Пусть $k(t, s) \in C\left([a, b] \times [a, b]\right)$. Ищем решение в $C[a, b]$. Оператор $A \in \mathcal{L}\left(C[a, b]\right)$ (теорема 4.2), причем

$$\|A\|_{\mathcal{L}(C[a,b])} \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |k(t, s)|\, ds.$$

Тогда из теоремы 7.1 вытекает

Теорема 8.1. *Пусть $k(t, s) \in C\left([a, b] \times [a, b]\right)$,*

$$\gamma = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |k(t, s)|\, ds.$$

Тогда, если $\gamma < 1$, то для любого $y \in C[a, b]$ уравнение (8.1) имеет единственное решение $x \in C[a, b]$, причем

$$\|x - x_n\| \leq \gamma^n \|x - x_0\|, \quad x_{n+1}(t) = \int_a^b k(t, s)x_n(s)\, ds + y(t).$$

В качестве $x_0(t)$ можно взять любую функцию из $C[a, b]$.

Упражнение 8.1. Рассмотреть случай $\|k\|_{L^2([a,b]\times[a,b])} < 1$. Можно ли применить теорему 7.1?

Глава III
Линейные функционалы

§ 1 Основные понятия

На протяжении всей главы считаем, что X — нормированное пространство. Пусть D_f — множество из X.

Определение. Отображение, которое каждому элементу $x \in D_f$ ставит в соответствие число $f(x) \in \mathbb{R}$, называется *функционалом* f, определенным на D_f (кратко записывается $f : D_f \to \mathbb{R}$).

Таким образом, функционал — это оператор, действующий из X в $\mathbb{R}$, если рассматривать $\mathbb{R}$, как нормированное пространство с нормой $\|y\| = |y|\ \forall y \in \mathbb{R}$. Поэтому для функционалов справедливы определения предыдущей главы.

Множество D_f называют *областью определения* функционала f.

Равенство $f = g$ означает, что $D_f = D_g$, $f(x) = g(x)\ \forall x \in D_f$.

Функционал $f : D_f \to \mathbb{R}$ называется

— *непрерывным в точке* $x \in D_f$, если

$$f(x_n) \to f(x) \text{ при } x_n \to x,$$

то есть, если $\|x_n - x\| \to 0$, то $|f(x_n) - f(x)| \to 0$;

— *непрерывным,* если он непрерывен в любой точке области своего определения;

— *ограниченным,* если он ограниченные множества переводит в ограниченные;

— *линейным,* если D_f — линейное многообразие и

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x_1, x_2 \in D_f.$$

Значения линейного функционала f на элементе x принято обозначать

$$\langle f, x\rangle = f(x).$$

Примеры.

1 Любая непрерывная на $D_f \subset \mathbb{R}^n$ функция f является непрерывным функционалом, определенным на D_f. Если $f(x) = kx$, то это функционал линеен.

2 Если функция $F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ непрерывна, то

$$f(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\, dt$$

— непрерывный функционал, определенный на $C^1[a, b]$. Такие функционалы возникают в задачах вариационного исчисления.

Упражнение 1.1. Доказать, что если X — конечномерное пространство с базисом $\{e_i\}_1^n$, то для любого линейного непрерывного функционала $f : X \to \mathbb{R}$ существует вектор $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\langle f, x\rangle = \sum_{i=1}^n a_i c_i \quad \forall x = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

Из теоремы 2.1 главы II вытекает

Следствие 1.1. *Для линейного функционала $f : D_f \subset X \to \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны:*

(a) функционал f непрерывен;

(б) *функционал f ограничен;*

(в) *существует $\alpha > 0$ такая, что $|\langle f, x\rangle| \le \alpha\|x\|\ \forall x \in D_f$.*

Нормой линейного непрерывного функционала $f : D_f \subset X \to \mathbb{R}$ называется число

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f \cap S_1} |\langle f, x\rangle|, \quad S_1 = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

Упражнение 1.2. Доказать, что

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{x \in D_f \cap S_1} \langle f, x\rangle, \\ \|f\| &= \sup_{x \in D_f,\, x \neq 0} \frac{\langle f, x\rangle}{\|x\|}, \\ \|f\| &= \sup_{x \in D_f,\, \|x\| \le 1} \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

В приведенных формулах опущен знак модуля. Это не опечатка. Из следствия 1.1 и упр. 1.2 вытекает

Следствие 1.2. *Пусть функционал $f : D_f \to \mathbb{R}$ линеен. Тогда, если выполняется одно из следующих условий*

(а) *$\langle f, x\rangle \le C\|x\|$ для всех $x \in D_f$;*

(б) *$\langle f, x\rangle \le C$ для всех $x \in S_1$;*

то функционал f непрерывен, причем $\|f\| \le C$.

Определение. Множество всех линейных непрерывных функционалов $f : X \to \mathbb{R}$ называют *сопряженным* к X пространством и обозначают X^*.

Таким образом, $X^* \equiv \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Значение $f \in X^*$ на элементе $x \in X$ принято обозначать

$$\langle f, x\rangle_{X^* \times X} = f(x).$$

Однако, если это не приводит к путанице, то мы, для краткости, будем писать просто $\langle f, x\rangle$.

Упражнения. Доказать, что

1.3 если X — евклидово пространство, $y \in X$, $\langle f, x\rangle = (y, x)\ \forall x \in X$, то $f \in X^*$, причем $\|f\| \le \|y\|$;

1.4 если $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$, $y \in L^q(a, b)$,

$$\langle f, x\rangle = \int_a^b y(t)x(t)\,dt \quad \forall x \in L^p(a, b),$$

то $f \in (L^p(a, b))^*$, причем $\|f\| \le \|y\|_{L^q(a,b)}$.

Пусть $X \subset Y$. Тогда, если функционал f определен на Y, то он определен и на X.

Теорема 1.1. *Если нормированное X непрерывно вложено в нормированное пространство Y, то Y^* непрерывно вложено в X^*.*

Доказательство. Пусть вложение $X \subset Y$ непрерывно. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|x\|_Y \le C\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Возьмем любой функционал $f \in Y^*$. Он определен на X и линеен. Так как

$$|\langle f, y\rangle| \le \|f\|_{Y^*}\|y\|_Y \quad \forall y \in Y,$$

то

$$|\langle f, x\rangle| \le \|f\|_{Y^*}\|x\|_Y \le C\|f\|_{Y^*}\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Следовательно, функционал f непрерывен на X, причем

$$\|f\|_{X^*} \le C\|f\|_{Y^*}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Разные функционалы из Y^* могут быть равны как элементы из X^*. Например, пусть

$$Y = \mathbb{R}^2, \quad X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad x_1 = x_2\right\},$$
$$\langle f, y\rangle = y_1 - y_2 \quad \forall y = (y_1, y_2) \in Y.$$

Тогда функционал f не равен нулю (как элемент из Y^*). Однако, $\langle f, x\rangle = 0$ для всех $x \in X$.

§ 2 Теорема Хана-Банаха и ее следствия

Если функционалы $f_{1,2}$ определены на множестве M, то будем писать $f_1 = f_2$ на M, если

$$\langle f_1, x\rangle = \langle f_2, x\rangle \quad \forall x \in M.$$

Т е о р е м а 2.1 (Хана-Банаха). *Пусть $f : D_f \subset X \to \mathbb{R}$ линейный и непрерывный функционал. Тогда его можно продолжить линейным и непрерывным образом с сохранением нормы на все пространство X, то есть существует функционал $\tilde{f} \in X^*$ такой, что*

$$\tilde{f} = f \quad \text{на } D_f, \qquad \|f\| = \|\tilde{f}\|.$$

Доказательство можно найти в [4, 6, 12].

Теорема Хана-Банаха позволяет строить функционалы из X^*, обладающие различными свойствами.

Следствие 2.1. *Для любого $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ существует $f \in X^*$:*

$$\|f\| = 1, \quad \langle f, x_0\rangle = \|x_0\|. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим линейное подпространство: $L = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$. Определим на L функционал

$$\langle f, x\rangle = t\|x_0\| \quad \forall x = tx_0, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Функционал f линеен, удовлетворяет второму условию в (2.1) и

$$\frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|} = \frac{|t| \cdot \|x_0\|}{\|tx_0\|} = 1 \quad \forall x \in L, \; x \neq 0.$$

Значит, он непрерывен (следствие 1.2) и $\|f\| = 1$. Следствие доказано.

Следствие 2.2. *Если $x_0 \in X$, $\langle f, x_0\rangle = 0 \quad \forall f \in X^*$, то $x_0 = 0$.*

Упражнение 2.1. Доказать следствие 2.2 (использовать предыдущее следствие).

Следствие 2.3. *Пусть L — линейное многообразие в X, $x_0 \in X$,*

$$0 < \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|.$$

Тогда существует функционал $f \in X^*$ такой, что

$$f = 0 \text{ на } L, \quad \langle f, x_0\rangle = 1. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$L_0 = \{y + tx_0 : y \in L, \; t \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда любой элемент $x \in L_0$ можно представить в виде:

$$x = y + tx_0, \quad y \in L, \;\; t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Докажем, что это представление единственно. Пусть

$$x \in L_0, \quad y_{1,2} \in L, \quad t_{1,2} \in \mathbb{R}, \qquad x = y_1 + t_1 x_0 = y_2 + t_2 x_0.$$

Тогда $y_1 - y_2 + (t_1 - t_2)x_0 = 0$. Если $t_1 \neq t_2$, то

$$x_0 = \frac{y_1 - y_2}{t_2 - t_1} \in L, \quad \text{т.к. } y_1 - y_2 \in L, \text{ а } L \text{ — линейное многобразие.}$$

Противоречие с условием $x_0 \notin L$. Значит, $t_1 = t_2$, а тогда и $y_1 = y_2$. Единственность представления (2.3) доказана.

Определим функционал f на L_0:

$$\langle f, x\rangle = t \quad \forall x = y + tx_0.$$

Докажем, что f линейный. Пусть $x_{1,2} \in L_0$, $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$. Тогда в силу (2.3) элементы $x_{1,2}$ представимы в виде $x_{1,2} = y_{1,2} + t_{1,2}x_0$, где $y_{1,2} \in L$, $t_{1,2} \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = y + tx_0, \quad \text{где } y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad t = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2$$
$$\implies \quad \langle f, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\rangle = t = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 = \alpha_1\langle f, x_1\rangle + \alpha_2\langle f, x_2\rangle.$$

Докажем, что f непрерывный. Положим

$$d = \inf_{y\in L} \|x_0 - y\|.$$

Тогда для любого ненулевого $x = y + tx_0 \in L_0$ ($y \in L$, $t \in \mathbb{R}$) имеем

$$|\langle f, x\rangle| = |t| = |t|\frac{\|x\|}{\|x\|} = |t|\frac{\|x\|}{\|tx_0 + y\|} = \frac{\|x\|}{\|x_0 - (-y/t)\|} \le \frac{\|x\|}{d},$$

т.к. $-y/t \in L$ и поэтому $\|x_0 - (-y/t)\| \ge d$. Непрерывность f доказана (следствие 1.2).

Проверим выполнение условий (2.2). Если $x \in L$, то в представлении (2.3) $y = x$, $t = 0$, следовательно, $\langle f, x\rangle = 0\ \forall x \in L$. Если $x = x_0$, то в представлении (2.3) $y = 0$, $t = 1$, следовательно, $\langle f, x_0\rangle = 1$. Условия (2.2) выполнены. Осталось воспользоваться теоремой Хана-Банаха и продолжить f на все X. Следствие доказано.

О п р е д е л е н и е. *Ортогональным дополнением* к $L \subset X$ называется множество

$$L^\perp = \Big\{f \in X^* : \quad f = 0 \text{ на } L\Big\} \equiv \Big\{f \in X^* : \quad \langle f, x\rangle = 0\ \ \forall x \in L\Big\}.$$

Равенство $L^\perp = 0$ означает, что если функционал из X^* равен нулю на L, то он равен нулю в любой точке из X.

Следствие 2.4. *Линейное многообразие L плотно в нормированном пространстве X, если и только если $L^\perp = \{0\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L плотно в X. Тогда для любого $x \in X$ существует последовательность $x_n \in L$, $x_n \to x$. Если $f \in L^\perp$, то $\langle f, x_n\rangle = 0$, следовательно,

$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f, x_n\rangle = 0 \quad \forall x \in X \quad \implies \quad f = 0.$$

Значит, $L^\perp = \{0\}$.

Пусть $L^\perp = \{0\}$. Нужно доказать, что тогда L плотно в X. Предположим противное: L не плотно в X. Тогда $\overline{L} \ne X$. Значит, существует $x_0 \in X \setminus \overline{L}$. Тогда

$$\inf_{y\in L}\|x_0 - y\| > 0$$

и поэтому можно применить следствие 2.3, согласно которому существует функционал $f \in X^*$, $f \ne 0$, который равен нулю на L. Противоречие с условием $L^\perp = \{0\}$. Следствие доказано.

Напомним, что линейной оболочкой $\{x_1, \dots, x_n\}$ называется

$$\mathrm{Span}\,\{x_1, \dots, x_n\} = \left\{\sum_{i=1}^n c_i x_i : c_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

Так как $\mathrm{Span}\,\{x_1, \dots, x_n\}$ — конечномерное линейное многообразие, то оно является линейным подпространством X (следствие 5.2 гл. I).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \ne j. \end{cases} \quad \text{— символ Кронекера}$$

Следствие 2.5. *Пусть $x_1, \dots, x_n$ — линейно независимые элементы из X. Тогда существуют $f_1, \dots, f_n \in X^*$ такие, что*

$$\langle f_i, x_j\rangle = \delta_{ij} \quad 1 \le i, j \le n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, как выбирается f_1. Положим $L = \mathrm{Span}\,\{x_2, \dots, x_n\}$. Так как элементы $x_1, \dots, x_n$ линейно независимы, то $x_1 \notin L$. Тогда по следствию 2.3 существует $f_1 \in X^*$ такой, что $f_1 = 0$ на L, $\langle f_1, x_1\rangle = 1$. Следовательно, $\langle f_1, x_j\rangle = \delta_{1j}$. Остальные функционалы строятся абсолютно аналогично.

§ 3 Теорема Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве

Напомним, что гильбертовым называется полное нормированное пространство со скалярным произведением, причем

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Если пространство X гильбертово, то любой элемент $\tilde f \in X$ порождает функционал $f \in X^*$, действующий по формуле (упр. 1.2)

$$\langle f, x\rangle = (\tilde f, x) \quad \forall x \in X. \tag{3.1}$$

Оказывается, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3.1 (Ф. Рисс). *Если X — гильбертово пространство, то для любого $f \in X^*$ существует единственный элемент $\tilde f \in X$, удовлетворяющий (3.1), причем*

$$\|f\|_{X^*} = \|\tilde f\|_X. \tag{3.2}$$

Доказательство. Сначала докажем существование. Пусть

$$L = \{x \in X : \langle f, x\rangle = 0\}.$$

Так как L — линейное подпространство X, то по теореме 14.1 гл. I,

$$X = L \oplus L^\perp, \qquad L^\perp = \{y \in X : \quad (y,x) = 0 \quad \forall x \in L\}.$$

Пусть $L^\perp = \{0\}$. Тогда L плотно в X (следствие 14.1 гл. I). Так как L замкнуто, то $L = \overline{L} = X$. Значит, $f = 0$ на X. Полагая $\tilde f = 0$ получаем нужный элемент.

Пусть $L^\perp \ne \{0\}$. Тогда существует $y \in L^\perp$, $y \ne 0$. Отметим, что $\langle f, y\rangle \ne 0$ (если $\langle f, y\rangle = 0$, то $y \in L$, что противоречит условиям: $y \in L^\perp$, $y \ne 0$). Положим

$$y_0 = \frac{y}{\langle f, y\rangle} \in L^\perp.$$

Тогда $\langle f, y_0\rangle = 1$. Для любого $x \in X$ имеем

$$\big\langle f,\ \ x - \langle f,x\rangle y_0\big\rangle = \langle f,x\rangle - \langle f,x\rangle\langle f,y_0\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - \langle f,x\rangle y_0 \in L$$
$$\Longrightarrow \ \big(y_0\,,\ x - \langle f,x\rangle y_0\big) = 0 \ \ (\text{так как } y_0 \perp L)$$
$$\Longrightarrow \ \ (y_0, x) = \langle f,x\rangle \|y_0\|^2.$$

Элемент $\tilde f = y_0/\|y_0\|^2$ удовлетворяет (3.1). Существование доказано.

Докажем единственность. Пусть $\tilde f_1,\ \tilde f_2 \in X$ удовлетворяют (3.1). Тогда

$$\langle f, x\rangle = (\tilde f_1, x) = (\tilde f_2, x) \quad \Longrightarrow \quad (\tilde f_1 - \tilde f_2, x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Выбирая в последнем равенстве $x = \tilde f_1 - \tilde f_2$ получаем $\|\tilde f_1 - \tilde f_2\|^2 = 0$, значит, $\tilde f_1 = \tilde f_2$. Единственность доказана.

Осталось доказать равенство норм (3.2). Так как

$$\langle f, x\rangle = (\tilde f, x) \le \|\tilde f\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X,$$

то $\|f\| \le \|\tilde f\|$ (следствие 1.2). Положим в (3.1) $x = \tilde f$. Тогда

$$\|\tilde f\|^2 = \langle f, \tilde f\rangle \le \|f\| \cdot \|\tilde f\|,$$

следовательно, $\|\tilde f\| \le \|f\|$. Значит, $\|\tilde f\| = \|f\|$. Теорема доказана.

Таким образом, между гильбертовым X и его сопряженным X^* существует взаимно однозначное соответствие $J : X \to X^*$, которое каждому элементу $\tilde f \in X$ ставит в соответствие функционал $f = J(\tilde f) \in X^*$, действующий по формуле (3.1). Согласно теореме Рисса J отображает X на все X^*. Отображение J и обратное к нему J^{-1} не меняют нормы, то есть

$$\Big\|J(\tilde f)\Big\|_{X^*} = \Big\|\tilde f\Big\|_X \quad \forall \tilde f \in X, \qquad \big\|J^{-1}(f)\big\|_X = \|f\|_{X^*} \quad \forall f \in X.$$

Упражнение 3.1. Докажите, что отображения J и J^{-1} линейные.

Поэтому часто пишут

$$X = X^*,$$

то есть гильбертово пространство отождествляют с сопряженным. Подчеркнем, что равенство понимается в следующем смысле: элемент $x \in X$ равен функционалу $J(x) \in X^*$, функционал $f \in X^*$ равен элементу $J^{-1}(x) \in X^*$.

Упражнение 3.2. Найдите ошибку в следующих рассуждениях. *Пусть X и Y — гильбертовы, причем X непрерывно вложено в Y. Используя теоремы 1.1 и 3.1, получаем*

$$X \subset Y = Y^* \subset X^* = X.$$

Следовательно, $X \subset Y \subset X$ и поэтому $X = Y$.

Пространство $L^2(a,b)$ гильбертово. Значит, согласно теореме Рисса для любого $f \in (L^2(a,b))^*$ существует единственная функция $\tilde{f}(t) \in L^2(a,b)$ такая, что

$$\langle f, x\rangle = \int_a^b \tilde{f}(t)x(t)\,dt \quad \forall x \in L^2(a,b). \tag{3.3}$$

§ 4 Рефлексивные пространства

Пусть X — нормированное пространство. Тогда X^* — пространство всех линейных и непрерывных на X функционалов. Определим $X^{**} = (X^*)^*$ — пространство всех линейных и непрерывных функционалов, определенных на X^*. Аналогично определяется X^{***} и т. д.

Теорема 4.1. *Любой элемент $x \in X$ можно рассматривать, как функционал из X^{**}, действующий по формуле*

$$\langle x, f\rangle_{X^{**}\times X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*\times X} \quad \forall f \in X^*, \tag{4.1}$$

причем $\|x\|_X = \|x\|_{X^{**}}$.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Определим функционал $x : X^* \to \mathbb{R}$ по формуле (4.1). Он линеен, так как

$$\langle x, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\rangle_{X^{**}\times X^*} = \alpha_1\langle f_1, x\rangle + \alpha_2\langle f_2, x\rangle = \\ = \alpha_1\langle x, f_1\rangle_{X^{**}\times X^*} + \alpha_2\langle x, f_2\rangle_{X^{**}\times X^*} \quad \forall f_{1,2} \in X^*, \ \ \alpha_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Далее, так как

$$\langle x, f\rangle_{X^{**}\times X^*} = \langle f, x\rangle \le \|x\|_X\|f\|_{X^*} \quad \forall f \in X^*,$$

то функционал $x : X^* \to \mathbb{R}$ непрерывен и $\|x\|_{X^{**}} \le \|x\|$ (следствие 1.2). По следствию 2.1 существует функционал $f_0 \in X^*$ такой, что

$$\|f_0\|_{X^*} = 1, \quad \langle f_0, x\rangle = \|x\|_X \quad \Longrightarrow \\ \|x\|_X = \langle f_0, x\rangle = \langle x, f_0\rangle_{X^{**}\times X^*} \le \|x\|_{X^{**}}\|f_0\|_{X^*} = \|x\|_{X^{**}}.$$

То есть $\|x\|_{X^{**}} \ge \|x\|$. Значит, $\|x\|_X = \|x\|_{X^{**}}$. Теорема доказана.

Будем писать $X \subset X^{**}$, подразумевая, что любой элемент $x \in X$ является функционалом из X^{**}, действующим по формуле (4.1). Возникает естественный вопрос: справедливо ли равенство $X^{**} = X$? Равенство $X^{**} = X$ понимается в следующем смысле: для любого функционала $x^{**} \in X^{**}$ существует элемент $x \in X$ такой, что

$$\langle x^{**}, f\rangle_{X^{**}\times X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*\times X} \quad \forall f \in X^*.$$

Оказывается, что это равенство выполняется не для всех нормированных пространств.

Определение. Нормированное пространство X называется *рефлексивным,* если $X = X^{**}$.

Не все пространства являются рефлексивными. Например, $L^p(a,b)$ рефлексивно только при $1 < p < \infty$. Пространства $L^1(a,b)$, $L^\infty(a,b)$, $C^n[a,b]$ не рефлексивны.

Если пространство X гильбертово, то, как отмечалось в предыдущем параграфе, $X = X^*$. Значит, $X = X^{**}$.

Теорема 4.2. *Любое гильбертово пространство рефлексивно.*

Справедлив также следующий результат.

Теорема 4.3. *Если X рефлексивно, то любое линейное подпространство X также рефлексивно.*

Доказательство приведено в [2, с. 79, 80].

Упражнение 4.1. Докажите, что если X — рефлексивное пространство, то X^* также рефлексивное.

§ 5 Слабая сходимость

Определение. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in X$ (пишут $x_n \to x$ слабо), если

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X^*.$$

В силу теоремы Рисса 3.1, в гильбертовом пространстве X слабая сходимость $x_n \to x$ эквивалентна

$$(x_n, y) \to (x, y) \quad \forall y \in X.$$

В частности, $x_n \to x$ слабо в $L^2(a, b)$, если

$$\int_a^b f(t) x_n(t)\, dt \to \int_a^b f(t) x(t)\, dt \quad \forall f \in L^2(a, b).$$

Отметим следующие важные факты:

$$\text{если } x_n \to x \text{ по норме, то } x_n \to x \text{ слабо в } X; \tag{5.1}$$

$$\text{если } x_n \to x \text{ слабо в } X,\ A \in \mathcal{L}(X, Y), \text{ то } Ax_n \to Ax \text{ слабо в } Y. \tag{5.2}$$

Упражнения. Доказать

5.1 единственность слабого предела;

5.2 утверждение (5.1);

5.3 утверждение (5.2);

5.4 если X гильбертово, $x_n \to x$ слабо в X, $\|x_n\| \to \|x\|$, то $x_n \to x$.

Еще раз подчеркнем, что из сходимости по норме вытекает слабая сходимость. Для конечномерных пространств верно и обратное.

Теорема 5.1. *В конечномерных пространствах сходимость и слабая сходимость эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X — n-мерное пространство с базисом $\{e_i\}_1^n$. Надо доказать, что в X любая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.

Так как e_i линейно независимы, то по следствию 2.5 существуют функционалы $f_i \in X^*$ такие, что $\langle f_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Пусть

$$x_k, x \in X, \quad x_k \to x \text{ слабо в } X, \quad x_k = \sum_{j=1}^n c_{kj} e_j, \ \ x = \sum_{j=1}^n c_j e_j.$$

Тогда $\langle f, x_k \rangle \to \langle f, x \rangle$ $\forall f \in X^*$. Положим $f = f_i$. Тогда

$$\langle f_i, x_k \rangle = c_{ki}, \quad \langle f_i, x \rangle = c_i \quad \Longrightarrow \quad c_{ki} \to c_i \text{ при } k \to \infty \quad \Longrightarrow$$

$$\|x_k - x\| = \left\| \sum_{j=1}^n (c_{kj} - c_j) e_j \right\| \le \sum_{j=1}^n |c_{kj} - c_j| \cdot \|e_j\| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Теорема доказана.

Упражнение 5.5. Почему таким же способом нельзя доказать утверждение теоремы для случая $n = \infty$?

Существуют бесконечномерные пространства, в которых из слабой сходимости не вытекает сходимость по норме.

Пример. Пусть X — бесконечномерное евклидово пространство. Тогда в нем существует ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, т.е. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (следствие 16.1 гл. I). Докажем, что $e_n \to 0$ слабо, то есть

$$(e_n, x) \to 0 \quad \forall x \in X.$$

Так как $\|e_n\| = 1$, то $c_n = (e_n, x)$ — коэффициенты Фурье элемента x по системе e_n. Значит, $c_n = (e_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$ (следствие 17.1 гл. I). То есть $e_n \to 0$ слабо. Однако, так как $\|e_n\| = 1$, то $e_n \not\to 0$ по норме.

Приведем еще два утверждения, которые будут в дальнейшем неоднократно использоваться.

Теорема 5.2. *Любая слабо сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство см. в [**?**].

Теорема 5.3. *Любая ограниченная последовательность рефлексивного пространства содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство см. в [**?**].

Определение. Оператор $A : X \to Y$ называется

слабо непрерывным, если $Ax_n \to Ax$ слабо в Y при $x_n \to x$ слабо в X;

деминепрерывным, если $Ax_n \to Ax$ слабо в Y при $x_n \to x$ по норме X.

Упражнения.

5.6 Доказать, что если $x_n \to x$ слабо в X, $f_n \to f$ по норме X^*, то $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

5.7 Пусть оператор $A : X \to Y$ линеен. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

(а) A непрерывен; (б) A слабо непрерывен; (в) A деминепрерывен;

Доказательство провести по схеме (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (а). Отметим, что для нелинейных операторов это не верно.

§ 6 Сопряженные операторы

Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $y^* \in Y^*$. Определим функционал $x^* : X \to \mathbb{R}$:

$$\langle x^*, x \rangle = \langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} \quad \forall x \in X.$$

Очевидно, что x^* линеен и определен на всем X. Кроме того

$$\langle x^*, x \rangle \leq C\|x\| \quad \forall x \in X \quad (C = \|y^*\| \cdot \|A\|),$$

следовательно, $x^* \in X^*$. Значит, можно определить оператор $A^* : Y^* \to X^*$, который каждому функционалу $y^* \in Y^*$ ставит в соответствие функционал $A^* y^* \in X^*$, действующий по формуле

$$\langle A^* y^*, x \rangle_{X^* \times X} = \langle y^*, Ax \rangle_{Y^* \times Y} \quad \forall x \in X. \tag{6.1}$$

Определение. Оператор $A^* : Y^* \to X^*$, действующий по формуле (6.1), называется *сопряженным* к $A : X \to Y$.

Теорема 6.1. *Если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, причем $\|A\| = \|A^*\|$.*

Доказательство. Очевидно, что A^* линеен и определен на всем Y^*. Из соотношения

$$\|A^* y^*\|_{X^*} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \langle A^* y^*, x \rangle = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \langle y^*, Ax \rangle \leq \|A\| \cdot \|y^*\| \ \ \forall y^* \in Y^*$$

вытекает непрерывность A^* и неравенство $\|A^*\| \leq \|A\|$ (следствие **??** гл. I). Осталось доказать, что $\|A\| \leq \|A^*\|$. По следствию 2.1 для всех ненулевых $y \in Y$ существует функционал $y^* \in Y^*$ такой, что

$$\|y^*\| = 1, \quad \langle y^*, y \rangle = \|y\|.$$

Полагая $y = Ax$, получаем для всех $x \in X$ с $Ax \neq 0$

$$\|Ax\| = \langle y^*, Ax \rangle = \langle A^* y^*, x \rangle \leq \|A^*\| \cdot \|y^*\| \cdot \|x\| = \|A^*\| \cdot \|x\|.$$

Следовательно, $\|A\| \le \|A^*\| \Rightarrow \|A\| = \|A^*\|$. Теорема доказана.

Упражнение 6.1. Доказать формулы

$$\begin{array}{lcll}
(\alpha A+\beta B)^* & = & \alpha A^*+\beta B^* & \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ A,B\in\mathcal{L}(X,Y),\\
(BA)^* & = & A^*B^* & \forall A\in\mathcal{L}(X,Y),\ B\in\mathcal{L}(Y,Z).\\
A^{**} & = & A, & \text{если } X,\ Y \text{ рефлексивные, } A\in\mathcal{L}(X,Y)
\end{array}$$

Теорема 6.2. *Если оператор $A\in\mathcal{L}(X,Y)$ непрерывно обратим, то $A^*\in\mathcal{L}(Y^*,X^*)$ также непрерывно обратим, причем*

$$(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*.$$

Доказательство. Так как $A^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$, то $(A^{-1})^*\in\mathcal{L}(X^*,Y^*)$. Осталось доказать, что (A^{-1}) является левым

обратным к A^*. Пусть $E: Y\to Y$ — единичный оператор, т.е. $Ey = y$. Тогда $E^*: Y^*\to Y^*$, причем $E^*y^* = y^*$ (проверить!). Используя результаты упр. 6.1, получаем

$$\left(A^{-1}\right)^* A^*y^* = \left(A\cdot A^{-1}\right)^* y^* = E^*y^* = y^* \quad \forall y^*\in Y^*.$$

Следовательно, $\left(A^{-1}\right)^*$ левый обратный к A^*. Теорема доказана.

Пусть пространства X, Y гильбертовы. Тогда $X^* = X$, $Y^* = Y$. Если $A\in\mathcal{L}(X,Y)$, то $A^*\in\mathcal{L}(Y,X)$ и A^* каждому $y\in Y$ ставит в соответствие элемент $A^*y\in X$, который определяется соотношением:

$$(A^*y,x)_X = (y,Ax)_Y \quad \forall x\in X.$$

Через $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_X$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_Y$ обозначены скалярные произведения в пространствах X и Y соответственно. Элемент $A^*y\in X$ определяется единственным образом (проверить!).

Рассмотрим операторы из $\mathcal{L}(H)\equiv\mathcal{L}(H,H)$, где H — гильбертово пространство. Если $A\in\mathcal{L}(H)$, то $A^*\in\mathcal{L}(H)$.

Определение. Оператор $A\in\mathcal{L}(H)$ называется *самосопряженным,* если $A^* = A$, то есть

$$(Ay,x) = (y,Ax) \quad \forall x,y\in H.$$

Примеры.

1. Рассмотрим оператор $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, действующий по формуле $Ax = \tilde{A}\cdot x$, где $\tilde{A}$ — матрица размера $m\times n$ с элементами a_{ij}. Тогда

$$(A^*y,x) = (y,Ax) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j = (\tilde{A}^T\cdot y, x) \quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Следовательно, $A^*y = \tilde{A}^T\cdot y$. Оператор A самосопряженный, если $n = m$, $\tilde{A}^T = \tilde{A}$.

2. Рассмотрим интегральный оператор $A\in\mathcal{L}\left(L^2(a,b)\right)$

$$\begin{aligned}
&Ax(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds \quad \forall t\in[a,b].\\
&(A^*y,x)_{L^2(a,b)} = (y,Ax)_{L^2(a,b)} =\\
&\quad = \int_a^b y(t)\cdot\left(\int_a^b k(t,s)x(s)\,ds\right)dt =\\
&\quad = \int_a^b\left(\int_a^b k(t,s)y(t)\,dt\right)\cdot x(s)\,ds \quad \forall x\in L^2(a,b).
\end{aligned}$$

Следовательно, $A^*y(t) = \displaystyle\int_a^b k(s,t)y(s)\,ds \quad \forall t\in[a,b]$.

Оператор A самосопряженный, если $k(t,s) = k(s,t)$ $\forall t,s\in[a,b]$.

Рассмотрим еще один случай $A\in\mathcal{L}(X,X^*)$, тогда $A^*\in\mathcal{L}(X^{**},X^*)$. Если X рефлексивное, то $X^{**} = X$, следовательно, $A^*\in\mathcal{L}(X,X^*)$.

Определение. Оператор $A\in\mathcal{L}(X,X^*)$ называется самосопряженным, если $A = A^*$, то есть

$$\langle Ax,y\rangle_{X^*\times X} = \langle x,Ay\rangle_{X\times X^*} \quad \forall x,y\in X.$$

Глава IV
Компактные множества и операторы

§ 1 Компактные множества

Одним из фундаментальных результатов математического анализа является теорема Больцано-Вейерштрасса, согласно которой любая ограниченная числовая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Нетрудно заметить, что этот результат верен также в пространстве $\mathbb{R}^n$ и, как следствие, в любом конечномерном пространстве. В бесконечномерных пространствах утверждение теоремы Больцано-Вейерштрасса нарушается.

Пример. Пусть X — бесконечномерное гильбертово пространство. В нем всегда существует последовательность $\{e_i\}_1^n$ такая, что (следствие 16.1 гл. I)

$$(e_n, e_m) = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Так как $\|e_n\| = 1$, то последовательность ограничена. Однако

$$\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 - 2(e_n, e_m) + \|e_m\|^2 = 2 \quad \forall n \neq m.$$

Значит, $\{e_n\}$ и любая ее подпоследовательность не являются фундаментальными и, следовательно, не могут сходится.

Поэтому имеет смысл ввести следующие понятия.

Определение. Множество называется

– *предкомпактным,* если любая его последовательность содержит фундаментальную подпоследовательность;

– *компактным,* если любая его последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность;

– *бикомпактным,* если оно компактно и замкнуто.

Замечание. Говорят еще предкомпакт, компакт, бикомпакт, имея в виду предкомпактное, компактное и бикомпактное множество.

Подчеркнем, что в банаховых пространствах понятия предкомпактности и компактности эквивалентны.

Теорема 1.1. *Любое предкомпактное множество ограничено.*

Доказательство. Предположим противное: множество K неограничено. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset K$, $\|x_n\| \geq n$. Так как последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, то она не может содержать фундаментальной подпоследовательности (т.к. фундаментальная последовательность всегда ограничена). Значит, множество K не может быть предкомпактным. Теорема доказана.

Упражнения. Доказать, что

1.1 в конечномерном пространстве любое ограниченное множество компактно (сначала рассмотреть пространство $\mathbb{R}^n$);

1.2 если K — компакт, оператор A (не обязательно линейный) определен и непрерывен на $\overline{K}$, то $A(K)$ также компакт;

1.3 если K — компакт, оператор A определен и непрерывен на $\overline{K}$, то $A(K)$ также компакт;

1.4 если K — предкомпакт, то $\overline{K}$ также предкомпакт;

1.5 если множество K — предкомпакт из X, $r \in \mathbb{R}$, $y \in X$, то множество $M = \{y + rx : x \in K\}$ также предкомпакт.

1.6 на компакте сильная и слабая сходимости эквивалентны;

Следующие теоремы являются обобщением теорем Вейерштрасса.

Теорема 1.2. *Непрерывный на бикомпакте K функционал (не обязательно линейный) ограничен на K.*

Теорема 1.3. *Если функционал f непрерывен на бикомпакте K, то существуют* $\min\limits_{x\in K} f(x)$, $\max\limits_{x\in K} f(x)$.

Они доказываются точно также как и классические теоремы Вейерштрасса в курсе математического анализа.

Упражнение 1.7. Доказать теоремы 1.2, 1.3

П р и м е р. Используя теорему 1.3 докажем, что следующее замкнутое ограниченное множество

$$K = \Big\{x(t) \in C[0,1] : \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = 1, \;\; |x(t)| \le 1 \;\; \forall t \in [0,1]\Big\}$$

не является бикомпактом в $C[0,1]$. Определим функционал

$$f(x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt.$$

Функционал f непрерывен на $C[0,1]$ (проверить!). Положим $x_n(t) = t^n$, $x_n \in K$. Нетрудно вычислить $f(x_n) = 1/(2n+1) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит,

$$\inf_{x\in K} f(x) = 0.$$

Однако $f(x) > 0\, \forall x \in K$ и, следовательно, f не имеет точки минимума на K. Значит, K не может быть бикомпактом (если K — бикомпакт, то по теореме 1.3 минимум f на K существует).

§ 2 Компактность и конечномерность

В этом разделе мы докажем, что множество содержащее шар не может быть предкомпактом в бесконечномерном пространстве.

Следующий результат называют леммой Рисса о почти перпендикуляре.

Лемма 2.1. *Пусть L — линейное подпространство X, $L \ne X$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует элемент $y_\epsilon \in X$ такой, что*

$$\|y_\epsilon\| = 1, \quad \operatorname{dist}(y_\epsilon, L) \equiv \inf_{x\in L} \|x - y_\epsilon\| > 1 - \epsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y \in X \setminus L$. Тогда $\operatorname{dist}(y, L) = d > 0$. По определению inf для любого $\epsilon > 0$ существует $u_\epsilon \in L$ такой, что

$$d \le \|u_\epsilon - y\| \le \frac{d}{1-\epsilon}. \tag{2.1}$$

Положим

$$y_\epsilon = \frac{u_\epsilon - y}{\|u_\epsilon - y\|}.$$

Тогда $\|y_\epsilon\| = 1$, $y_\epsilon \notin L$ (если $y_\epsilon \in L$, то $y = -y_\epsilon\|u_\epsilon - y\| + u_\epsilon \in L$, что противоречит условию $y \notin L$). Для любого $x \in L$

$$u_\epsilon - x\|u_\epsilon - y\| \in L \qquad (\text{ т.к. } u_\epsilon \in L, \;\; x \in L, \;\; \|u_\epsilon - y\| \in \mathbb{R}).$$

Тогда, по определению d, $\|(u_\epsilon - x\|u_\epsilon - y\|) - y\| \ge d$. Используя это неравенство и (2.1), получаем

$$\|y_\epsilon - x\| = \left\|\frac{u_\epsilon - y}{\|u_\epsilon - y\|} - x\right\| = \frac{\|(u_\epsilon - x\|u_\epsilon - y\|) - y\,\|}{\|u_\epsilon - y\|} \ge \frac{d}{d(1-\epsilon)^{-1}} = 1 - \epsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть X — бесконечномерное пространство. Тогда шар $B_1 = \{x \in X : |x| \le 1\}$ не является предкомпактом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как X бесконечномерное, то существует последовательность конечномерных подпространств L_n:

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots X, \quad L_n \ne L_{n-1} \quad (\text{доказать!}).$$

Каждое L_n можно рассматривать как самостоятельное банахово пространство, причем L_{n-1} — линейное подпространство L_n и $L_{n-1} \neq L_n$. Значит, можно применить лемму 2.1 (в которой $L = L_{n-1}$, $X = L_n$ $y_\epsilon = x_n$, $\epsilon = 1/2$), согласно которой существует

$$x_n \in L_n, \quad \|x_n\| = 1, \quad \|x_n - x\| \geq 1/2 \ \ \forall x \in L_{n-1}.$$

Так как $L_m \subset L_{n-1}$ при $m < n$, то $\|x_m - x_n\| \geq 1/2$. Поэтому последовательность x_n не является фундаментальной и не может содержать фундаментальную подпоследовательность. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *В бесконечномерном пространстве любой шар не является предкомпактом.*

Доказательство. Пусть X бесконечномерно, B — любой шар из X с центром в точке y радиуса r, т.е. $B = \{x \in X : \ |x - y| \leq r\}$. Тогда шар $B_1 \equiv \{x \in X : |x| \leq 1\}$ можно записать в виде

$$B_1 = \{(x - y)/r : \ x \in B\}.$$

Если B — предкомпакт, то B_1 также предкомпакт (упр. 1.5), что противоречит теореме 2.1. Следствие доказано.

Из следствия 2.1 вытекают следующие очевидные результаты.

Следствие 2.2. *В бесконечномерном пространстве любое множество, имеющее внутренние точки, не является предкомпактом.*

Следствие 2.3. *В бесконечномерном пространстве любой предкомпакт не плотен ни в одном шаре.*

Следствие 2.4. *Линейное подпространство $L \subset X$ является конечномерным, если и только если существует шар $B \subset X$ с центром в точке 0 такой, что $B \cap L$ — предкомпакт.*

Упражнения. Доказать

2.1 следствие 2.2 (множество содержит шар);

2.2 следствие 2.3 (использовать упражнение 1.4);

2.3 следствие 2.4 (рассмотреть L как самостоятельное пространство, тогда $B \cap L$ — шар в L).

§ 3 Критерий компактности Хаусдорфа

Определение. Множество K_ϵ называется *ϵ-сетью* множества K, если для любого $x \in K$ существует $x_\epsilon \in K_\epsilon$ такой, что

$$\|x - x_\epsilon\| \leq \epsilon.$$

Другими словами, K_ϵ — ϵ-сеть множества K, если K можно покрыть шарами радиуса ϵ с центрами в точках множества K_ϵ, то есть

$$K \subset \bigcup_{x \in K_\epsilon} B_\epsilon(x).$$

ϵ-сеть называется конечной, если она состоит из конечного числа элементов. Подчеркнем, что если множество имеет конечную ϵ-сеть, то его можно покрыть конечным числом шаров радиуса ϵ.

Теорема 3.1 (Хаусдорф). *Множество K предкомпактно, если и только если для любого числа $\epsilon > 0$ существует конечная ϵ-сеть множества K.*

Доказательство. Пусть K — предкомпакт, $\epsilon > 0$. Докажем, что существует конечная ϵ-сеть множества K. Возьмем $x_1 \in K$. Если $\|x - x_1\| \leq \epsilon \ \forall x \in K$, то $\{x_1\}$ — ϵ-сеть множества K, состоящая из одного элемента. Пусть существует $x_2 \in K$ такой, что

$$\|x_1 - x_2\| > \epsilon.$$

Если для любого $x \in K$

$$\|x - x_1\| \leq \epsilon \quad \text{либо} \quad \|x - x_2\| \leq \epsilon,$$

то $\{x_1, x_2\}$ — ϵ-сеть множества K, состоящая из двух элементов. Пусть существует $x_3 \in K$ такой, что

$$\|x_1 - x_3\| > \epsilon, \quad \|x_2 - x_3\| > \epsilon.$$

Если для любого $x \in K$

$$\|x - x_1\| \le \epsilon \quad \text{либо} \|x - x_2\| \le \epsilon, \quad \text{либо} \quad \|x - x_3\| \le \epsilon,$$

то $\{x_1, x_2, x_3\}$ — ϵ-сеть множества K. Повторяя этот процесс мы либо получаем конечную ϵ-сеть, либо последовательность $\{x_n\} \subset K$:

$$\|x_n - x_m\| > \epsilon \quad \forall n \ne m.$$

Последовательность $\{x_n\}$ не содержит фундаментальной подпоследовательности. Противоречие с предкомпактностью K. Значит, процесс конечен, на каком-то шаге мы получаем конечную ϵ-сеть.

Пусть для любого $\epsilon > 0$ существует конечная ϵ-сеть множества K. Докажем, что K — предкомпакт. Возьмем любую последовательность $\{x_n\} \subset K$. Нужно доказать, что $\{x_n\}$ содержит фундаментальную подпоследовательность.

Пусть $\epsilon_n \to 0$. По условию существует конечная ϵ_1-сеть. Значит, множество K можно покрыть конечным числом шаров радиуса ϵ_1. Тогда в одном из этих шаров содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим этот шар через B_1, часть последовательности, которая попала в B_1 — через X_1. Множество K можно покрыть конечным числом шаров радиуса ϵ_2. Тогда в одном из этих шаров содержится бесконечно много элементов последовательности X_1. Обозначим этот шар через B_2, часть последовательности X_1, которая попала в B_2 — через X_2 и т. д.

Продолжая рассуждения получаем цепочку шаров B_n радиуса ϵ_n и подпоследовательностей X_n, причем

$$X_n \subset B_n, \quad X_m \subset X_n \quad \forall m > n.$$

Выберем подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ из условий:

$$x_{n_1} \in X_1, \quad x_{n_2} \in X_2, \dots$$

Так как $X_{n_m} \subset X_{n_k} \subset B_{n_k}$ при $m > k$, то

$$x_{n_k}, x_{n_m} \in B_{n_k} \text{ при } m > k.$$

Следовательно, $\|x_{n_k} - x_{n_m}\| \le 2\epsilon_{n_k}$ $\forall m > k$ (расстояние между двумя точками шара радиуса ϵ не больше 2ϵ). Следовательно,

$$\|x_{n_k} - x_{n_m}\| \to 0 \text{ при } k, m \to \infty,$$

подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ фундаментальная. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Множество K банахова пространства является компактным, если и только если для любого числа $\epsilon > 0$ существует конечная ϵ-сеть множества K.*

§ 4 Теорема Арцела

Пусть G — связное ограниченное множество из $\mathbb{R}^d$. Напомним, что через $C(\overline{G})$ обозначаем банахово пространство всех непрерывных на $\overline{G}$ функций $x = x(t)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$, с нормой

$$\|x\|_{C(\overline{G})} = \sup_{t \in G} |x(t)|.$$

Из курса математического анализа известно, что функции $x \in C(\overline{G})$ равномерно непрерывны на G, то есть

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \qquad |x(t') - x(t'')| \le \epsilon \quad \forall t', t'' \in G, \ \ |t' - t''| \le \delta.$$

Сходимость $x_n \to x$ в $C(\overline{G})$ означает, что

$$\|x_n - x\|_{C(\overline{G})} \equiv \max_{t \in \overline{G}} \|x_n(t) - x(t)\| \to 0$$

или

$$x_n(t) \to x(t) \text{ равномерно по } t \in G.$$

О п р е д е л е н и е. Функции множества $K \subset C(\overline{G})$ называются *равностепенно непрерывными,* если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|x(t') - x(t'')| \le \epsilon \quad \forall t', t'' \in G, \quad |t' - t''| \le \delta, \quad \forall x \in K. \tag{4.1}$$

Подчеркнем, что в определении равностепенной непрерывности число δ одно для всех $x \in K$.

Упражнение 4.1. Доказать, что если множество $K \subset C(\overline{G})$ состоит из конечного числа функций, то они равностепенно непрерывны.

Т е о р е м а 4.1 (Арцела). *Пусть G — связное ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$. Множество $K \subset C(\overline{G})$ является компактом в $C(\overline{G})$, если и только если*

(а) множество K ограничено в $C(\overline{G})$;

(б) функции из K равностепенно непрерывны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K компакт в $C(\overline{G})$. Тогда K ограничено в $C(\overline{G})$ (согласно теореме 1.1 любой предкомпакт ограничен). Осталось доказать условие (б). Возьмем любое $\epsilon > 0$. По теореме Хаусдорфа 2.1 существует конечная ϵ-сеть K_ϵ множества K. Так как множество K_ϵ конечно, то функции из K_ϵ равностепенно непрерывны (упр. 4.1). Значит, существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|x_\epsilon(t') - x_\epsilon(t'')| \le \epsilon \quad \forall t', t'' \in G, \quad |t' - t''| \le \delta, \ \forall x_\epsilon \in K_\epsilon. \tag{4.2}$$

Возьмем любую функцию $x \in K$. Так как K_ϵ — ϵ-сеть множества K, то существует функция $x_\epsilon \in K_\epsilon$ такая, что

$$\|x_\epsilon - x\|_{C(\overline{G})} \le \epsilon \implies |x_\epsilon(t) - x(t)| \le \epsilon \quad \forall t \in G. \tag{4.3}$$

Пусть $t', t'' \in G$, $|t' - t''| \le \delta$. Используя (4.2), (4.3), получаем

$$\begin{aligned}|x(t') - x(t'')| &= |(x(t') - x_\epsilon(t')) + (x_\epsilon(t') - x_\epsilon(t'')) + (x_\epsilon(t'') - x(t''))| \le \\ &\le |x(t') - x_\epsilon(t')| + |x_\epsilon(t') - x_\epsilon(t'')| + |x_\epsilon(t'') - x(t'')| \le 3\epsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|x(t') - x(t'')| \le 3\epsilon \quad \forall t', t'' \in G, \ |t' - t''| \le \delta, \ \forall x \in K.$$

Условие (б) выполнено.

Пусть условия (а), (б) выполнены. Нужно доказать, что множество K — компакт. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность из K. Докажем, что она содержит сходящуюся подпоследовательность.

Возьмем любое $\epsilon > 0$. Согласно условию (б) существует $\delta > 0$ такое, что выполняется (4.1). Множество $\overline{G}$ ограничено в $\mathbb{R}^d$, значит, оно компактно и по теореме Хаусдорфа имеет конечную δ-сеть G_δ. Числовая последовательность $\{x_n(t)\}$ ограничена в любой точке $t \in G_\delta$ (т.к., функции $x_n \in K$ ограничены). Так как множество точек $t \in G_\delta$ конечно, то можно извлечь подпоследовательность

$$\{x_{n'}\} \subset \{x_n(t)\}, \ \ x_{n'}(t) \text{ сходится } \forall t \in G_\delta$$

(из $\{x_n\}$ извлекаем подпоследовательность сходящуюся в 1-й точке множества G_δ, из нее извлекаем подпоследовательность сходящуюся во 2-й точке и т. д.)

Числовая последовательность $\{x_{n'}(t)\}$ фундаментальна для всех $t \in G_\delta$. Множество точек $t \in G_\delta$ конечно, значит, существует номер N такой, что

$$|x_{n'}(t_\delta) - x_{m'}(t_\delta)| \le \epsilon, \quad \forall n', m' \ge N, \ \forall t_\delta \in G_\delta \quad \text{(проверить!)} \tag{4.4}$$

Возьмем любую точку $t \in G$. Тогда существует $t_\delta \in G_\delta$ такая, что $|t - t_\delta| \le \delta$. Следовательно, при $n, m > N$

$$\begin{aligned}&|x_{n'}(t) - x_{m'}(t)| = \\ &\quad = |(x_{n'}(t) - x_{n'}(t_\delta)) + (x_{n'}(t_\delta) - x_{m'}(t_\delta)) + (x_{m'}(t_\delta) - x_{m'}(t))| \le \\ &\quad \le |x_{n'}(t) - x_{n'}(t_\delta)| + |x_{n'}(t_\delta) - x_{m'}(t_\delta)| + |x_{m'}(t_\delta) - x_{m'}(t)|.\end{aligned}$$

1-е и 3-е слагаемые в правой части полученного неравенства меньше ϵ в силу (4.1), 2-е слагаемое меньше ϵ в силу (4.4). Так как неравенство справедливо для любых $t \in G$, $n', m' > N$, то доказали, что для любого $\epsilon > 0$ существует номер N такой, что

$$\|x_{n'} - x_{m'}\|_{C(\overline{G})} = \sup_{t \in G} |x_{n'}(t) - x_{m'}(t)| \le 3\epsilon \quad \forall n', m' \ge N.$$

Следовательно,

$$\|x_{n'} - x_{m'}\|_{C(\overline{G})} \to 0 \text{ при } n', m' \to \infty,$$

подпоследовательность $\{x_{n'}\}$ фундаментальна в $C(\overline{G})$. Так как пространство $C(\overline{G})$ банахово, то $\{x_{n'}\}$ сходится. Следовательно, множество K компактно. Теорема доказана.

Будем использовать пространств Гельдера $C^n[a,b]$, $C^n_\alpha[a,b]$, которые определены в § 7 гл. I.

Упражнения. Доказать компактность множеств

4.2 $\Big\{x(t) \in C[a,b] : \|x(t)\|_{C_\alpha[a,b]} \le C\Big\}$ в $C[a,b]$.

Р е ш е н и е. Пусть $K = \{x(t) \in C[a,b] : \ \|x(t)\|_{C_\alpha[a,b]} \le C\}$. Тогда по определению нормы $\|x(t)\|_{C_\alpha[a,b]}$ множество K ограничено в $C[a,b]$. Более того

$$\frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \le C \quad \forall t_1 \ne t_2, \ \ x \in K.$$

Следовательно,

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le C|t_1 - t_2|^\alpha \quad \forall t_1, t_2 \in [a,b], \ \ x \in K.$$

Так как C не зависит от x, t_1 и t_2, то из последней формулы вытекает равностепенная непрерывность функций из K. Значит, K компакт по теореме Арцела.

4.3 $\Big\{x(t) \in C[a,b] : \ |x(t)| \le C_1, |x'(t)| \le C_2 \ \forall t \in (a,b)\Big\}$ в $C[a,b]$ (при доказательстве равностепенной непрерывности применять формулу Лагранжа).

4.4 $\Big\{x(t) \in C_\alpha[a,b] : \ \|x\|_{C_\beta[a,b]} \le C\Big\}$ в $C_\alpha[a,b]$ при $0 < \alpha < \beta \le 1$ (получить оценку

$$\|x\|_{C_\alpha[a,b]} \le 2^{1-\alpha/\beta} \|x\|^{\alpha/\beta}_{C_\beta[a,b]} \|x\|^{1-\alpha/\beta}_{C[a,b]} + \|x\|_{C[a,b]}$$

и воспользоваться упражнением 4.2).

4.5 $\Big\{x(t) \in C[a,b] : \quad x(a) = A, \quad |x'(t)| \le C \quad \forall t \in (a,b)\Big\}$ в $C[a,b]$.

4.6 $\Big\{x(t) \in C[a,b] : \quad \int_a^b x(t)\,dt = I, \quad |x'(t)| \le C_2 \quad \forall t \in (a,b)\Big\}$ в $C[a,b]$.

4.7 $\Big\{x(t) \in C^1[a,b] : \quad |x(t)| \le C_1, \quad |x'(t)| \le C_2, \quad |x''(t)| \le C_3 \quad \forall t \in (a,b)\Big\}$ в $C^1[a,b]$.

§ 5 Компактные вложения

Пусть X, Y — нормированные пространства. Напомним, что вложение $X \subset Y$ называется непрерывным, если

$$\|x\|_Y \le C\|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

постоянная C не зависит от x.

Упражнение 5.1. Докажите эквивалентность утверждений:
(а) X непрерывно вложено в Y;
(б) любое ограниченное в X множество является ограниченным в Y.

О п р е д е л е н и е. Вложение $X \subset Y$ называется *компактным*, если любое ограниченное в X множество является компактным в Y.

Т е о р е м а 5.1.

(а) Если вложение $X \subset Y$ компактно, то оно непрерывно.

(б) Если одно из вложений $X \subset Y \subset Z$ непрерывно, а другое компактно, то вложение $X \subset Z$ компактно.

Докажем утверждение (а). Пусть $B_1 = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$. Тогда B_1 компактное в Y множество. Значит оно ограничено в Y. Значит существует $C > 0$: $\|x\|_Y \le C$ $\forall x \in B_1$. Пусть $x \in X$, $x \ne 0$. Тогда $x/\|x\|_X \in B_1$ и поэтому

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y \le C \implies \|x\|_Y \le C\|x\|_X \ \ \forall x \in X,$$

что и означает непрерывность вложения $X \subset Y$.

Упражнение 5.2. Доказать утверждение (б) теоремы 5.1

Следствие 5.1. *Вложения*

$$C^1[a,b] \subset C_\beta[a,b] \subset C_\alpha[a,b] \subset C[a,b], \quad C_\alpha[a,b] \subset L^p(a,b)$$

компактны при $p \in [1,\infty)$, $1 > \beta > \alpha > 0$.

Доказательство. Непрерывность вложений доказана в § 7 гл. I. Из упражнений 4.2, 4.4 вытекает компактность вложений

$$C_\beta[a,b] \subset C_\alpha[a,b] \subset C[a,b].$$

Пусть $1 > \gamma > \beta$. Тогда вложение $C^1[a,b] \subset C_\gamma[a,b]$ непрерывно, $C_\gamma[a,b] \subset C_\beta[a,b]$ компактно, значит, $C^1[a,b] \subset C_\beta[a,b]$ компактно (теорема 5.1 (б)).

Вложение $C_\alpha[a,b] \subset C[a,b]$ компактно, $C[a,b] \subset L^p(a,b)$ непрерывно. Следовательно, $C_\alpha[a,b] \subset L^p(a,b)$ компактно. Следствие доказано.

Упражнение 5.3. Доказать компактность $C^{n+1}[a,b] \subset C^n[a,b]$.

В заключение отметим, что вложение

$$C^n_\beta[a,b] \subset C^m_\alpha[a,b]$$

компактно при при $n + \beta > m + \alpha$.

§ 6 Линейные компактные операторы

Определение. Оператор $A : D_A \subset X \to Y$ называется *компактным,* если он любое ограниченное множество из X переводит в предкомпактное в Y множество, то есть

если $M \subset X$ ограничено, то $A(M)$ предкомпактно в Y.

Любое предкомпактное множество ограничено. Значит, справедлива

Лемма 6.1. *Любой компактный оператор ограничен. Любой линейный компактный оператор непрерывен.*

Отметим, что для нелинейных операторов из компактности не вытекает непрерывность (приведите пример!).

Из непрерывности оператора не вытекает компактность. Пример содержится в следующей лемме.

Лемма 6.2. *Единичный оператор $E : X \to X$ компактен, если и только если X конечномерно.*

Доказательство. Если X конечномерно, то любое ограниченное множество M является компактом в X. Так как $E(M) = M$, то E компактен. Пусть E компактен, B — шар в X. Тогда множество $E(B) = B$ предкомпактно. Значит, X конечномерное (теорема 2.1).

Теорема 6.1. *Пусть оператор $A : D_A \subset X \to Y$ линеен. Тогда, если множество*

$$A(B_1) = \{Ax : \|x\| \le 1, \ x \in D_A\}$$

предкомпактно в Y, то A компактен.

Доказательство. Пусть M ограниченное множество из X. Нужно доказать, что $A(M)$ — предкомпакт в Y. Так как M ограничено, то существует $R > 0$ такое, что

$$\|x\| \le R \quad \forall x \in M.$$

Положим $M_R = \{x/R : x \in M\}$. Тогда $M_R \subset B_1 \Rightarrow A(M_R) \subset A(B_1)$ $\Rightarrow A(M_R)$ предкомпакт. Тогда множество $A(M)$ также предкомпакт (упражнение 1.5). Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Если X или Y конечномерно, то любой линейный непрерывный оператор $A : D_A \subset X \to Y$ является компактным.*

Доказательство. Пусть X — конечномерное. Тогда любое ограниченное множество $M \subset X$ компактно (упр 1.3). Так как A непрерывен, то $A(M)$ также предкомпактно (упр. 1.3). Значит, A компактен.

Пусть Y — конечномерное. M — ограниченное множество из X. Тогда $A(M)$ ограничено и, следовательно, предкомпактно в Y (т.к. Y конечномерно). Значит, A компактен. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Оператор $A : D_A \subset X \to Y$ называется *усиленно непрерывным,* если $A(x_n) \to A(x)$ в Y при $x_n \to x$ слабо в X.

Упражнения. Доказать, что

6.1 произведение линейного непрерывного и линейного компактного операторов является компактным оператором.

6.2 если линейный оператор $A : D_A \subset X \to Y$ компактен, то он усиленно непрерывен (использовать лемму 6.1, упр. 1.6 и результаты § 5 гл. III);

6.3 если X рефлексивно, то любой усиленно непрерывный оператор $A : D_A \subset X \to Y$ (не обязательно линейный) компактен;

Т е о р е м а 6.3 (Шаудер). *Пусть Y — банахово пространство. Тогда оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ компактен, если и только если сопряженный оператор $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ компактен.*

Доказательство приведено в [12, с. 215].

§ 7 Примеры компактных операторов

Дифференциальные операторы

Пусть $a_i(t) \in C[a,b]$. Введем дифференциальный оператор

$$Ax(t) = a_0(t) + a_1(t)x'(t) + \ldots + a_n(t)x^{(n)}(t) \quad t \in [a,b]. \tag{7.1}$$

В § 4 гл. II доказано, что оператор $A \in \mathcal{L}\left(C^n[a,b], C[a,b]\right)$. Этот же оператор можно рассмотреть как действующий из $C^{n+1}[a,b]$ в $C^0[a,b]$. В этом случае он будет не только непрерывным, но и компактным.

Т е о р е м а 7.1. *Если $a_i(t) \in C[a,b]$, то оператор $A : C^{n+1}[a,b] \to C[a,b]$, действующий по формуле (7.1), компактен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $M \subset C^{n+1}[a,b]$ ограничено. Вложение $C^{n+1}[a,b] \subset C^n[a,b]$ компактно (упр. 5.3). Значит, M компактно в $C^n[a,b]$. Так как $A : C^n[a,b] \to C[a,b]$ непрерывен, то $A(M)$ компактно в $C[a,b]$ (упр. 1.3). Теорема доказана.

Аналогичный результат справедлив и для дифференциальных операторов, определенных на функциях многих переменных.

Интегральный оператор Фредгольма

Пусть $k(t,s) \in C\left([a,b] \times [a,b]\right)$. Рассмотрим интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b]. \tag{7.2}$$

В § 4 гл. II доказано, что $A \in \mathcal{L}\left(C[a,b]\right)$, $A \in \mathcal{L}\left(L^2(a,b)\right)$. На самом деле, этот оператор не только непрерывный, но и компактный. Напомним, что $L^1(a,b)$ — банахово пространство с нормой

$$\|x\|_{L^1(a,b)} = \int_a^b |x(t)|\,dt.$$

Т е о р е м а 7.2. *Если $k(t,s) \in C\left([a,b] \times [a,b]\right)$, то оператор $A : L^1[a,b] \to C[a,b]$, определяемый формулой (7.2), компактен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из курса математического анализа известно, что если $x \in L^1(a,b)$, то $Ax \in C[a,b]$. Пусть

$$B_1 = \left\{ x \in L^1(a,b) : \int_a^b |x(t)|\,dt \le 1 \right\}.$$

Оператор A компактен, если $A(B_1)$ компакт в $C[a,b]$ (теорема 6.1). Согласно теореме Арцелы $A(B_1)$ компакт, если множество $A(B_1)$ ограничено, функции из $A(B_1)$ равностепенно непрерывны.

Из очевидной оценки

$$|Ax(t)| \le \max_{a \le s \le b} |k(t,s)| \int_a^b |x(t)|\,dt \quad \forall t \in [a,b],$$

вытекает

$$\|Ax\|_{C[a,b]} \le \max_{t,s\in[a,b]} |k(t,s)| \quad \forall x \in B_1.$$

Значит, множество $A(B_1)$ ограничено.

Осталось доказать равностепенную непрерывность. Пусть $\epsilon > 0$. Так как функция $k(t,s)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $[a,b]\times[a,b]$, то она равномерно непрерывна на нем. Отсюда, в частности, вытекает, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$|k(t_1,s) - k(t_2,s)| \le \epsilon \quad \forall t_1,t_2,s \in [a,b],\ \ |t_1 - t_2| \le \delta. \tag{7.3}$$

Следовательно, при $t_1, t_2 \in [a,b]$, $|t_1 - t_2| \le \delta$,

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \le \int_a^b |k(t_1,s) - k(t_1,s)| \cdot |x(s)|\,ds \le \epsilon\|x\|_{L^1(a,b)},$$

$$\Longrightarrow \quad |Ax(t_1) - Ax(t_2)| \le \epsilon \quad \forall x \in B_1,\ \ t_1,t_2 \in [a,b],\ \ |t_1 - t_2| \le \delta.$$

Функции из $A(B_1)$ равностепенно непрерывны, поэтому $A(B_1)$ компакт, оператор A компактен. Теорема доказана.

Следствие 7.1. *Если $k(t,s) \in C\big([a,b]\times[a,b]\big)$, то оператор $A : C[a,b] \to C[a,b]$, определяемый формулой (7.2), компактен.*

Доказательство. Пусть M — ограниченное в $C[a,b]$ множество. Вложение $C[a,b] \subset L^1(a,b)$ непрерывно. Значит, M ограничено в $L^1(a,b)$ и по теореме 7.2 множество $A(M)$ компактно в $C[a,b]$. Следовательно, оператор $A : C[a,b] \to C[a,b]$ компактен.

Следствие 7.2. *Если $k(t,s) \in C([a,b]\times[a,b])$, то оператор $A : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$, определяемый формулой (7.2), компактен.*

Упражнение 7.1. Доказать следствие 7.2.

Замечание. Интегральный оператор, определенный на функциях многих переменных (формула (4.7) гл. II) компактен при аналогичных условиях.

Глава V
Линейные уравнения

Цель этой главы — это исследование линейных уравнений вида:

$$Ax = y \tag{1}$$

Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Простейший анализ связи между оператором A и решениями (1) был проведен в § 6 гл. II. В частности,

1. уравнение (1) имеет решение $x \in X$ для любого $y \in Y \iff \operatorname{Im} A = Y$ (это вытекает из определения $\operatorname{Im} A$);
2. уравнение (1) имеет не более одного решения $\iff \operatorname{Ker} A = \{0\}$, т. е. $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение;
3. если решение (1) удовлетворяет априорной оценке: $\|x\| \le C\|y\|$ (C не зависит от x и y), то, задача (1) имеет не более одного решения; если решение существует, то оно устойчиво;
4. если пространства X, Y банаховы, $\operatorname{Im} A = X$, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то задача (1) корректно поставлена.

К настоящему времени, наиболее полно разработана теория линейных уравнений вида:

$$Ax = y, \qquad x - Ax = y \tag{2}$$

с компактным оператором A. Они называются *уравнениями 1-го и 2-го рода* соответственно. Их исследование начато в работах Фредгольма, который рассматривал интегральные уравнения вида:

$$\int_a^b k(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad x(t) - \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds = y(t). \tag{3}$$

Уравнения (3) называют *интегральными уравнениями Фредгольма 1-го и 2-го рода.* Фредгольм доказал ряд теорем, которые дают исчерпывающее описание условий разрешимости интегрального уравнения 2-го рода. Сейчас эти результаты называют теоремами Фредгольма. Впоследствии, в работах ряда математиков, главным образом Рисса и Шаудера, теоремы Фредгольма были обобщены на случай (2).

§ 1 Связь между $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Ker} A^*$

Определение. $x \in X$ и $x^* \in X^*$ *ортогональны,* если $\langle x^*, x\rangle = 0$.

Определим ортогональные дополнения к $M \subset Y$ и $N^* \subset Y^*$:

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{y^* \in Y^* : y_* \perp M, \text{ то есть } \langle y^*, y\rangle = 0 \ \ \forall y \in M\}, \\ {}^\perp N^* &= \{y \in Y \ \ : y \perp N^*, \text{ то есть } \langle y^*, y\rangle = 0 \ \ \forall y^* \in N^*\}. \end{aligned}$$

Ранее было доказано (следствие 2.4 гл. III), что линейное многообразие $M \subset Y$ плотно в Y, если и только если $M^\perp = \{0\}$.

Упражнение 1.1. Доказать, что $M^\perp$ и ${}^\perp N^*$ линейные подпространства.

Теорема 1.1. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Тогда*

$$\overline{\operatorname{Im} A} = {}^\perp\operatorname{Ker} A^*. \tag{1.1}$$

Доказательство. Так как $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, то $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

Докажем сначала, что $\operatorname{Im} A \subset {}^\perp\operatorname{Ker} A^*$. Пусть $y \in \operatorname{Im} A$, тогда существует $x \in X$, $Ax = y$. Следовательно,

$$\langle y^*, y\rangle = \langle y^*, Ax\rangle = \langle A^*y^*, x\rangle = 0 \quad \forall y^* \in \operatorname{Ker} A^*.$$

Это и означает $y \in {}^\perp\operatorname{Ker} A^*$. Вложение $\operatorname{Im} A \subset {}^\perp\operatorname{Ker} A^*$ доказано.

${}^\perp\operatorname{Ker} A^*$ — линейное подпространство (упражнение 1.1). Значит ${}^\perp\operatorname{Ker} A^*$ замкнуто. Следовательно, из вложения $\operatorname{Im} A \subset {}^\perp\operatorname{Ker} A^*$, вытекает $\overline{\operatorname{Im} A} \subset {}^\perp\operatorname{Ker} A^*$.

Осталось доказать обратное вложение: ${}^\perp\operatorname{Ker} A^* \subset \overline{\operatorname{Im} A}$. Предположим противное: существует элемент

$$y_0 \in {}^\perp\operatorname{Ker} A^*, \ \ y_0 \notin \overline{\operatorname{Im} A}.$$

$\overline{\operatorname{Im} A}$ — линейное подпространство Y, поэтому, согласно следствию 2.3 гл. III, существует функционал

$$y^* \in Y^*, \quad \langle y^*, y\rangle = 0 \ \ \forall y \in \overline{\operatorname{Im} A}, \quad \langle y^*, y_0\rangle = 1.$$

С другой стороны,

$$\langle y^*, y\rangle = 0 \ \ \forall y \in \overline{\operatorname{Im} A} \implies \langle y^*, Ax\rangle = 0 \implies \langle A^*y^*, x\rangle = 0 \ \ \forall x \in X.$$

Последнее означает $y^* \in \operatorname{Ker} A^*$. Противоречие с условиями

$$y_0 \in {}^\perp\operatorname{Ker} A^*, \ \ \langle y^*, y_0\rangle = 1.$$

Значит ${}^\perp\operatorname{Ker} A^* \subset \overline{\operatorname{Im} A}$. Теорема доказана.

Замечание. Вложение $\operatorname{Im} A \subset {}^\perp\operatorname{Ker} A^*$ означает, что необходимым условием разрешимости уравнения $Ax = y$ является ортогональность y всем решениям однородного сопряженного уравнения $A^*y^* = 0$. В § 2 мы введем класс операторов, для которых это условие будет не только необходимым, но и достаточным.

Из определения ортогональных дополнений также вытекает

Теорема 1.2. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Тогда*

$$(\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^*. \tag{1.2}$$

Упражнение 1.2. Доказать теорему 1.2.

§ 2 Нормально разрешимые операторы

О п р е д е л е н и е. Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ называется *нормально разрешимым,* если $\operatorname{Im} A = {}^{\perp}\operatorname{Ker} A^*$.

Из теоремы 1.1 вытекает

Э к в и в а л е н т н о е о п р е д е л е н и е. $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ называется *нормально разрешимым,* если его образ замкнут, то есть $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$.

Рассмотрим уравнения

$$Ax = y \tag{2.1}$$

$$A^* y^* = 0 \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Если $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ нормально разрешимый, то*

(а) уравнение (2.1) имеет решение $x \in X$ для любой правой части $y \in Y$, если и только если сопряженное однородное уравнение (2.2) имеет только тривиальное решение $y^* = 0$;

(б) уравнение (2.1) имеет решение $x \in X$ если и только если его правая часть $y \in Y$ ортогональна всем решениям однородного сопряженного уравнения (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $\operatorname{Im} A = {}^{\perp}\operatorname{Ker} A^*$.

(а). Пусть уравнение (2.1) имеет решение $x \in X$ для любого $y \in Y$. Это эквивалентно $\operatorname{Im} A = Y \iff {}^{\perp}\operatorname{Ker} A^* = Y$. Последнее означает, что любой функционал из $\operatorname{Ker} A^*$ ортогонален Y. Это возможно только в случае $\operatorname{Ker} A^* = \{0\}$, то есть уравнение (2.2) имеет только тривиальное решение. Утверждение (а) доказано.

(б). Пусть (2.1) имеет решение $x \in X$. Это эквивалентно

$$y \in \operatorname{Im} A = {}^{\perp}\operatorname{Ker} A^*.$$

Значит $y \in {}^{\perp}\operatorname{Ker} A^*$, то есть y ортогонален всем решениям уравнения (2.2). Утверждение (б) доказано. Теорема доказана.

В § 4 мы докажем нормальную разрешимость операторов вида $A + B$, A — непрерывно обратимый, B — компактный. В этом параграфе ограничимся следующим результатом.

Теорема 2.2. *Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда, если существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что*

$$\gamma \|x\| \le \|Ax\| \quad \forall x \in X, \tag{2.3}$$

то оператор A нормально разрешимый.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно доказать, что $\operatorname{Im} A$ замкнутое множество, то есть содержит все свои предельные точки. Пусть $y_n \in \operatorname{Im} A$, $y_n \to y$. Нужно доказать, что $y \in \operatorname{Im} A$. Так как $y_n \in \operatorname{Im} A$, то $y_n = Ax_n$, $x_n \in X$. Тогда $A(x_n - x_m) = y_n - y_m$ Используя (2.3) получаем

$$\gamma\|x_n - x_m\| \le \|A(x_n - x_m)\| = \|y_n - y_m\| \to 0 \text{ при } n,m \to \infty.$$

Значит последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Так как X банахово, то $x_n \to x \in X$. Переходя к пределу в уравнении $Ax_n = y_n$ получаем $Ax = y$. Значит $y \in \operatorname{Im} A$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я.

1 Пусть решения уравнения (2.1) удовлетворяют оценке

$$\|x\| \le C\|y\| \quad (C \text{ не зависит от } x, y). \tag{2.4}$$

Она называется априорной оценкой решения. Из (2.4) вытекает единственность и устойчивость решения (§ 6 гл. II). Согласно теореме 2.2, из априорной оценки вытекает нормальная разрешимость A (заменяя в (2.4) y на Ax получаем (2.3)).

2 Из оценки (2.3) вытекает также $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, оператор A^{-1} существует и непрерывен (теорема 5.2 гл. II).

§ 3 Уравнение с коэрцитивным оператором

Определение. Оператор $A : X \to X^*$ называется *коэрцитивным,*

$$\text{если} \qquad \frac{\langle A(x_n), x_n \rangle}{\|x_n\|} \to +\infty \quad \text{при } \|x_n\| \to \infty.$$

Упражнение 3.1. Доказать, что линейный оператор $A : X \to X^*$ коэрцитивен, если и только если существует постоянная $\gamma > 0$:

$$\langle Ax, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in X. \tag{3.1}$$

Для нелинейного оператора из коэрцивности оценка (3.1) не вытекает.

Теорема 3.1. *Пусть X — рефлексивное пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(X, X^*)$ коэрцитивен. Тогда для любого $f \in X^*$ существует единственное решение $x \in X$ уравнения*

$$Ax = f. \tag{3.2}$$

Доказательство. Так как A линейный и коэрцитивный, то выполняется (3.1). Из него вытекает $\gamma\|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \|Ax\| \cdot \|x\|$,

$$\gamma\|x\| \leq \|Ax\| \quad \forall x \in X. \tag{3.3}$$

Значит оператор A нормально разрешим (теорема 2.2). Из (3.3) вытекает единственность решения (если (3.2) имеет два решения x_1, x_2, то $A(x_1 - x_2) = 0$, $\gamma\|x_1 - x_2\| \leq 0$, $x_1 = x_2$).

Осталось доказать существование решения. В силу теоремы 2.1 (а), для этого достаточно, чтобы уравнение

$$A^* x_0 = 0$$

имело только тривиальное решение. X рефлексивно, значит $X^{**} = X$, $A^* \in \mathcal{L}(X, X^*)$. Используя неравенство (3.1), получаем

$$0 = \langle A^* x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, Ax_0 \rangle \geq \gamma \|x_0\|^2,$$

следовательно, $x_0 = 0$. Теорема доказана.

Определение. Отображение $a : X \times X \to \mathbb{R}$, которое каждой паре элементов $x \in X$, $y \in X$ ставит в соответствие число $a(x, y) \in \mathbb{R}$, называется *билинейной формой,* если для $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} a(\lambda x + \mu y, z) &= \lambda \cdot a(x, z) + \mu \cdot a(y, z), \\ a(x, \lambda y + \mu z) &= \lambda \cdot a(x, y) + \mu \cdot a(x, y). \end{aligned}$$

Определение. Билинейная форма $a : X \times X \to \mathbb{R}$ называется
— *непрерывной,* если $a(x_n, y_n) \to a(x, y)$ при $x_n \to x$, $y_n \to y$;
— *коэрцитивной,* если существует $\gamma > 0$: $a(x, x) \geq \gamma \|x\|^2$ $\forall x \in X$.

Упражнение 3.2. Доказать, что билинейная форма непрерывна, если и только если существует $C > 0$: $|a(x, y)| \leq C \|x\| \cdot \|y\|$ $\forall x, y \in X$.

Теорема 3.2 (Лакс-Мильграмм). *Пусть X — рефлексивное пространство, билинейная форма $a : X \times X \to \mathbb{R}$ непрерывна и коэрцитивна. Тогда для любого $f \in X^*$ существует единственное решение $x \in X$ уравнения*

$$a(x, y) = \langle f, y \rangle \quad \forall y \in X.$$

Для доказательства достаточно определить оператор A, который каждому $x \in X$ ставит в соответствие функционал $A(x) : X \to \mathbb{R}$:

$$\langle A(x), y \rangle = a(x, y) \quad \forall y \in X$$

и воспользоваться теоремой 3.1.

Упражнение 3.3. Доказать теорему 3.2.

§ 4 Нормальная разрешимость $(E - A)$, $A \in \sigma(X)$

Мы докажем, что оператор $E - A$ нормально разрешим, если $A \in \sigma(X)$, $E : X \to X$ — единичный оператор, $\sigma(X)$ — множество линейных компактных операторов, действующих из X в X.

Лемма 4.1. *Пусть X — банахово пространство, $A \in \sigma(X)$. Тогда, если $\{x_n\} \subset X$, $x_n - Ax_n \to y$, последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то $y \in \mathrm{Im}\,(E-A)$, причем существует подпоследовательность $x_{n'} \to x$, $x - Ax = y$.*

Доказательство. Положим $y_n = x_n - Ax_n \to y$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то $\{Ax_n\}$ компактна. Значит существует сходящаяся подпоследовательность $\{Ax_{n'}\}$ (так как A компактен, X банахово). Тогда и последовательность $x_{n'} = Ax_{n'} + y_{n'}$ сходится. Переходя к пределу в $x_{n'} - Ax_{n'} = y_{n'}$, получаем $x - Ax = y$. Значит $y \in \mathrm{Im}\,(E-A)$. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть X — банахово пространство, $A \in \sigma(X)$. Тогда оператор $E - A$ нормально разрешим.*

Доказательство. Нужно доказать, что $\mathrm{Im}\,(E-A)$ замкнут. Пусть $y_n \in \mathrm{Im}\,(E-A)$, $y_n \to y$. Надо доказать, что $y \in \mathrm{Im}\,(E-A)$. Так как $y_n \in \mathrm{Im}\,(E-A)$, то существуют $x_n \in X$, $x_n - Ax_n = y_n$.

Если $\{x_n\}$ ограничена, то $y \in \mathrm{Im}\,(E-A)$ по лемме 4.1.

Пусть $\{x_n\}$ не ограничена. Положим

$$\mathrm{Ker}\,(E-A) = \{x \in X : x - Ax = 0\}, \quad d_n = \inf_{x \in \mathrm{Ker}\,(E-A)} \|x - x_n\|.$$

По определению inf, существует последовательность

$$z_n \in \mathrm{Ker}\,(E-A), \quad d_n \le \|z_n - x_n\| \le d_n(1 + 1/n). \tag{4.1}$$

Так как $z_n - Az_n = 0$, то

$$(x_n - z_n) - A(x_n - z_n) = y_n.$$

Если последовательность чисел d_n ограничена, то последовательность $(x_n - z_n)$ также ограничена. Применяя лемму 4.1, в которой x_n заменяем на $(x_n - z_n)$, получаем $y \in \mathrm{Im}\,A$.

Осталось доказать, что d_n ограничена. Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность, которую для краткости снова обозначим d_n, такая, что

$$d_n \to +\infty \implies \|x_n - z_n\| \to \infty.$$

Положим $u_n = \dfrac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}$. Тогда $\|u_n\| = 1$.

Так как $\{y_n\}$ сходится, то она ограничена, значит

$$u_n - Au_n = \frac{y_n}{\|x_n - z_n\|} \to 0. \tag{4.2}$$

Значит можно применить лемму 4.1, в которой x_n заменяем на u_n. Существует подпоследовательность $u_{n'} \to u \in X$, причем в силу (4.2),

$$u - Au = 0 \implies u \in \mathrm{Ker}\,(E-A).$$

Положим

$$w_{n'} = z_{n'} + u\|x_{n'} - z_{n'}\| \in \mathrm{Ker}\,(E-A), \text{ так как } z_{n'}, u \in \mathrm{Ker}\,(E-A).$$

Из определения $u_{n'}$ вытекает

$$x_{n'} - w_{n'} = (u_{n'} - u)\|x_{n'} - z_{n'}\|. \tag{4.3}$$

Из определения d_n вытекает $d_{n'} \le \|x_{n'} - w_{n'}\|$, так как $w_{n'} \in \mathrm{Ker}\,(E-A)$. Согласно (4.1) $\|x_{n'} - z_{n'}\| \le d_{n'}(1 + 1/n')$. Используя эти неравенства и (4.3), получаем

$$d_{n'} \le \|x_{n'} - w_{n'}\| = \|u_{n'} - u\| \cdot \|x_{n'} - z_{n'}\| \le \|u_{n'} - u\| d_{n'}(1 + 1/n'),$$
$$\implies \quad \|u_{n'} - u\| \ge \frac{1}{1 + 1/n'} \to 1 \text{ при } n' \to \infty.$$

Противоречие с условием $\|u_{n'} - u\| \to 0$. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть X — банахово пространство, $A \in \sigma(X)$. Тогда оператор $E - A^*$ нормально разрешим.*

Доказательство. Так как $A \in \sigma(X)$, то $A^* \in \sigma(X^*)$ (теорема 6.3 гл. IV). Значит можно применить теорему 4.1.

Следствие 4.2. *Пусть Y — банахово пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ непрерывно обратим, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ компактен. Тогда операторы $A+B$ и A^*+B^* нормально разрешимые.*

Упражнение 4.1. Доказать следствие 4.2 (подсказка: доказать равенство $\mathrm{Im}\,(A+B) = \mathrm{Im}\,(E+BA^{-1})$ и применить теорему 4.1).

§ 5 Теоремы Фредгольма

Приведенные ниже результаты являются упрощенным содержанием теории Рисса-Шаудера линейных операторов. Рассмотрим уравнения:

$$x - Ax = y \tag{5.1}$$

$$x - Ax = 0 \tag{5.2}$$

$$x^* - A^*x^* = y^* \tag{5.3}$$

$$x^* - A^*x^* = 0 \tag{5.4}$$

Лемма 5.1. *Пусть X — банахово пространство, $A \in \sigma(X)$. Тогда, если $\mathrm{Im}\,(E-A) = X$, то $\mathrm{Ker}\,(E-A) = \{0\}$.*

Доказательство. Предположим противное: $\mathrm{Ker}\,(E-A) \neq \{0\}$. Положим

$$B = E - A, \quad N_k = \mathrm{Ker}\, B^k \equiv \{x \in X : (E-A)^k x = 0\} \quad k = 1,2,3,\ldots$$

N_k — линейные подпространства X (так как $B^k \in \mathcal{L}(X)$). Нетрудно доказать вложения

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots \subset N_k \subset \ldots$$

Действительно, если $x \in N_k = \mathrm{Ker}\, B^k$, то

$$B^k x = 0 \;\Rightarrow\; B^{k+1}x = B\left(B^k x\right) = 0.$$

Более того, $N_k \neq N_{k+1}$ $\forall k$. Действительно, пусть $x_1 \in N_1$, $x_1 \neq 0$. По условию леммы существует решение $x_2 \in X$ уравнения

$$Bx_2 = x_1.$$

Тогда $B^2x_2 = Bx_1 = 0$, так как $x_1 \in \mathrm{Ker}\, B$. Следовательно, $x_2 \in N_2$. Однако, $x_2 \notin N_1$, так как, если $x_2 \in N_1$, то $x_1 = Bx_2 = 0$. Значит $N_1 \neq N_2$. Аналогично выбирая x_3 как решение уравнения

$$Bx_3 = x_2$$

получаем $x_3 \in N_3$. Однако, если $x_3 \in N_2$, то $0 = B^2x_3 = Bx_2$, следовательно, $x_2 \in N_1$, что невозможно и т. д.

По лемме 2.1 гл. IV, в которой полагаем $X = N_k$, $L = N_{k-1}$, $\epsilon = 1/2$ (лемму можно применить, так как N_{k-1} — линейное подпространство N_k, $N_{k-1} \neq N_k$) существует последовательность

$$y_k \in N_k, \;\; \|y_k\| = 1, \;\; \|x - y_k\| \geq 1/2 \;\; \forall x \in N_{k-1}.$$

Последовательность $\{y_k\}$ ограничена. Значит $\{Ay_k\}$ компактна. Докажем, что это невозможно.

$$Ay_n - Ay_k = y_n - (y_n - Ay_n) - y_k + (y_k - Ay_k) = y_n - By_n - y_k + By_k,$$
$$\|Ay_n - Ay_k\| = \|x - y_k\|, \quad x = y_n - By_n + By_k.$$

Пусть, для определенности, $k > n$. Тогда

$$y_n \in N_n \subset N_{k-1}, \;\; By_n \in N_{n-1} \subset N_{k-1}, \;\; By_k \in N_{k-1},$$

Значит $x \in N_{k-1}$. Из выбора y_k вытекает $\|x - y_k\| \geq 1/2$,

$$\Longrightarrow \qquad \|Ay_n - Ay_k\| \geq 1/2.$$

Значит последовательность $\{Ay_k\}$ и никакая ее подпоследовательность не могут быть фундаментальными. Противоречие. Лемма доказана.

Теорема 5.1 (1-я теорема Фредгольма). *Пусть X — банахово пространство, оператор $A : X \to X$ линеен и компактен. Тогда следующие утверждения эквивалентны* *(а) уравнение (5.1) имеет решение $x \in X$ для любого $y \in X$;*

(б) уравнение (5.2) имеет только тривиальное решение $x = 0$;

(в) уравнение (5.3) имеет решение $x^* \in X^*$ для любого $y^* \in X^*$;

(г) уравнение (5.4) имеет только тривиальное решение $x^* = 0$.

При выполнении любого из указанных выше условий операторы $E - A$ и $E - A^*$ непрерывно обратимы.

Замечание. Таким образом, при выполнении любого из этих условий, задачи (5.1) и (5.3) корректно поставлены.

Доказательство. Оператор $E - A$ нормально разрешимый (теорема 4.1). Тогда эквивалентность (а) и (г) вытекает из теоремы 2.2. Осталось доказать (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (г).

(а) $\Longrightarrow$ (б). Вытекает из леммы 5.1.

(б) $\Longrightarrow$ (в). Пусть выполняется условие (б). Докажем, что тогда верно (в). Положим $B = E - A$. Нужно доказать, что для $\forall y^* \in X^*$ существует решение $x^* \in X^*$ уравнения

$$B^* x^* = y^* \iff \langle B^* x^*, x \rangle = \langle y^*, x \rangle \quad \forall x \in X. \tag{5.5}$$

$\operatorname{Ker} B = \{0\}$, $D_B = X$, $\operatorname{Im} B$ замкнут. Следовательно, существует $B^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} B, X)$ (следствие 5.1 гл. II). Определим функционал x^* на пространстве $\operatorname{Im} B$ по формуле:

$$\langle x^*, y \rangle = \langle y^*, B^{-1} y \rangle \quad \forall y \in \operatorname{Im} B. \tag{5.6}$$

Очевидно, что x^* линеен и непрерывен. Воспользуемся теоремой Хана-Банаха и продолжим его линейным и непрерывным образом до функционала из X^*. Используя (5.6), в котором $y = Bx$, получаем

$$\langle B^* x^*, x \rangle = \langle x^*, Bx \rangle = \langle y^*, B^{-1}(Bx) \rangle = \langle y^*, x \rangle \quad \forall x \in X.$$

Следовательно, x^* — решение (5.5).

(в) $\Longrightarrow$ (г). Вытекает из леммы 5.1, так как A^* компактен.

Эквивалентность утверждений (а), (б), (в), (г) доказана. Пусть выполнено какое-то из них. Тогда $\operatorname{Ker}(E - A) = \{0\}$, $\operatorname{Im}(E - A) = X$. $E - A$ непрерывно обратим по теореме Банаха об обратном операторе. Оператор $E - A^*$ непрерывно обратим по аналогичным соображениям. Теорема доказана.

Из эквивалентности утверждений (а) и (б) теоремы вытекает

Альтернатива Фредгольма. *Если пространство X банахово, линейный оператор A компактен, то*

либо уравнение (5.1) имеет единственное решение $x \in X$ для $\forall y \in X$,

либо уравнение (5.2) имеет нетривиальные решения $x \neq 0$.

Лемма 5.2. *Пусть линейный оператор $A : X \to X$ компактен. Тогда однородные уравнения (5.2) и (5.4) имеют конечное число линейное независимых решений.*

Доказательство. Нужно доказать, что линейные подпространства $\operatorname{Ker}(E - A)$ и $\operatorname{Ker}(E - A^*)$ конечномерны. Пусть B — шар в X. Если $x \in B$, $x \in \operatorname{Ker}(E - A)$, то

$$x = Ax, \quad x \in B \implies x \in A(B).$$

Следовательно, $B \cap \operatorname{Ker}(E - A) \subset A(B)$. Оператор A компактен, значит множество $A(B)$ предкомпактно, тогда и его подмножество $B \cap \operatorname{Ker}(E - A)$ предкомпактно. Следовательно, подпространство $\operatorname{Ker}(E - A)$ конечномерное (следствие 2.4 гл. IV). Пространство $\operatorname{Ker}(E - A^*)$ также конечномерно, так как $A^* \in \sigma(X^*)$. Лемма доказана.

Этот результат можно усилить.

Теорема 5.2 (2-я теорема Фредгольма). *Пусть X — банахово пространство, оператор $A : X \to X$ линеен и компактен. Тогда однородные уравнения (5.2) и (5.4) имеют по одинаковому конечному числу линейно независимых решений, то есть*

$$\dim \operatorname{Ker}(E - A) = \dim \operatorname{Ker}(E - A^*) < \infty.$$

Доказательство можно найти в [12, 6, 4, 8].

Теорема 5.3 (3-я теорема Фредгольма). *Пусть X — банахово пространство, оператор $A : X \to X$ линеен и компактен. Тогда*

(а) уравнение (5.1) имеет решение $x \in X$ только для тех правых частей $y \in X$, которые ортогональны решениям однородного сопряженного уравнения (5.4);

(б) сопряженное уравнение (5.3) имеет решение $x^* \in X^*$ только для тех правых частей $y^* \in X^*$, которые ортогональны решениям однородного уравнения (5.2).

(а) вытекает из теоремы 2.1, так как оператор $E - A$ нормально разрешимый. Доказательство (б) можно найти в [8, с. 274].

Упражнение 5.1. Доказать (б) в случае X — рефлексивное пространство (использовать (а) и упражнение 6.1 гл. III).

§ 6 Обобщение теорем Фредгольма

Пусть X, Y — банаховы пространства. Если оператор A имеет вид

$$\begin{gathered} A = B + C, \\ B \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ непрерывно обратимый}, \\ C \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ компактный}, \end{gathered} \tag{6.1}$$

то теоремы Фредгольма остаются в силе для уравнений

$$Ax = y \tag{6.2}$$

$$Ax = 0 \tag{6.3}$$

$$A^* y^* = x^* \tag{6.4}$$

$$A^* y^* = 0 \tag{6.5}$$

Действительно, рассмотрим уравнения

$$z - CB^{-1} z = y \tag{6.6}$$

$$z - CB^{-1} z = 0 \tag{6.7}$$

$$z^* - \left(CB^{-1}\right)^* z^* = f \qquad (f = (B^*)^{-1} x^*) \tag{6.8}$$

$$z^* - \left(CB^{-1}\right)^* z^* = 0 \tag{6.9}$$

Между решениями уравнений (6.2) и (6.6) имеется взаимнооднозначное соответствие:

если $x \in X$ — решение (6.2), то $z = Bx$ — решение (6.6);

если $z \in Y$ — решение (6.6), то $x = B^{-1} z$ — решение (6.2).

Оператор B непрерывно обратим, значит оператор B^* также непрерывно обратим, причем $(B^*)^{-1} = (B^{-1})^*$ (теорема 6.2 гл. III). Следовательно, между решениями (6.4) и (6.8) также имеется взаимнооднозначное соответствие.

Упражнение 6.1. Какова связь между решениями (6.4) и (6.8)?

Оператор B^{-1} линейный и непрерывный, C линейный и компактный, следовательно, CB^{-1} — линейный компактный (упражнение 6.1 гл. IV). Значит к уравнениям (6.6)–(6.9) можно применить теоремы Фредгольма из § 5. Переходя от уравнений (6.6)–(6.9) к уравнениям (6.2)–(6.5) получаем следующие результаты.

Теорема 6.1 (1-я теорема Фредгольма). *Пусть X, Y — банаховы пространства, оператор $A : X \to Y$ имеет вид (6.1). Тогда следующие утверждения эквивалентны*

(а) уравнение (6.2) имеет решение $x \in X$ для любого $y \in Y$;

(б) уравнение (6.3) имеет только тривиальное решение $x = 0$;

(в) уравнение (6.4) имеет решение $y^* \in X^*$ для любого $x^* \in X^*$;

(б) уравнение (6.5) имеет только тривиальное решение $y^* = 0$.

При выполнении любого из указанных выше условий операторы A и A^* непрерывно обратимы.

З а м е ч а н и е. Таким образом, при выполнении любого из этих условий, задачи (6.2) и (6.4) корректно поставлены.

А л ь т е р н а т и в а Ф р е д г о л ь м а. *Пусть X, Y — банаховы пространства, оператор $A: X \to Y$ имеет вид (6.1). Тогда*

либо уравнение (6.2) имеет единственное решение $x \in X$ для $\forall y \in Y$,

либо уравнение (6.3) имеет нетривиальные решения $x \neq 0$.

Т е о р е м а 6.2 (2-я теорема Фредгольма). *Пусть X, Y — банаховы пространства, оператор $A: X \to Y$ имеет вид (6.1). Тогда однородные уравнения (6.3) и (6.5) имеют по одинаковому конечному числу линейно независимых решений, то есть*

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^* < \infty.$$

Т е о р е м а 6.3 (3-я теорема Фредгольма). *Пусть X, Y — банаховы пространства, оператор $A: X \to Y$ имеет вид (6.1). Тогда*

(а) уравнение (6.2) имеет решение $x \in X$ только для тех правых частей $y \in Y$, которые ортогональны решениям однородного сопряженного уравнения (6.5);

(б) сопряженное уравнение (6.4) имеет решение $y^* \in Y^*$ только для тех правых частей $f \in Y^*$, которые ортогональны решениям однородного уравнения (6.3).

З а м е ч а н и е. Согласно теореме 2.1 утверждение (а) теоремы 6.3 справедливо для любого нормально разрешимого оператора A, не обязательно имеющего вид (6.1).

О п р е д е л е н и е. Нормально разрешимый оператор A называется

– *нетеровым* (оператором Нетера), если $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ker} A^*$ конечномерны,

– *фредгольмовым* (оператором Фредгольма), если $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ker} A^*$ конечномерны и имеют одинаковую размерность.

Согласно следствию 4.2 и теореме 6.2 оператор вида (6.1) является фредгольмовым. Оказывается верно и обратное.

Т е о р е м а 6.4 (Никольский). *Пусть X, Y банаховы пространства. Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ является фредгольмовым, если и только если он представим в виде (6.1).*

Таким образом, в теоремах 6.1, 6.2, 6.3 условие (6.1) можно поменять на «оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ фредгольмов».

§ 7 Некорректность уравнения 1-го рода

В § 5 были получены необходимые и достаточные условия корректности уравнения 2-го рода. В этом параграфе доказывается, что задача, состоящая в решении уравнения 1-го рода, некорректно поставлена в бесконечномерном случае. Уравнением 1-го рода называется

$$Ax = y, \tag{7.1}$$

если оператор $A: X \to Y$ компактен.

О п р е д е л е н и е. Линейный оператор A называется *конечномерным,* если его образ $\operatorname{Im} A$ конечномерен.

Упражнения. Доказать, что

7.1 любой линейный непрерывный конечномерный оператор является компактным;

7.2 оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ конечномерный, если и только если существуют линейно независимые $y_i \in Y$, $f_i \in X^*$ $(1 \leq i \leq n)$:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, x \rangle \cdot y_i \quad \forall x \in X. \tag{7.2}$$

(в качестве y_i взять базис $\operatorname{Im} A$.)

Теорема 7.1. *Пусть Y — банахово пространство, линейный оператор $A : X \to Y$ компактен и не является конечномерным. Тогда $\operatorname{Im} A$ не замкнут в Y.*

Доказательство. Предположим противное: $\operatorname{Im} A$ замкнут в Y. Тогда $\operatorname{Im} A$ можно рассматривать как самостоятельное банахово пространство. Очевидно, что

$$\operatorname{Im} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_n), \quad B_n = \{x \in X : \|x\| \leq n\}.$$

Оператор A компактен, значит $A(B_n)$ компактно. Так как $\operatorname{Im} A$ бесконечномерно, то по следствию 2.3 гл. III каждое $A(B_n)$ нигде не плотно в $\operatorname{Im} A$. Следовательно, $\operatorname{Im} A$ является множеством I категории. Это невозможно согласно теореме Бэра-Хаусдорфа (теорема **??** гл. I), так как $\operatorname{Im} A$ — банахово пространство. Теорема доказана.

Следствие 7.1. *Пусть Y — банахово бесконечномерное пространство, линейный оператор $A : X \to Y$ компактен. Тогда существуют $y \in Y$, для которых уравнение (7.1) не имеет решений $x \in X$.*

Доказательство. Нужно доказать, что $\operatorname{Im} A \neq Y$. Если $\operatorname{Im} A$ конечномерно, то $\operatorname{Im} A \neq Y$, так как Y бесконечномерное. Если $\operatorname{Im} A$ не является конечномерным, то $\operatorname{Im} A$ не замкнут (теорема 7.1) и значит не равен Y. Следствие доказано.

Теорема 7.2. *Пусть X — бесконечномерное пространство, линейный оператор $A : X \to Y$ компактен. Тогда, если существует A^{-1}, то он неограничен.*

Напомним, что неограниченными называются операторы, которые не являются непрерывными.

Доказательство. Если A^{-1} непрерывен, то единичный оператор $E = A^{-1}A : X \to X$ будет компактным как произведение линейного непрерывного и компактного операторов. Это возможно только для конечномерного X (лемма 6.2 гл. IV). Теорема доказана.

Выводы:

1. решение уравнения 1-го рода с правой частью из бесконечномерного пространства существует не при всех исходных данных;

2. если решение уравнения 1-го рода ищется в бесконечномерном пространстве, то оно не устойчиво.

§ 8 Приложения к дифференциальным и интегральным уравнениям

Нам понадобятся следующие вспомогательные результаты

Лемма 8.1. *Если $x(t)$ имеет конечную производную, причем*

$$x'(t) \leq \alpha x(t) \quad \forall t \in (a, b), \tag{8.1}$$

то

$$x(t) \leq x(a) \cdot e^{\alpha(t-a)} \quad \forall t \in (a, b]. \tag{8.2}$$

Доказательство. Положим $\varphi(t) = x(t)e^{-\alpha t}$. В силу (8.1)

$$\varphi'(t) = \Big(x'(t) - \alpha x(t)\Big)\, e^{-\alpha t} \leq 0.$$

Значит функция φ не возрастает на $[a, b]$. Следовательно, $\varphi(t) \leq \varphi(a)$ $\Longrightarrow x(t)e^{-\alpha t} \leq x(a)e^{-a\alpha}$. Лемма доказана.

Лемма 8.2. *Пусть $y(t) \in L^1(a, b)$ удовлетворяет неравенству:*

$$|y(t)| \leq \alpha \int_a^t |y(\tau)|\, d\tau \quad \forall \tau \in (a, b). \tag{8.3}$$

Тогда $y = 0$ на (a, b).

Доказательство. Положим

$$x(t) = \int_a^t |y(\tau)|\, d\tau \quad \forall \tau \in [a, b).$$

Тогда $x(a) = 0$, $x'(t) = |y(t)|$, неравенство (8.3) принимает вид (8.1). Из (8.2) и условия $x(a) = 0$ вытекает $x = 0$. Тогда, в силу (8.3) и определения $x(t)$, $y = 0$. Лемма доказана.

Задача Коши для линейной системы ОДУ

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + y_i(t) \quad t \in [0,T], \quad x_i(0) = 0 \quad 1 \le i \le n. \quad (8.4)$$

Считаем, что $a_{ij} \in C[0,T]$, $y_i \in C[0,T]$. Задачу (8.4) удобно записывать в векторном виде:

$$x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t) + y(t) \quad t \in [0,T], \quad x(0) = 0.$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\mathrm{A}(t)$ — матрица с компонентами $a_{ij}(t)$. Определим банаховы пространства и операторы

$$X = \{x \in \big(C^1[0,T]\big)^n : x(0) = 0\}, \quad \|x\|_X = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{C^1[0,T]}.$$

$$Y = \big(C^0[0,T]\big)^n, \quad \|y\|_Y = \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_{C^0[0,T]}.$$

$$A, B, C : X \to Y, \quad A = B + C, \quad Bx = x', \quad Cx = -\mathrm{A(t)} \cdot x.$$

Тогда задачу (8.4) можно записать в виде: $Ax = y$.

Оператор дифференцирования $B : X \to Y$ непрерывно обратим (упражнение 5.4 гл. II).

Упражнение 8.1. Используя компактность вложения $C^1[0,T] \subset C[0,T]$ доказать, что оператор $C : X \to Y$ компактен.

Значит можно применить альтернативу Фредгольма из § 6, согласно которой для существования единственного решения уравнения $Ax = y$ достаточно, чтобы однородное уравнение $Ax = 0$ имело только тривиальное решение. Однородное уравнение $Ax = 0$ имеет вид

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) \quad t \in [0,T], \quad x_i(0) = 0 \quad 1 \le i \le n. \quad (8.5)$$

Теорема 8.1. *Пусть $a_{ij} \in C[0,T]$. Тогда для $\forall y_i \in C[0,T]$ задача Коши (8.4) имеет единственное решение $x_i \in C^1[0,T]$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что (8.5) имеет только тривиальное решение. Проинтегрируем (8.5) по $t \in [0,\tau]$:

$$x_i(\tau) = \int_0^\tau \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)\,dt \quad \tau \in [0,T].$$

Нетрудно получить неравенства

$$|x_i(\tau)| \le M \int_0^\tau \sum_{j=1}^{n} |x_j(t)|\,dt \quad \tau \in [0,T], \quad M = \max_{t\in[0,T],\ 1\le i,j\le n} |a_{ij}(t)|.$$

Просуммируем их по i от 1 до n:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(\tau)| \le M \cdot n \int_0^\tau \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|\,dt \quad \tau \in [0,T].$$

Применяя лемму 8.2, в которой $a = 0$, $b = T$, $y = \sum |x_i|$, $\alpha = M \cdot n$, получаем $x_i = 0$. Теорема доказана.

Краевая задача для ОДУ

$$x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = y(t) \;\; t \in [a,b], \quad x(a) = x(b) = 0. \quad (8.6)$$

Пусть $b(t)$, $c(t)$, $y(t) \in C[a,b]$. Введем пространство X и операторы:

$$X = \{x \in C^2[a,b] : x(a) = x(b) = 0\}, \;\; A, B, C : X \to C[a,b],$$
$$A = B + C, \;\; Bx = x'', \;\; Cx = bx' + cx.$$

Тогда уравнение (8.6) можно записать в виде: $Ax = y$.

Упражнение 8.2. Доказать, что оператор B непрерывно обратимый.

Оператор $C : X \to C[a,b]$ компактный (теорема 7.1 гл. IV). Значит можно применить альтернативу Фредгольма. Однородное уравнение $Ax = 0$ имеет вид:

$$x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0 \quad t \in [a,b], \qquad x(a) = x(b) = 0. \tag{8.7}$$

Теорема 8.2. *Пусть $b(t)$, $c(t) \in C[a,b]$. Тогда*

(а) *если однородная задача (8.7) имеет только тривиальное решение, то (8.6) имеет единственное решение для всех $y \in C[a,b]$;*

(б) *если однородная задача (8.7) имеет нетривиальные решения, то, краевая задача (8.6) разрешима не для всех $y \in C[a,b]$, если решение существует, то оно неединственно.*

Можно доказать, что однородная задача (8.7) имеет только тривиальное решение, если $c(t) \le 0$ либо $c(t) = b'(t) + \tilde{c}(t)$, $\tilde{c}(t) \le 0$.

Упражнение 8.3. Доказать, что задача (8.6) имеет решение при $b(t) = const$, $c(t) \le 0$ (уравнение (8.7) умножить на x и проинтегрировать по $t \in [a,b]$)

При $c(t) \ge 0$ задача (8.7) может иметь нетривиальные решения. Например, если $b(t) \equiv 0$, $c(t) = (n\pi/(b-a))^2$, n — любое натуральное, то нетривиальным решением будет $x(t) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{b-a}(t-a)\right)$.

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$x(t) - \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds = y(t) \quad t \in [a,b]. \tag{8.8}$$

Уравнение можно рассматривать в различных пространствах. Это зависит от того, в каком классе мы ищем решение. Пусть $k(s,y)$ непрерывна на $[a,b] \times [a,b]$. Будем искать решение в $L^2(a,b)$. Определим

$$A : L^2(a,b) \to L^2(a,b), \quad Ax(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds. \tag{8.9}$$

Тогда уравнение (8.8) эквивалентно

$$x - Ax = y.$$

Оператор $A : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ компактен (следствие 7.2 гл. IV). Значит можно применять теоремы Фредгольма. Формула для сопряженного оператора $A^* : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ была получена в § 6.

$$x(t) - \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds = 0 \qquad t \in [a,b] \tag{8.10}$$

$$x(t) - \int_a^b k(s,t)x(s)\,ds = y(t) \quad t \in [a,b] \tag{8.11}$$

$$x(t) - \int_a^b k(s,t)x(s)\,ds = 0 \qquad t \in [a,b] \tag{8.12}$$

(8.10) — это однородное уравнение $x - Ax = 0$;

(8.11) — это сопряженное уравнение $x - A^*x = y$;

(8.12) — это однородное сопряженное уравнение $x - A^*x = 0$.

Тогда теоремы Фредгольма принимают вид.

Теорема 8.3. *Пусть $k(t,s) \in C\left([a,b] \times [a,b]\right)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*

(а) *(8.8) имеет решение $x \in L^2(a,b)$ для любого $y \in L^2(a,b)$;*

(б) *(8.10) имеет только тривиальное решение $x = 0$;*

(в) *(8.11) имеет решение $x \in L^2(a,b)$ для любого $y \in L^2(a,b)$;*

(б) *(8.12) имеет только тривиальное решение $x = 0$.*

Замечание. Таким образом, при выполнении любого из этих условий, задачи (8.8) и (8.11) корректно поставлены.

Замечание. В § 8 гл. II доказано выполнение условий (а), (б) для достаточно малых функций $k(t,s)$.

Альтернатива Фредгольма. *Если $k(t,s) \in C\left([a,b] \times [a,b]\right)$, то* *либо (8.8) имеет решение $x \in L^2(a,b)$ для любого $y \in L^2(a,b)$,*

либо (8.10) имеет нетривиальные решения $x \neq 0$.

Теорема 8.4. *Пусть $k(t,s) \in C\big([a,b]\times[a,b]\big)$. Тогда однородные уравнения (8.10) и (8.12) имеют по одинаковому конечному числу линейно независимых решений.*

Теорема 8.5. *Пусть $k(t,s) \in C\big([a,b]\times[a,b]\big)$. Тогда*

(а) уравнение (8.8) имеет решение $x \in L^2(a,b)$ только, если функция $y \in L^2(a,b)$ такова, что

$$\int_a^b y(s)x_0(s)\,ds = 0$$

для любого x_0, являющегося решением (8.12).

(в) уравнение (8.11) имеет решение $x \in L^2(a,b)$ только, если функция $y \in L^2(a,b)$ такова, что

$$\int_a^b y(s)x_0(s)\,ds = 0$$

для любого x_0, являющегося решением (8.10).

Таким образом, для корректности задач (8.10) и (8.12) необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение (8.11) (либо (8.12)) имело только тривиальные решения. Это выполняется не всегда. Например, если $k(t,s) = k_1(t)k_2(s)$, причем

$$\int_a^b k_1(t)k_2(t)\,ds = 1, \tag{8.13}$$

то очевидным нетривиальным решением (8.11) является $x_0(t) = k_1(t)$.

Упражнения. Пусть $k(t,s) = k_1(t)k_2(s)$. Доказать, что

8.4 если (8.13) не верно, то задачи (8.10) и (8.12) корректно поставлены;

8.5 если (8.13) верно, то необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (8.10) (задачи (8.12)) является

$$\int_a^b k_2(s)y(s)\,ds = 0 \quad \left(\int_a^b k_1(s)y(s)\,ds = 0\right)$$

Один в один рассматривается многомерное интегральное уравнение:

$$x(t) - \int_D k(t,s)x(s)\,ds = y(t) \quad t \in D.$$

Здесь $t = (t_1,\ldots,t_n)$, $s = (s_1,\ldots,s_n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Для этого уравнения также справедливы теоремы Фредгольма.

Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b k(t,s)x(s)\,ds = y(t) \quad t \in [a,b]. \tag{8.14}$$

Считаем, что $k(t,s) \in C\big([a,b]\times[a,b]\big)$. (8.14) можно записать в виде:

$$Ax = y.$$

Оператор $A : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$, действующий по формуле (8.9), компактен. Значит можно применить результаты § 7. Пространство $L^2(a,b)$ бесконечномерное. Из следствия 7.1 и теоремы 7.2 вытекает

Теорема 8.6. *Пусть $k(s,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$. Тогда*

(а) существуют функции $y(t) \in L^2(a,b)$, для которых задача (8.14) не имеет решений $x \in L^2(a,b)$;

(б) если (8.14) имеет решение $x \in L^2(a,b)$, то оно не устойчиво.

Таким образом, задача (8.14) некорректно поставлена.

Литература

[1] Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

[2] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.

[3] Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Введение в теорию обобщенных функций. М.: МИАН, 2006. 164 с. (Лекционные курсы НОЦ. Вып. 5. URL: http://www.mi.ras.ru/noc/)

[4] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

[5] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

[6] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Наука, 1984.

[7] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: В 2-х т. Висагинас: «Alfa», 1998. М.: Наука, 1978.

[8] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

[9] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977.

[10] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961.

[11] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

[12] Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.