Уравнения с частными производными: учебное пособие

А. А. Илларионов

01.02.2009

Оглавление

Г л а в а I. **Вводная** **3**
§ 1 Основные уравнения математической физики 4
§ 2 Классификация и канонический вид уравнений 2-го порядка 6
§ 3 Решение линейных однородных двумерных уравнения 1-го порядка 10
§ 4 Приведение к каноническому виду двумерных уравнений 11
§ 5 Постановки основных краевых задач 16
§ 6 Корректно поставленные задачи 18
§ 7 Интегральные формулы и неравенства 20
§ 8 Теорема Коши-Ковалевской 23

Г л а в а II. **Метод Фурье** **25**
§ 1 Ряды Фурье 25
§ 2 Спектральные задачи 27
§ 3 Решение задачи Штурма-Лиувилля и его свойства 29
§ 4 Однородное одномерное уравнение теплопроводности 32
§ 5 Однородное одномерное волновое уравнение 34
§ 6 Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге 36
§ 7 Другие краевые задачи для уравнения Лапласа 39
§ 8 Решение неоднородных уравнений с правой частью специального вида . . . 42
§ 9 Решение неоднородных уравнений методом Фурье 43

Г л а в а III. **Параболические уравнения** **45**
§ 1 Принцип максимума 45
§ 2 Единственность и устойчивость начально-краевой задачи Дирихле 48
§ 3 Разрешимость задачи Дирихле для однородного одномерного уравнения теплопроводности (обоснование метода Фурье) 49
§ 4 Единственность решения 3-й краевой задачи и задачи Неймана 51
§ 5 Стабилизация решения уравнения теплопроводности 53
§ 6 Неустойчивость решения уравнения теплопроводности с обратных ходом по времени 54

Г л а в а IV. **Гиперболические уравнения** **56**
§ 1 Единственность решения начально-краевых задач 56
§ 2 Разрешимость задачи Дирихле для уравнения свободных колебаний струны (сходимость метода Фурье) 58
§ 3 Задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны 61
§ 4 Задача Коши на полуоси 63
§ 5 Решение начально-краевых задач с помощью формулы Даламбера 66

Г л а в а V. **Эллиптические уравнения** **68**
§ 1 Принцип максимума 68
§ 2 Единственность решения краевой задачи Дирихле 70
§ 3 Принцип максимума для 3-й краевой задачи 72
§ 4 Единственность решения 3-й краевой задачи и задачи Неймана (метод энергетических неравенств) 73
§ 5 Корректность задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге (обоснование метода Фурье) 74
§ 6 Формулы Пуассона и 77

Г л а в а VI. **Метод потенциалов и функций Грина** **79**
§ 1 Сингулярное решение уравнения Лапласа 79
§ 2 Формула Грина интегрального представления функций 80
§ 3 Фундаментальные решения уравнения Лапласа 82
§ 4 Потенциалы и их свойства 83
§ 5 Решение краевых задач методом потенциалов 87
§ 6 Решение краевых задач с помощью функции Грина 88

Глава I

Вводная

Уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производные называется *дифференциальным.* Дифференциальное уравнение называется

— *обыкновенным,* если искомая функция зависит только от одного аргумента;

— *в частных производных* (уравнением с частными производными), если искомая функция зависит более, чем от одного аргумента.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение называется *порядком* дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение вида

$$Lu = f, \tag{1}$$

где L — некоторый дифференциальный оператор, u — неизвестная функция, называется *линейным,* если $L(\alpha u) = \alpha Lu$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(u + v) = Lu + Lv$ для всех функций u, v (т.е. L — линейный оператор).

Линейное дифференциальное уравнение (1) называется *однородным,* если $f \equiv 0$ и *неоднородным* в противном случае.

Дифференциальное уравнение называется *квазилинейным,* если оно линейно относительно старших производных.

П р и м е р ы.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u = e^x$ — нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка;
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(x)u = y$ — линейное неоднородное уравнение 2-го порядка;
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$ — квазилинейное уравнение 2-го порядка.

Главной целью настоящего курса является изучение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Любое такое уравнение относительно неизвестной функции $u =$

$u(x)$, где $x=(x_1,\dots,x_d)$, можно записать в виде

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+c(x)u(x)=f(x).$$

Будем использовать следующие обозначения

$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_d}\right)$ — градиент скалярной функции $u=u(x)$ либо $u=u(x,t)$;

$\operatorname{div} w=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial w_k}{\partial x_k}$ — дивиргенция вектор-функций $w=(w_1,\dots,w_d)$, $w=w(x)$ либо $w=w(x,t)$;

$\Delta u=\operatorname{div}\nabla u=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ — лапласиан скалярной функции u.

§ 1 Основные уравнения математической физики

Волновое уравнение

Многие задачи механики (колебания струны, мембраны, стержня, трехмерного объема), и физики (акустические и электромагнитные волны) описываются уравнением колебаний вида

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\operatorname{div}(p\nabla u)-qu+F(x,t), \tag{1.1}$$

где неизвестная функция $u=u(x,t)$ зависит от пространственных переменных $x\in\mathbb{R}^d$ $(d=1,2,3)$ и времени t; коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды, в которой происходит колебательный процесс. Они могут быть функциями от x и t, либо постоянными. Функция $F(x,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения (внешней силы, действующей на процесс). Согласно определению div и ∇

$$\operatorname{div}(p\nabla u)=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_k}\right).$$

Если $p\equiv const$, то

$$\operatorname{div}(p\nabla u)=p\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\equiv p\Delta u,$$

и в случае $p\equiv const$, $q\equiv 0$ уравнение (1.1) принимает вид

$$u_t'-a^2\Delta u=f(x,t), \tag{1.2}$$

где $a^2=p/\rho$, $f=F/\rho$. Уравнение (1.2) называется *волновым уравнением.* Оно описывает, в частности, следующие процессы.

Рассмотрим натянутую струну (под струной понимается тонкая нить, которая может свободно изгибаться, т.е. не оказывает сопротивления изменению ее формы не связанному с изменением ее длины). Пусть в некоторой декартовой системе координат положение струны в каждый момент времени t и точке x отклонение струны от положения равновесия равно $u = u(x,t)$. Обозначим T_0 — натяжение струны (ее считаем постоянной величиной), $\rho = \rho(x)$ — плотность струны; $F = F(x,t)$ — интенсивность внешней силы, действующей на струну. Уравнение колебаний струны имеет вид (вывод см. в [1, 2, 3]):

$$\rho(x)u''_{tt} = T_0 u''_{xx} + F.$$

При $\rho_0 = const$, делая замену $f = F/\rho$ и обозначая $T_0/\rho = a^2$ получаем уравнение

$$u'_t - a^2 u''_{xx} = f, \tag{1.3}$$

которое совпадает с волновым при $d = 1$ и называется одномерным волновым уравнением. Еще одно название — *уравнение колебаний струны* (*свободных* при $f \equiv 0$ и *вынужденных* в противном случае).

Колебания упругой мембраны (под мембраной понимается свободно изгибающаяся натянутая тонкая пленка) с плотностью $\rho(x)$, натяжением T_0, отклонением от положения равновесия в т. $x = (x_1, x_2)$ и момент времени t равным $u(x,t)$ описываются уравнением

$$\rho(x)u'_t = T_0 \Delta u + F.$$

При $\rho = const$ оно переходит в двумерное волновое уравнение.

Трехмерное волновое уравнение описывает процессы распространения звуковых и электромагнитных волн.

Уравнение теплопроводности (диффузии)

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются одним и тем же уравнением вида

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \nabla u) - qu + F(x,t). \tag{1.4}$$

Его называют *уравнение диффузии.*

Например, пусть $u = u(x,t)$ — температура среды в точке x и момент времени t, $\rho(x)$, $c(x)$, $\kappa(x)$ — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности среды в точке x. Тогда уравнение распространения тепла имеет вид (вывод см. в [1, 2, 3])

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \nabla u) + F(x,t),$$

где $F(x,t)$ — интенсивность внутренних источников тепла. Если ρ, c, κ — постоянные, то обозначая $a^2 = \kappa \rho^{-1} c^{-1}$ и $\rho^{-1} c^{-1} F = f$, получаем

$$u'_t - a^2 \Delta u = f(x,t) \tag{1.5}$$

— *уравнение теплопроводности.* Таким образом, уравнение теплопроводности описывает процессы распространения тепла (u — температура) и диффузии (u — плотность среды).

Уравнение Пуассона

Для стационарных (т.е. не зависящих от времени) процессов функции f и u не зависят от времени. Тогда волновое уравнение (1.2) и уравнение теплопроводности (1.5) принимают один и тот же вид

$$-\Delta u = \tilde{f}(x) \tag{1.6}$$

— *уравнение Пуассона,* где $\tilde{f} = f/a^2$. В случае $\tilde{f} \equiv 0$ получаем

$$\Delta u = 0$$

— *уравнение Лапласа* (т.е. уравнение Лапласа — это однородное уравнение Пуассона).

Тремя основными уравнениями математической физики являются

$$\begin{aligned} u''_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t) \qquad &\text{— волновое уравнение;} \\ u'_t - a^2\Delta u = f(x,t) \qquad &\text{— уравнение теплопроводности;} \\ -\Delta u = f(x) \qquad &\text{— уравнение Пуассона.} \end{aligned}$$

§ 2 Классификация и канонический вид уравнений 2-го порядка

Любое квазилинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно неизвестной функции $u = u(x_1, \ldots, u_d)$ можно записать в виде:

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, u, \nabla u), \tag{2.1}$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x)$. Замена переменных

$$\xi_k = \xi_k(x). \tag{2.2}$$

называется *невырожденной* (неособенной), если отображение $x \to \xi(x)$ взаимно однозначное, т.е. $\xi(x) \neq \xi(y)$ при $x \neq y$. Если функции $\xi_k = \xi_k(x)$ непрерывно дифференцируемые, то необходимым и достаточным условием невырожденности является

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \neq 0,$$

где $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ — определитель матрицы Якоби $((\partial \xi_i / \partial x_j))$. Его называют *якобианом* преобразования.

Вычислим производных в новых переменных

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \cdot}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \cdot}{\partial x_j} = \sum_{n=1}^{d} \frac{\partial \cdot}{\partial \xi_n} \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{n=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right)\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + \sum_{n=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x_j x_i} =$$

$$= \sum_{k,n=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_{n=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x_j x_i}.$$

Подставляя в уравнение (2.1), получаем

$$\sum_{i,j=1}^{d} \sum_{k,n=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \tilde{F}(\xi, u, \nabla_\xi u).$$

Обозначая через $\tilde{a}_{k,n}$ новые коэффициенты при вторых производных

$$\tilde{a}_{k,n}(\xi) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \tag{2.3}$$

запишем уравнение (2.1) в новых переменных ξ

$$\sum_{k,n=1}^{d} \tilde{a}_{k,n}(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_n} = \tilde{F}(\xi, u, \nabla_\xi u).$$

Зафиксируем точку $x = x_0$. Тогда формула для новых коэффициентов $\tilde{a}_{k,n}$ в точке x_0 имеет вид

$$\tilde{a}_{k,n} = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0) t_{nj} t_{ki}, \quad t_{ij} = \frac{\partial \xi_i(x_0)}{\partial x_j}.$$

Она совпадает с формулой преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{ij=1}^{d} a_{ij}(x_0) x_i x_j \tag{2.4}$$

при невырожденной линейной замене

$$x_i = \sum_{k=1}^{d} t_{ki}\xi_k, \tag{2.5}$$

которая приводит квадратичную форму (2.4) к виду

$$\sum_{kn=1}^{d} \tilde{a}_{kn}(x_0)\xi_k\xi_n.$$

Из курса линейной алгебры (приведение квадратичной формы к каноническому виду) известно, что существует невырожденное линейное преобразование (2.5), приводящее квадратичную форму (2.4) к каноническому виду

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k^2 - \sum_{k=m+1}^{m+r} \xi_k^2 \qquad (0 \leq m \leq m+r \leq d). \tag{2.6}$$

Таким образом, если линейная замена (2.5) приводит квадратичную форму (2.4) к каноническому виду (2.6), то любая замен переменных вида (2.2), удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial \xi_i(x_0)}{\partial x_j} = t_{ij},$$

приводит дифференциальное уравнение (2.1) в точке $x = x_0$ к виду

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} - \sum_{k=m+1}^{m+r} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} = \tilde{F}(\xi, u, \nabla_\xi u) \tag{2.7}$$

— *канонический вид квазилинейного дифференциального уравнения в точке* x_0.

Из курса линейной алгебры (закон инерции квадратичных форм) вытекает, что числа m и r зависят только от значений $a_{ij}(x_0)$. Это позволяет классифицировать дифференциальное уравнение (2.5).

Определение. Уравнение (2.1), имеющее при $x = x_0$ канонический вид (2.7), называется в этой точке уравнением

— *эллиптического типа,* если $m = d$, $r = 0$ либо $m = 0$, $r = d$;

— *параболического типа,* если $m = d - 1$, $r = 0$ либо $m = 0$, $r = d - 1$;

— *гиперболического типа,* если $m = n - 1$, $r = 1$ либо $m = 1$, $r = d - 1$.

Рассмотрим частный случай уравнения (2.1)

$$\sum_{i}^{d} a_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = F(x, u, \nabla u). \tag{2.8}$$

Нетрудно заметить, что оно является в точке $x = x_0$ уравнением

— *эллиптического типа,* если все числа $a_i(x_0)$ не равны нулю и имеют одинаковый знак;

— *параболического типа,* если ровно одно число из $a_i(x_0)$ равно нулю, а остальные имеют одинаковый знак;

— *гиперболического типа,* все числа $a_i(x_0)$ не равны нулю и все кроме одного имеют одинаковый знак.

Для доказательства достаточно сделать замену

$$\xi_i = \begin{cases} x_i/\sqrt{|a_i(x_0)|} & \text{при } a_i(x_0) \neq 0, \\ x_i & \text{при } a_i(x_0) = 0, \end{cases}$$

приводящую уравнение (2.8) в точке x_0 к виду

$$\sum_i^d \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} = F(\xi, u, \nabla_\xi u), \qquad \lambda_i \in \{\pm 1, 0\}$$

и перенумеровать, если нужно, переменные ξ_i.

Таким образом, уравнение

Пуассона $\Delta u = f$ эллиптического типа;

теплопроводности $u'_t - a^2 \Delta u = f$ параболического типа;

волновое уравнение $u''_{tt} - a^2 \Delta u = f$ гиперболического типа.

Отметим также следующее

1. Не все уравнения подходят под приведенную классификацию. Например,
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}.$$

2. Если коэффициенты a_{ij} постоянные, то уравнение (2.1) либо неклассифицируемое, либо имеет один и тот же тип в каждой точке.

3. Если коэффициенты a_{ij} зависят от x, то уравнение (2.1) может иметь разный тип в разных точках. Например, уравнение
$$x u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$
является эллиптическим при $x > 0$, параболическим при $x = 0$ и гиперболическим при $x < 0$.

4. Если коэффициенты a_{ij} постоянные, то уравнение (2.1) приводится к каноническому виду во всех точках с помощью линейной замены (2.5), которая приводит квадратичную форму (2.1) к каноническому виду.

П р и м е р. Приведем уравнение

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0$$

к каноническому виду. Ему соответствует квадратичная форма

$$t_1^2 + 2t_1 t_2 + t_2^2,$$

которую замена переменных $\xi_1 = t_1 + t_2$, $\xi_2 = t_1$ приводит к каноническому виду: ξ_1^2. Значит, замена переменных $\xi_1 = x_1 + x_2$, $\xi_2 = x_1$ приведет и исходное дифференциальное уравнение к каноническому виду. В нашем случае получим $u''_{\xi_1 \xi_2} = 0$ (проверить!).

§ 3 Решение линейных однородных двумерных уравнения 1-го порядка

Пусть ω — область из $\mathbb{R}^2$, функции U и U'_y определены и непрерывны в ω. Напомним, что тогда U называется интегралом обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в области ω, если

1) $U'_y \neq 0$ в ω;

2) функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{3.1}$$

где $(x_0, y_0) \in \omega$, если и только если,

$$U\left(x, y(x)\right) = U\left(x_0, y_0\right).$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [?]) известно, что если функции f и f'_y непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то в некоторой окрестности этой точки существует интеграл уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными:

$$u'_x + f(x, y)u'_y = 0 \quad \text{в} \quad \omega, \tag{3.2}$$

где ω — область из $\mathbb{R}^2$; $f = f(x, y)$ — заданная, $u = u(x, y)$ — неизвестная функции.

Теорема 3.1. *Пусть функции f и f'_y непрерывны. Тогда, если функция U непрерывно дифференцируема и является интегралом уравнения $y' = f(x, y)$ в ω, то она является решением (3.2).*

Доказательство. Возьмем любую точку (x_0, y_0) из ω. Так как функции f и f'_y непрерывны, то в некоторой окрестности этой точки существует решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y(x).$$

Так как U — интеграл, то

$$U\left(x, y(x)\right) = const.$$

Продифференцируем это равенство по x

$$\frac{d}{dx}U\left(x, y(x)\right) = 0.$$

Так как

$$\frac{d}{dx}U\left(x, y(x)\right) = U'_x + U'_y y' = U'_x + U'_y f,$$

то функция U удовлетворяет уравнению (3.2) в точке (x_0, y_0) и, в силу произвольности точки, является решением этого уравнения. Теорема доказана.

Пусть η любая непрерывно дифференцируемая функция, U — интеграл уравнения (3.2). Положим

$$u = \eta(U). \tag{3.3}$$

Тогда $u'_x = \eta'(U)U'_x$, $u'_y = \eta'(U)U'_y$. Следовательно,

$$u'_x + f u'_y = \eta'(U)(U'_x + f\,U'_y) = 0,$$

то есть любая функция вида (3.3) является решением уравнения (3.2). Можно доказать и обратное: любое решение уравнения (3.2) представимо в виде (3.3).

Пример. Решить задачу:

$$e^y u'_x + 2x u'_y = 0, \quad u(x,0) = \sin x^2.$$

Р е ш е н и е. Чтобы применить теорему 3.1 запишем дифференциальное уравнение в виде:

$$u'_x + \frac{2x}{e^y} u'_y = 0. \tag{3.4}$$

Интегрируя ОДУ $y' = 2x/e^y$ получаем $e^y - x^2 = const$. Значит $U = e^y - x^2$ — общий интеграл. По теореме 3.1 любая функция вида $u = \eta(e^y - x^2)$ является решением уравнения (3.4). Подберем функцию η из граничного условия:

$$u(x,0) = \eta(1 - x^2) = \sin x^2.$$

Делая замену $t = 1 - x^2$ ($x = \pm\sqrt{1-t}$) получаем

$$\eta(t) = \sin(1-t).$$

Следовательно, решение задачи имеет вид:

$$u(x,y) = \sin(1 - e^y + x^2).$$

§ 4 Приведение к каноническому виду двумерных уравнений

В § 2 было показано, что любое квазилинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с помощью (линейной) замены переменных можно привести к каноническому виду в заданной точке. Возникает вопрос: нельзя ли одним и тем же (пусть даже нелинейным) преобразованием переменных привести уравнение к каноническому виду в некоторой окрестности точки? Полностью решить эту задачу можно только в случае $d = 2$.

Рассмотрим уравнение относительно функции $u = u(x,y)$

$$a\,u''_{xx} + 2b\,u''_{xy} + c\,u''_{yy} = \dots \tag{4.1}$$

Здесь и далее многоточием обозначено выражение не содержащее вторых производных функции $\tilde{u}$. Считаем, что функции $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы и не равны одновременно нулю в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Согласно формулам § 2 замена

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

приводит уравнение (4.1) к виду

$$\tilde{a}\, u''_{\xi\xi} + 2\tilde{b}\, u''_{\xi\eta} + \tilde{c}\, u''_{\eta\eta} = \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a\, \xi'^2_x + 2b\, \xi'_x\, \xi'_y + c\, \xi'^2_y, \\ \tilde{c} &= a\, \eta'^2_x + 2b\, \eta'_x\, \eta'_y + c\, \eta'^2_y, \\ \tilde{b} &= a\, \xi'_x\, \eta'_x + c\, \xi'_y\, \eta'_y + b\left(\xi'_x\, \eta'_y + \xi'_y\, \eta'_x\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Отметим, что гиперболическое уравнение в каноническом виде:

$$u''_{xx} - u_{yy} = \dots$$

с помощью замены $\xi = y - x$, $\eta = x + y$ приводится к виду

$$u''_{\xi\eta} = \dots \tag{4.3}$$

Поэтому (4.3) также называют каноническим видом двумерного гиперболического уравнения.

Лемма 4.1. *Пусть функция $d = b^2 - ac$ неотрицательная, а функция $a = a(x, y)$ не равна нулю в некоторой окрестности (x_0, y_0). Тогда, если $U = U(x, y)$ — интеграл ОДУ*

$$y' = \lambda_1(x, y) \quad (\textit{либо } y' = \lambda_2(x, y)), \quad \lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{d}}{a},$$

в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то U — решение уравнения

$$a\, U'^2_x + 2b\, U'_x\, U'_y + c\, U'^2_y = 0, \tag{4.4}$$

в некоторой окрестности этой же точки.

Доказательство. Элементарно проверяется, что

$$a\, U'^2_x + 2b\, U'_x\, U'_y + c\, U'^2_y = a\left(U'_x + \lambda_1 U'_y\right)\left(U'_x + \lambda_2 U'_y\right)$$

Согласно теореме 3.1 функция U является решением уравнения

$$U'_x + \lambda_1 U'_y = 0 \quad (\text{либо } U'_x + \lambda_2 U'_y = 0).$$

Значит, она удовлетворяет (4.4). Лемма доказана.

Отметим, что условие невырожденности преобразования $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ имеет вид

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \equiv \xi'_y \eta'_x - \xi'_x \eta'_y \neq 0. \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть функция $d = b^2 - ac$ знакопостоянная либо равна нулю в некоторой окрестности т. (x_0, y_0). Тогда существует невырожденное, дважды непрерывно дифференцируемое преобразование переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, которое приводит уравнение (4.1) в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) к одному из следующих канонических типов*

(а) если $d(x_0, y_0) > 0$, то к гиперболическому

$$u''_{\xi\eta} = \ldots; \tag{4.6}$$

(б) если $d(x_0, y_0) = 0$, то к параболическому

$$u''_{\xi\xi} = \ldots \quad (\textit{либо } u''_{\eta\eta} = \ldots); \tag{4.7}$$

(в) если $d(x_0, y_0) < 0$, то к эллиптическому

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = \ldots \tag{4.8}$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $a \neq 0$. Действительно, если $c \neq 0$, то меняя местами x и y, a и c приходим к случаю $a \neq 0$. Если $a = c = 0$, то $b \neq 0$ и разделив уравнение (4.1) на b получаем гиперболическое уравнение в каноническом виде $u_{xy} = \ldots$

Напомним, что $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ определяются формулами (4.2).

(а) Пусть $d > 0$. Надо подобрать функции ξ и η так, чтобы

$$\tilde{a} = \tilde{c} = 0, \ \ \tilde{b} \neq 0$$

и выполнялось условие невырожденности (4.5). Положим

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{d}}{a}.$$

Выберем в качестве ξ и η интегралы уравнений

$$y' = \lambda_1(x, y), \quad y' = \lambda_2(x, y).$$

Так как функции $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемые, то в некоторой окрестности (x_0, y_0) эти интегралы существуют и являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. По лемме 4.1 функции ξ, η являются решениями уравнения (4.4), т.е.

$$a\,\xi'^2_x + 2b\,\xi'_x\,\xi'_y + c\,\xi'^2_y = 0, \quad a\,\eta'^2_y + 2b\,\eta'_x\,\eta'_y + c\,\eta'^2_y = 0.$$

Следовательно, $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$. По теореме 3.1

$$\xi'_x + \lambda_1 \xi'_y = 0, \qquad \eta'_x + \lambda_2 \eta'_y = 0,$$

то есть $\xi'_x = -\lambda_2 \xi'_y$, $\eta'_x = -\lambda_1 \eta'_y$ и поэтому

$$\begin{aligned}
\tilde{b} &= a\,\xi'_x\,\eta'_x + c\,\xi'_y\,\eta'_y + b\left(\xi'_x\,\eta'_y + \xi'_y\,\eta'_x\right) = \\
&= \xi'_y\,\eta'_y\left(a\lambda_1\lambda_1 + c - b(\lambda_1+\lambda_2)\right) = \xi'_y\,\eta'_y\left(\frac{b^2-d}{a} + c - \frac{2b^2}{a}\right) = \\
&= \xi'_y\,\eta'_y\frac{b^2 - d + ac - 2b^2}{a} = \xi'_y\,\eta'_y\frac{-2d}{a} \neq 0, \\
\xi'_y\eta'_x - \xi'_x\eta'_y &= \xi'_y\,\eta'_y\,(-\lambda_2+\lambda_1) = \xi'_y\,\eta'_y\frac{-2d}{a} \neq 0,
\end{aligned}$$

т.к. $\xi'_y \neq 0$, $\eta'_y \neq 0$ по свойствам интеграла дифференциального уравнения. Значит, наше преобразование невырожденное и приводит уравнение (4.4) к виду $\tilde{b}u''_{\xi\eta} = \ldots$. Разделив на $\tilde{b} \neq 0$, получаем (4.6).

(б) Пусть $d = 0$. Положим $\eta = x$, а ξ — интеграл уравнения

$$y' = b/a.$$

Тогда по лемме 4.1

$$a\,\xi'^2_x + 2b\,\xi'_x\,\xi'_y + c\,\xi'^2_y = 0,$$

значит, $\tilde{a} = 0$, По теореме 3.1

$$\xi'_x + \frac{b}{a}\xi'_y = 0$$

С учетом этого равенства получаем

$$\begin{aligned}
&\tilde{b} = a\,\xi'_x\,\eta'_x + c\,\xi'_y\,\eta'_y + b\left(\xi'_x\,\eta'_y + \xi'_y\,\eta'_x\right) = a\xi'_x + b\xi'_y = 0, \\
&\tilde{c} = a\,\eta'^2_x + 2b\,\eta'_x\,\eta'_y + c\,\eta'^2_y = a \neq 0, \\
&\xi'_y\eta'_x - \xi'_x\eta'_y = \xi'_y \neq 0.
\end{aligned}$$

Значит, наше преобразование невырожденное и приводит уравнение (4.4) к виду $au''_{\eta\eta} = \ldots$. Разделив на $a \neq 0$, получаем (4.7).

(в) Пусть $d < 0$. Тогда функции

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{d}}{a}$$

являются комплекснозначными (и сопряженными). Пусть ω — интеграл следующего ОДУ для комплекснозначных функций

$$y' = \lambda_1.$$

Тогда замена

$$\xi = \operatorname{Re}\omega, \quad \eta = \operatorname{Im}\omega$$

является невырожденной и приводит уравнение (4.1) к виду (4.8). Это доказывается по такой же схеме, как и в предыдущих случаях. Подробное изложение см. в [1, 3, 6, 7]. Теорема доказана.

Схема приведения уравнения (4.1) к каноническому виду.

Пусть $a \neq 0$. Вычисляем

$$d = b^2 - ac, \quad \lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{d}}{a}.$$

1. Если $d > 0$, то уравнение гиперболического типа. Замена $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ — интегралы уравнений: $y' = \lambda_{1,2}$.

2. Если $d = 0$, то уравнение параболического типа. Замена $\eta = x$, $\xi = \xi(x, y)$ — интеграл уравнения: $y' = \lambda_1$.

3. Если $d < 0$, то уравнение эллиптического типа. Замена $\eta = \omega_1$, $\xi = \omega_2$, где $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ — интеграл уравнения: $y' = \lambda_1$.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то в приведенных выше формулах меняем местами x и y, a и b.

П р и м е р. Привести уравнение Трикоми

$$yu''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

к каноническому виду.

Р е ш е н и е. $a = y$, $b = 0$, $c = 1$; $d = b^2 - ac = -y$.

Пусть $y < 0$. Тогда $d > 0$, уравнение гиперболического типа.

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{d}}{a} = \pm\frac{\sqrt{-y}}{y} = \mp(-y)^{-1/2}.$$

Интегрируя уравнения

$$y' = \pm(-y)^{-1/2}$$

получаем

$$\frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3} = const, \quad \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3} = const.$$

Значит, надо сделать замену

$$\xi = \frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3}, \quad \eta = \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3}.$$

Она приводит уравнение Трикоми к каноническому виду:

$$u''_{\xi\eta} = \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u'_\xi - u'_\eta) \quad \text{при } y < 0.$$

Пусть $y > 0$. Тогда $d = -b < 0$. Уравнение эллиптического типа.

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{d}}{a} = \pm\frac{\sqrt{-y}}{y} = \pm i\frac{\sqrt{y}}{y} = \pm iy^{-1/2}.$$

Интегрируя уравнение

$$y' = iy^{-1/2}$$

получаем

$$\frac{3}{2}x + iy^{3/2} = const.$$

Значит $\omega = 3x/2 + iy^{3/2}$ — общий интеграл. Надо делать замену

$$\xi = 3x/2, \quad \eta = y^{3/2}.$$

Она приводит уравнение Трикоми к каноническому виду:

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = -u'_{\eta}/3\eta \quad \text{при } y > 0.$$

§ 5 Постановки основных краевых задач

Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ происходит некоторый процесс (физический, химический и т. д.). Чтобы полностью описать процесс надо помимо дифференциальных уравнений, моделирующих это явление, задать условия на границе области Ω (граничные условия) и условия в начальный момент времени (начальные условия). Математически это связано с неединственностью решения дифференциальных уравнений.

Например, решение обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ определяется с точностью до произвольной константы. Решение уравнения в частных производных

$$u'_x(x, y) = 0$$

определяется с точностью до произвольной функции, зависящей от y.

Существует следующие три основных типа *краевых задач* для дифференциальных уравнений 2-го порядка.

1. *Задача Коши* для параболических и гиперболических уравнений: $\Omega = \mathbb{R}^d$, задаются начальные условия, граничные условия отсутствуют.

2. *Начально-краевая задача* для параболических и гиперболических уравнений: $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, задаются начальные и граничные условия.

3. *Краевая задача* для эллиптических уравнений: $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, задаются граничные условия, начальные условия отсутствуют.

Замечание. Начально-краевые задачи иногда называют еще смешанными задачами.

Обозначим: $\Gamma = \partial\Omega$ — граница области Ω, $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Различают три основных типа граничных условий для дифференциальных уравнений 2-го порядка

1) $u = g$ — *условие Дирихле* (граничное условие 1-го рода);

2) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ — *условие Неймана* (граничное условие 2-го рода);

3) $\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g$ — *условие 3-го рода* .

Здесь и далее $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная u по направлению n, ее можно вычислять по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_k} n_k.$$

Рассмотрим конкретные постановки краевых задач для трех основных уравнений математической физики.

Уравнение теплопроводности

$$u_t' - a^2 \Delta u = f(x,t). \tag{5.1}$$

Функция $u = u(x,t)$ зависит от пространственных переменных $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ и времени t.

Задачи Коши: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (5.1) при $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ и начальному условию:

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.2}$$

при $x \in \mathbb{R}^d$.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^d$ с границей Γ; $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ.

Начально-краевая задача (н.к.з.): найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (5.1) при $x \in \Omega$, $t > 0$, начальному условию (5.2) при $x \in \Omega$ и граничному условию:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g(x,t) \quad x \in \Gamma, \quad t > 0. \tag{5.3}$$

Задача (5.1)–(5.3) называется

– *н.к.з. Дирихле,* если $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 1$ (первой н.к.з.);

– *н.к.з. Неймана,* если $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv 0$ (второй н.к.з.);

– *третьей н.к.з.,* если $\alpha \equiv 1$, $\beta = \beta(x,t) \not\equiv 0$.

Если $g \equiv 0$, то (5.3) называется однородным граничным условием, в противном случае — неоднородным.

Волновое уравнение

$$u''_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t).$$

Единственное отличие от уравнения теплопроводности заключается в том, что задаются не одно, а два начальных условия

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x).$$

Уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x). \tag{5.4}$$

Функция $u = u(x)$ зависит только от пространственных переменных $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ (уравнение Пуассона описывает стационарные процессы). Различают внутренние и внешние краевые задачи. Пусть Ω — *ограниченная* область из $\mathbb{R}^d$.

Внутренняя краевая задача: найти функцию $u = u(x)$, удовлетворяющую уравнению (5.4) при $x \in \Omega$ и граничному условию

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g(x) \quad x \in \Gamma. \tag{5.5}$$

Внешняя краевая задача: найти функцию $u = u(x)$, удовлетворяющую уравнению (5.4) при $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$, граничному условию (5.5) и условию на бесконечности

$$\begin{aligned} u(x) &= O(1), \quad \text{если } d = 2 \\ u(x) &= o(1), \quad \text{если } d > 2 \end{aligned} \qquad \text{при } |x| \to +\infty. \tag{5.6}$$

Обозначение $u(x) = O(1)$ означает, что функция u ограничена, $u(x) = o(1)$ — равномерно сходится к нулю.

Точно также как и для уравнения теплопроводности различают краевую задачу Дирихле, Неймана и третью краевую задачу.

Замечание. Для других эллиптических уравнений условия на бесконечности могут отличаться от (5.6).

§ 6 Корректно поставленные задачи

Задача называется корректно поставленной (по Адамару), если ее решение существует, единственно и устойчиво (т.е. непрерывным образом зависит от исходных данных). Любую краевую задачу для дифференциальных уравнений (как, впрочем, и любую задачу, описываемую уравнениями) можно записать в виде

$$Ax = y, \tag{6.1}$$

где x — искомый элемент пространства X, y — известный элемент пространства Y, оператор A действует из X в Y, если соответствующим образом выбрать пространства X, Y и оператор A.

Определение. Задача (6.1) называется *корректно поставленной по Адамару,* на паре нормированных пространств X и Y, если для любой правой части $y \in Y$

(а) задача (6.1) имеет решение $x \in X$;

(б) решение $x \in X$ единственно;

(в) решение устойчиво (т.е. отображение A^{-1} непрерывно).

Если выполнены только условия (а) и (б), то задача называется корректно поставленной по Коши. Устойчивость очень важна для практического решения задач, так как в реальности исходные данные задачи известны, как правило, не точно, а приближенно. Отметим несколько причин этого.

1. Исходные данные y получены в результате «измерений» (например, температуры, давления, плотности и т. д.). Любой измерительный прибор имеет погрешность.

2. Исходные данные y получены в результате решения другой задачи. Большое количество задач точно решить нельзя (например, систему нелинейных алгебраических либо дифференциальных уравнений). Их решают приближенно.

3. Пусть исходные данные известны точно по какой-то явной формуле. Для решения задачи (6.1) используется ЭВМ. Тогда любое иррациональное число, входящее в исходные данные, будет заменено на конечную дробь.

Если решение задачи неустойчиво, то небольшая погрешность в исходных может сильно повлиять на x, и, в итоге, мы получим решение далекое от реального.

Пусть существует постоянная $C > 0$ (не зависящая от x и y) такая, что любое решение (6.1) удовлетворяет оценке

$$\|x\| \leq C\|y\|. \tag{6.2}$$

Неравенство (6.2) называют *априорной* оценкой.

Теорема 6.1. *Пусть оператор A линеен, однородное уравнение $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение $x = 0$, Тогда если уравнение (6.1) имеет решение, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть уравнение (6.1) имеет два решения: x_1 и x_2. Тогда в силу линейности

$$0 = Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2)$$

и по условию теоремы $x_1 - x_2 = 0$. Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Пусть оператор A линеен и существует постоянная $C > 0$ для которой выполняется априорная оценка (6.2). Тогда, если задача (6.1) имеет решение, то оно единственно и устойчиво.*

Доказательство. Из априорной оценки вытекает, что однородное уравнение $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение. Единственность решения следует из теоремы 6.1. Докажем устойчивость. Пусть

$$Ax_1 = y_1, \quad Ax_2 = y_2.$$

Тогда в силу условия линейности

$$A(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$$

и из априорной оценки следует

$$\|x_1 - x_2\| \le C\|y_1 - y_2\|.$$

Значит, решение устойчиво, т.к. для любого числа $\epsilon > 0$ существует постоянная $\delta = \epsilon/C$ такая, что $\|x_1 - x_2\| \le \epsilon$ при $\|y_1 - y_2\| \le \delta$. Теорема доказана.

§ 7 Интегральные формулы и неравенства

Определение. Граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ принадлежит классу C^m_α (m — целое неотрицательное, $\alpha \in [0, 1]$, $m + \alpha > 0$), если для любой точки x_0 существует окрестность ω, система декартовых координат $y_1, \ldots, y_d$ и функция $f = f(y_1, \ldots, y_{d-1})$ такие, что

(а) множество $\Gamma \cap \omega$ в координатах $y_1, \ldots, y_d$ является графиком функции $y_d = f(y_1, \ldots, y_{d-1})$; множество $\Omega \cap \omega$ лежит ниже графика $y_d = f(y_1, \ldots, y_{d-1})$;

(б) функция $f \in C^m_\alpha(\omega)$.

Если $m = 0$, $\alpha = 1$, то граница Γ называется липшицевой, Ω — липшицева область. Например, граница любого прямоугольника (параллелепипеда), шара, эллипсоида липшицева. Из условия (а) вытекает, что области с разрезами (например, круг, у которого удалили точки, лежащие на радиусе) не являются липшицевыми.

Далее всюду считаем, что Ω —липшицева область; $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Будем использовать следующие формулы.

Формула Гаусса-Остроградского.

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_\Gamma F \cdot n \, ds \quad \forall F = (F_1(x), \ldots, F_d(x)) \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Формула доказывается в курсе математического анализа [4].

Формула интегрирования по частям:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} u\,dx + \int_\Gamma uvn_i\,ds \quad \forall u, v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Для доказательства достаточно в формуле Гаусса-Остроградского положить $F_k = 0$ при $k \neq i$ и $F_i = uv$. **Формулы Грина:**

$$\int_\Omega \Delta u\, v\,dx \;=\; -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\,ds \quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}),\;\; v \in C^1(\overline{\Omega})$$

— 1-я формула Грина.

$$\int_\Omega \Delta u\, v\,dx \;=\; \int_\Omega u \cdot \Delta v\,dx + \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds \quad \forall u, v \in C^2(\overline{\Omega})$$

— 2-я формула Грина.

Для доказательства достаточно учесть, что

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i$$

и применить формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u\, v\,dx &= \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v\,dx = \\
&= \sum_{i=1}^{d} \left(-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} v n_i\,ds\right) = \\
&= -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\,ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u\, v\,dx &= -\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\,ds = \\
&= \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,dx - \int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial x_i} n_i\,ds\right) + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\,ds = \\
&= \int_\Omega u \cdot \Delta v\,dx + \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds.
\end{aligned}$$

Неравенство Гельдера. Если $p, q \in (1, +\infty)$, $1/p + 1/q = 1$, то

$$\int_\Omega |f \cdot g|\,dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall f \in L^p(\Omega),\;\; g \in L^q(\Omega).$$

Напомним, что

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad \|g\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

При $p = q = 2$ неравенство Гельдера принимает вид

$$\int_\Omega |f \cdot g|\, dx \le \sqrt{\int_\Omega |f|^2\, dx} \cdot \sqrt{\int_\Omega |g|^2\, dx}.$$

Неравенство Гельдера доказывается в курсе математического и функционального анализа [4, 8].

Неравенство Фридрихса (Стеклова). Если $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $u|_\Gamma = 0$, то

$$\int_\Omega |u|^2\, dx \le C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx,$$

постоянная $C(\Omega)$ зависит только от области Ω.

Доказательство. Используем формулу интегрирования по частям, неравенство Гельдера и условие $u|_\Gamma = 0$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^2\, dx &= \int_\Omega \frac{\partial x_1}{\partial x_1} u^2\, dx = -\int_\Omega x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u^2\, dx + \int_\Gamma x_1 u^2 n_1\, ds = \\ &= -2\int_\Omega x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} u\, dx \le 2\sup_{x\in\Omega} |x_1| \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1} u\right| dx \le \\ &\le 2\sup_{x\in\Omega}|x_1| \sqrt{\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_\Omega |u|^2\, dx}.\end{aligned}$$

Осталось возвести в квадрат и сократить на $\int_\Omega |u|^2\, dx$:

$$\int_\Omega |u|^2\, dx \le 4\sup_{x\in\Omega}|x_1|^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx \le 4\sup_{x\in\Omega}|x_1|^2 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

Замечание. В качестве $C(\Omega)$ можно положить

$$C(\Omega) = 4\sup d^2(\Omega), \quad d(\Omega) = \inf_\Pi l(\Pi),$$

где inf берется по всем параллелепипедам, описанным вокруг области Ω, $l(\Pi)$ — наименьший из линейных размеров параллелепипеда Π (т.е. $d(\Omega)$ — «толщина» области Ω).

Лемма Гронуолла. *Если* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \in C^1(0,T) \cap C[0,T)$, *причем*

$$\varphi'(t) \le \alpha\varphi(t) \quad \forall t \in (0,T),$$

то

$$\varphi(t) \le \varphi(0) \cdot e^{\alpha t} \quad \forall t \in (0,T).$$

Доказательство. Положим $\psi(t) = \varphi(t)e^{-\alpha t}$. Тогда

$$\psi'(t) = \varphi'(t)e^{-\alpha t} - \alpha\varphi(t)e^{-\alpha t} = \Big(\varphi'(t) - \alpha\varphi(t)\Big)\, e^{-\alpha t} \le 0.$$

Значит, функция ψ не возрастает на $[0,T)$. Следовательно, $\psi(t) \le \psi(0) \Longrightarrow \varphi(t)e^{-\alpha t} \le \varphi(0)$. Лемма доказана.

Замечание. Доказанное утверждение является частным случаем леммы Гронуолла в дифференциальной форме.

§ 8 Теорема Коши-Ковалевской

Рассмотрим следующую *систему* дифференциальных уравнений относительно неизвестной вектор-функции $u = (u_1(x,t), \dots, u_N(x,t))$

$$\frac{\partial^{k_i} u}{\partial t^{k_i}} = F_i(x,t,u,\partial^{m_i} u) \quad i = \overline{1,N}. \tag{8.1}$$

Правая часть $F_i(x,t,u,\partial^{m_i} u)$ каждого уравнения зависит от аргументов x, t, функции u и частных производных функции u порядка не выше, чем m_i.

Определение. Система (8.1) называется *нормальной* относительно переменной t, если правая часть каждого i-го уравнения не содержит производные вектор-функции u порядка выше, чем k_i и производные по t выше, чем $k_i - 1$ по t.

Например, система вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= F_1(x,t,u,\partial^{m_1} u), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= F_2(x,t,\partial^{m_2} u) \end{aligned} \tag{8.2}$$

является нормальной относительно t, если в правая часть 1-го уравнения зависит только от

$$t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i},\ \partial\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t},$$

а 2-го уравнения только от

$$t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Уравнения Пуассона и теплопроводности являются нормальными относительно любой пространственной переменной. Это очевидно, если записать их в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} &= -\sum_{i \neq k}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - f(x), \\ a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} &= -a^2 \sum_{i \neq k}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - f(x). \end{aligned}$$

Волновое уравнение является нормальным относительно любой переменной. Его можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{1}{a^2} f(x) \quad \text{либо} \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = -a^2 \sum_{i \neq k}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x).$$

Добавим к системе (8.1) *условия Коши:*

$$\frac{\partial^k u_i(x,0)}{\partial t^k} = \varphi_{i,k}(x) \quad i = \overline{1,N}, \ \ k = \overline{0, k_i - 1}. \tag{8.3}$$

(8.1), (8.3) называется *задачей Коши* (не путать с задачей Коши из § 4).

Например, для системы (8.2) условия Коши имеют вид

$$u_1(x,0) = \varphi_{1,0}(x), \;\; u_2(x,0) = \varphi_{2,0}(x), \;\; \frac{\partial u_1}{\partial t} = \varphi_{1,1}(x)$$

Для уравнения теплопроводности либо Пуассона условия Коши принимают вид:

$$u = \varphi_1, \;\; \frac{\partial u}{\partial x_1} = \varphi_2 \quad \text{при } x_1 = 0.$$

Для волнового уравнения помимо их можно задавать также

$$u = \varphi_1, \;\; \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_2 \quad \text{при } t = 0.$$

Напомним, что функция называется аналитичной в области ω, если в любой точке области она раскладывается в сходящийся степенной ряд.

Теорема 8.1 (Коши-Ковалевской). *Если функции F_i и $\varphi_{i,k}$ аналитичны в некоторой окрестности точки (x_0, t_0), то в некоторой окрестности этой точки существует аналитичное решение задачи Коши (8.1), (8.3), причем оно единственно в классе аналитичных функций.*

Доказательство приведено в [6].

Глава II

Метод Фурье

§ 1 Ряды Фурье

Пусть X — некоторое евклидово пространство, то есть в нем введена операция скалярного произведения (x, y) элементов $x, y \in X$. Норма определяется формулой: $\|x\|^2 = (x, x)$.

Система элементов $\{e_i\}_1^\infty$ называется ортогональной в X, если

$$(e_i, e_j) = 0 \text{ при всех } i \neq j.$$

Лемма 1.1. *Если $\{e_i\}$ — ортогональная в X система, элемент $x \in X$ разлагается в ряд*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i,$$

то коэффициенты разложения равны

$$c_i = \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2}. \tag{1.1}$$

Для доказательства достаточно заметить, что из условия ортогональности вытекает справедливо равенство

$$(x, e_i) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \, , \, e_i \right) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, (e_j, e_i) = c_i (e_i, e_i),$$

Определение. Числа $c_i = \dfrac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2}$ называют *коэффициентами Фурье,* ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ — *рядом Фурье* элемента x по системе $\{e_i\}$.

Если $\{e_i\}$ — базис в X, то разложение x по базису $\{e_i\}$ совпадает с рядом Фурье, коэффициенты разложения по базису равны коэффициентам Фурье. Это вытекает из леммы 1.1.

Теорема 1.1. *Пусть $\{e_i\}_1^\infty$ — ортогональная в X система, $x \in X$, c_i — коэффициенты Фурье элемента x. Тогда* *(а) ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \|e_i\|^2$ *сходится, причем выполняется неравенство Бесселя:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2 \tag{1.2}$$

(б) если дополнительно $\|e_i\|^2 \geq \gamma > 0$*, то сходится ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$*;*

Доказательство. Используя ортогональность системы $\{e_i\}$ и формулу $(x, e_i) = c_i \|e_i\|^2$ получаем для любого натурального n

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|e_i\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i (x, e_i) =$$
$$= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|e_i\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|e_i\|^2.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \|e_i\|^2 = \|x\|^2 - \|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n \geq 1.$$

из которой следует утверждение (а).

(б) вытекает из неравенства Бесселя (1.2). Теорема доказана.

Обозначим через $L^2(a, b)$ — множество всех измеримых на (a, b) функций $f = f(x)$, для которых интеграл (Лебега)

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx$$

существует и конечен. $L^2(a, b)$ — гильбертово пространство,

$$\|f\|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^2, \quad (f, g)_{L^2(a,b)} = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Условие ортогональности функций f и g принимает вид:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = 0.$$

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортогональной в $L^2(a, b)$ системе $\{e_i(x)\}$ определяются формулами:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x) \cdot e_k(x) \, dx}{\int_a^b |e_k(x)|^2 \, dx}.$$

§ 2 Спектральные задачи

Пусть A — линейный оператор, действующий из линейного пространства X в X. Для любого числа λ уравнение

$$Ax = \lambda x \tag{2.1}$$

всегда имеет тривиальное решение. Число λ, для которого уравнение (2.1) имеет нетривиальное решение x_λ, называется *собственным числом оператора A; x_λ — собственный элемент оператора A,* отвечающий собственному числу λ. Множество собственных чисел называют *спектром.* Задача нахождения собственных чисел — *спектральная задача.* Отметим, что собственные элементы определяются с точностью до постоянного множителя (если x_λ — собственный элемент, то для любой постоянной C элемент $C \cdot x_\lambda$ также будет собственным).

Рассмотрим следующую спектральную задачу: найти числа λ, для которых краевая задача

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad x \in (0, l), \tag{2.2}$$

$$\alpha_0 y'(0) - \beta_0 y(0) = 0, \;\; \alpha_1 y'(l) + \beta_1 y(l) = 0 \tag{2.3}$$

имеет нетривиальные решения $y(x) \in C^2[0, l]$. Здесь $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ — заданные вещественные числа, причем

$$|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad \alpha_i \geq 0, \;\; \beta_i \geq 0 \quad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

(2.2.2), (2.2.3) называется *задачей Штурма-Лиувилля.*

Собственные числа задачи (2.2), (2.3) простые, то есть, любые две функции, удовлетворяющие (2.2), (2.3) при одном и том же λ отличаются на постоянный множитель. Действительно, пусть какое-то собственное число λ не является простым. Это означает, что для этого λ существуют две линейно независимые функции, удовлетворяющие (2.2), (2.3). Тогда общее решение ОДУ 2-го порядка (2.2), представляющее их линейную комбинацию, также удовлетворяет граничным условиям (2.3). Очевидно, что это неверно.

Можно доказать, что множество ее собственных значений счетно. Занумеруем собственные числа по возрастанию $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ и обозначим $y_1, y_2, \ldots$ — соответствующие им собственные функции.

Теорема 2.1. *Если выполняются условия (2.4), то*

(а) собственные числа неотрицательные при $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ и положительные во всех остальных случаях;

(б) система собственных функций $\{y_k\}$ ортогональна в $L^2(a, b)$:

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x)\, dx = 0 \quad \text{при всех } m \neq n.$$

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 = 0$. Граничные условия (2.3) принимают вид:

$$y'(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} y(0), \quad y(l) = 0.$$

(а) Умножим уравнение (2.2) на $y(x)$ и проинтегрируем по $x \in (0, l)$. Используя формулу интегрирования по частям и граничные условия, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l y''(x) y(x)\, dx + \int_0^l \lambda y(x)\, y(x)\, dx = \\ &= -\int_0^l y'(x) y'(x)\, dx + y'(x) y(x)\Big|_{x=0}^{l} + \lambda \int_0^l y^2(x)\, dx = \\ &= -\int_0^l y'^2(x)\, dx - \frac{\beta_0}{\alpha_0} y^2(0) + \lambda \int_0^l y^2(x)\, dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{\int_0^l y'^2(x)\, dx + \frac{\beta_0}{\alpha_0} y^2(0)}{\int_0^l y^2(x)\, dx} \geq 0.$$

Если $\lambda = 0$, то $y \equiv 0$, что невозможно по определению собственной функции. Значит $\lambda > 0$.

(б) Функции y_n и y_m удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} -y_n''(x) = \lambda_n y_n(x) \quad x \in (0, l), \\ y_n'(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} y_n(0), \ \ y_n(l) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -y_m''(x) = \lambda_m y_m(x) \quad x \in (0, l), \\ y_m'(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} y_m(0), \ \ y_m(l) = 0 \end{cases}$$

Используем эти уравнения и формулу интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_0^l \lambda_n y_n(x)\, y_m(x)\, dx &= -\int_0^l y_n''(x) y_m(x)\, dx = \\ &= \int_0^l y_n'(x) y_m'(x)\, dx - y_n'(x) y_m(x)\Big|_{x=0}^{l}. \end{aligned}$$

Так как $y_n'(l) y_m(l) = 0$, $y_n'(0) y_m(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} y_n(0) y_m(0)$, то

$$\lambda_n \int_0^l y_n(x) y_m(x)\, dx = \int_0^l y_n'(x) y_m'(x)\, dx + \frac{\beta_0}{\alpha_0} y_n(0) y_m(0).$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\lambda_m \int_0^l y_m(x) y_n(x)\, dx = \int_0^l y_m'(x) y_n'(x)\, dx + \frac{\beta_0}{\alpha_0} y_m(0) y_n(0).$$

Рассматривая разность двух последних равенств получаем

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l y_m(x) y_n(x)\, dx = 0.$$

Так как $\lambda_n \neq \lambda_m$, то утверждение (б) доказано.

Аналогичными свойствами обладают решения многомерной спектральной задачи:

$$\Delta u(x) + \lambda u(x) = 0 \;\; x \in \Omega, \;\; \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0 \;\; x \in \Gamma,$$

где Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^d$ границей Γ. Доказательство почти не отличается от одномерного случая.

Отметим еще одно важное свойство.

Теорема 2.2. *Собственные функции $y_k(x)$ спектральной задачи (2.2), (2.3) образуют ортогональный базис в $L^2(0,l)$, то есть любая функция $f \in L^2(0,l)$ раскладывается в сходящийся в норме $L^2(0,l)$ ряд Фурье:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x), \;\; c_k = \frac{\int_a^b f(x) \cdot y_k(x)\, dx}{\int_a^b |y_k(x)|^2\, dx}.$$

Доказательство (для многомерного случая) можно найти в [5, 6].

§ 3 Решение задачи Штурма-Лиувилля и его свойства

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля (2.2), (2.3). Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 x + C_2 && \text{при } \lambda = 0; \\ y(x) &= C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_1 \sin\sqrt{\lambda}x && \text{при } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Подберем константы C_1, C_2 и λ так, чтобы выполнялись граничные условия (2.3). Рассмотрим два случая.

Задача Дирихле. Пусть $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Граничные условия принимают вид

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Из первого вытекает: $0 = y(0) = C_1$. Из второго: $0 = y(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l$. Это равенство возможно только при $\sqrt{\lambda}l = k\pi$, где k — любое целое число. Полагая $C_2 = 1$ получаем следующее решение спектральной задачи:

$$\lambda_k = (k\pi/l)^2, \;\; y_k(x) = \sin(k\pi x/l) \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Задача Неймана. Пусть $\beta_0 = \beta_1 = 0$. Граничные условия принимают вид

$$y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

Пусть $\lambda > 0$. Тогда из из первого граничного условия вытекает: $0 = y'(0) = C_2\sqrt{\lambda}$, то есть $C_2 = 0$. Из второго: $0 = y(l) = C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l$. Следовательно, $\lambda = (k\pi/l)^2$. Если $\lambda = 0$, то очевидным решением является $y \equiv C_2$. Полагая $C_2 = 1$ получаем следующее решение спектральной задачи:

$$\lambda_k = (k\pi/l)^2, \;\; y_k(x) = \cos(k\pi x/l) \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Абсолютно аналогично решаются задача Штурма-Лиувилля в случае $\alpha_0 = \beta_1 = 0$ либо $\alpha_1 = \beta_0 = 0$. Если $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$ (либо $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$), то нахождение собственных чисел сводится к решению трансцендентного уравнения.

Рассмотрим теперь свойства ортогональных тригонометрических систем $\{\sin(k\pi x/l)\}$ и $\{\cos(k\pi x/l)\}$. Нетрудно вычислить, что

$$\int_0^l \sin^2(k\pi x/l)\,dx = \int_0^l \cos^2(k\pi x/l)\,dx = \frac{l}{2} \quad \text{при } k \geq 1. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Пусть c_k — коэффициенты Фурье функции $f \in L^2(0,l)$ по ортогональной системе* $\sin(k\pi x/l)$ *либо* $\cos(k\pi x/l)$. *Тогда ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k}$$

сходятся.

Доказательство. Так как

$$\|\sin(k\pi x/l)\|^2_{L^2(0,l)} = \|\cos(k\pi x/l)\|^2_{L^2(0,l)} = l/2 \text{ при всех } k \geq 1,$$

то по теореме 1.1 (б) сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$. Используя неравенство Коши: $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ получаем

$$\frac{|c_k|}{k} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + c_k^2\right).$$

То есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|c_k|}{k}$ мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k^2} + c_k^2\right)$ и, следовательно, сходится. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *(а) Любая функция $f \in L^2(0,l)$ раскладывается в сходящийся по норме $L^2(0,l)$ ряд Фурье:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad c_k = \frac{2}{l}\int_a^b f(x)\cdot\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx. \tag{3.2}$$

(б) Если $f \in C[0,l]$, $f' \in L^2(0,l)$, $f(0) = f(l) = 0$, то, во-первых, ряд в (3.2) сходится абсолютно и равномерно на $[0,l]$, во-вторых, числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ сходится.

Доказательство. Так как $\{\sin(k\pi x/l)\}_{k=1}^{\infty}$ — система собственных функций задачи (2.2), (2.3), то утверждение (а) вытекает из теоремы 2.2 и формулы (3.1). Докажем (б).

Пусть $f \in C[0,l]$, $f' \in L^2(0,l)$. Используя формулу интегрирования по частям и условия $f(0) = f(l) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{l}\int_a^b f(x)\cdot \sin(k\pi x/l)\,dx = \\ &= -\frac{l}{k\pi}\frac{2}{l}\int_a^b f(x)\cdot \Big(\cos(k\pi x/l)\Big)'\,dx = \\ &= \frac{l}{k\pi}\frac{2}{l}\int_a^b f'(x)\cos(k\pi x/l)\,dx = \frac{\alpha_k}{k}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_k = \frac{2}{l}\int_a^b \frac{l}{\pi} f'(x)\cos(k\pi x/l)\,dx$$

— коэффициенты Фурье функции $\frac{l}{\pi}f'(x) \in L^2(0,l)$ по системе $\cos(k\pi x/l)$. Тогда по лемме 3.1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|/k$ сходится. Так как

$$|c_k \sin(k\pi x/l)| \le |c_k| \quad x \in [0,l],$$

то ряд в (3.2) мажорируется сходящимся числовым рядом. Следовательно, он сходится абсолютно и равномерно на $[0,l]$. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *(а) Любая функция $f \in L^2(0,l)$ раскладывая в сходящийся в норме $L^2(0,l)$ ряд Фурье:*

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{3.3}$$

$$c_k = \frac{2}{l}\int_a^b f(x)\cdot\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx \quad k = \overline{0,\infty}.$$

(б) Если $f \in C[0,l]$, $f' \in L^2(0,l)$, то ряд в (3.3) сходится абсолютно и равномерно на $[0,l]$; числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$ сходится;

(в) Если $f \in C^1[0,l]$, $f'' \in L^2(0,l)$, $f'(0) = f'(l) = 0$, то ряд, полученный из (3.3) почленным дифференцированием, сходится абсолютно и равномерно на $[0,l]$; числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} k|c_k|$ сходится.

Доказательство утверждений (а) и (б) повторяет рассуждения теоремы 3.1. Для доказательства (в) нужно дважды применить формулу интегрирования по частям к интегралам, определяющим коэффициенты c_k.

Спектральная задача с условием периодичности:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(x+2\pi) = y(x) \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

обладает свойствами аналогичными задаче Штурма-Лиувилля (2.2), (2.3). Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} &\lambda_k = k^2 && k = \overline{0,\infty}, \\ &y_0(x) \equiv a_0, \quad y_k(x) = a_k\cos kx + b_k \sin kx && k = \overline{1,\infty}, \end{aligned}$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные. В дальнейшем будем использовать следующий классический результат

Теорема 3.3. *Пусть* $f \in C[0,2\pi]$, $f' \in L^2(0,2\pi)$, $f(0) = f(2\pi)$. *Тогда функция* $f = f(x)$ *раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся на* $[0,2\pi]$ *ряд Фурье:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big),$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx,$$

числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ *сходится.*

§ 4 Однородное одномерное уравнение теплопроводности

Рассмотрим задачу Дирихле для однородного одномерного уравнения теплопроводности:

$$u'_t(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0 \qquad x \in (0,l), \ \ t > 0, \tag{4.1}$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \in (0,l), \tag{4.2}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad t > 0. \tag{4.3}$$

Решим ее *методом Фурье.* Его еще называют методом *разделения переменных.*

1 этап (разделение переменных). Ищем нетривиальные частные решения уравнения (4.1) вида $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя в (4.1) получаем

$$X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0 \implies \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Последнее равенство возможно только, если левая и правая часть равны одной и той же константе. Обозначим ее через $-\lambda$. Получаем

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Следовательно,

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \qquad t > 0, \tag{4.4}$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad x \in (0,l). \tag{4.5}$$

Подставляя в граничные условия $u(x,t) = X(x)T(t)$ получаем

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{4.6}$$

Таким образом, если функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями с некоторым (одинаковым) числом λ уравнений (4.4)–(4.6), то функция $u(x,t) = X(x)T(t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.1) и граничным условиям (4.3). Осталось найти λ для которых задача (4.5), (4.6) имеет нетривиальные решения. То есть надо решить задачу Штурма-Лиувилля

2 этап. Спектральная задача (4.5), (4.6) решена в предыдущем параграфе. Ее решение

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Общее решение уравнения (4.4): $T(t) = C \cdot \exp(-\lambda a^2 t)$. Решение при $\lambda = \lambda_k$:

$$T_k(t) = c_k \exp\left(\frac{-k\pi a t}{l}\right), \tag{4.7}$$

c_k — произвольная константа.

3 этап. Функции

$$u_k = X_k(x)T_k(t) = c_k \exp\left(\frac{-k\pi a t}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

удовлетворяют однородным линейным уравнениям (4.1), (4.3). Значит составленный из них ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{-k\pi a t}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{4.8}$$

является решением (4.1), (4.3), если, разумеется, он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и один раз по t. Осталось подобрать коэффициенты c_k так, чтобы выполнялось начальное условие (4.2). Подставим ряд (4.8) в (4.2):

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

— разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе $\sin(k\pi x/l)$. Согласно теореме 3.1 коэффициенты равны

$$c_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx. \tag{4.9}$$

Таким образом, решение начально-краевой задачи Дирихле (4.1)—(4.3) определяется рядом (4.8), коэффициенты — формулами (4.9), при условиях: ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и один раз по t. Вопрос об условиях гарантирующих сходимость будет рассмотрен в § 3 гл. III.

Задача (4.1), (4.2) с граничными условиями Неймана:

$$u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0 \quad t > 0,$$

решается абсолютно аналогично. Для функции $X(x)$ получаем спектральную задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \;\; x \in (0,l), \quad X'(0) = X'(l) = 0,$$

решение которой имеет вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right), \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \qquad k = \overline{0, \infty}.$$

Функции $T_k(t)$ определяются (4.7) при $k \geq 1$ и добавляется функция $T_0(t) = c_0/2$. В итоге, получаем формулу

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{-k\pi a t}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$
$$c_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \qquad k = \overline{0, \infty}.$$

Таким же способом можно решить задачу (4.1), (4.2) со смешанными граничными условиями:

$$u(0,t) = u'_x(l,t) = 0 \text{ либо } u'_x(0,t) = u(l,t) = 0.$$

§ 5 Однородное одномерное волновое уравнение

Решим методом Фурье начально-краевую задачу Дирихле для уравнения свободных колебаний струны (однородное одномерное волновое уравнение):

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0 \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x) \qquad x \in (0,l), \tag{5.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad t > 0. \tag{5.3}$$

1 этап (разделение переменных). Ищем частные решения уравнения (5.1) вида $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя в (5.1) получаем

$$X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0 \implies \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Последнее равенство возможно только, если левая и правая часть равны одной и той же константе. Обозначим ее через $-\lambda$. Получаем

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Следовательно,

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \qquad t > 0, \tag{5.4}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad x \in (0,l). \tag{5.5}$$

Подставляя в граничные условия $u(x,t) = X(x)T(t)$ получаем

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{5.6}$$

Таким образом, если функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями с некоторым (одинаковым) λ уравнений (5.4)–(5.6), то функция $u(x,t) = X(x)T(t)$ удовлетворяет волновому уравнению (5.1) и граничным условиям (5.3).

2 этап. Решение спектральной задачи (5.5), (5.6)

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Общее решение уравнения (4.4):

$$T(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda a^2} t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda a^2} t),$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Решение при $\lambda = \lambda_k$:

$$T_k(t) = a_k \cos\left(\frac{k\pi a t}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi a t}{l}\right), \tag{5.7}$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

3 этап. Функции

$$u_k = X_k(x)T_k(t) = \left(a_k \cos\left(k\pi a l^{-1} t\right) + b_k \sin\left(k\pi a l^{-1} t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$

удовлетворяют однородным линейным уравнениям (5.1), (5.3). Значит составленный из них ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(k\pi a l^{-1} t\right) + b_k \sin\left(k\pi a l^{-1} t\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{5.8}$$

является решением (5.1), (5.3), если, разумеется, он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать. Осталось подобрать коэффициенты a_k и b_k так, чтобы выполнялись начальные условия (5.2). Подставим ряд (5.8) в первое начальное условие:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

— разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе $\sin(k\pi x/l)$. Согласно теореме 3.1

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx. \tag{5.9}$$

Подставим ряд (5.9) во второе начальное условие:

$$u'_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi a}{l} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

— разложение функции $\psi(x)$ в ряд Фурье по системе $\sin(k\pi x/l)$. Согласно теореме 3.1

$$b_k \frac{k\pi a}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx.$$

Следовательно,

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx. \tag{5.10}$$

Таким образом, решение начально-краевой задачи Дирихле (5.1)—(5.3) определяется рядом (5.8), коэффициенты — формулами (5.9), (5.10) при условиях: ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать. Вопрос об условиях гарантирующих сходимость будет рассмотрен в § 2 гл. IV.

Задача (5.1), (5.2) с граничными условиями Неймана:

$$u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0 \quad t > 0,$$

решается абсолютно аналогично. Для функции $X(x)$ получаем спектральную задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \;\; x \in (0,l), \quad X'(0) = X'(l) = 0,$$

решение которой имеет вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right), \;\; X_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Функции $T_k(t)$ определяются (5.7) при $k \geq 1$ и добавляется $T_0(t) = a_0/2 + b_0 t/2$. В итоге, получаем формулу

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2} t + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos\left(k\pi a l^{-1} t\right) + b_k \sin\left(k\pi a l^{-1} t\right) \Big) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \\ a_k = {} & \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \;\; b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx. \end{aligned}$$

Таким же способом можно решить задачу (5.1), (5.2) со смешанными граничными условиями:

$$u(0,t) = u'_x(l,t) = 0 \text{ либо } u'_x(0,t) = u(l,t) = 0.$$

§ 6 Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Рассмотрим задачу

$$\Delta u(x) = 0 \;\; x \in \Omega, \quad u(x) = g(x) \;\; x \in \Gamma = \partial\Omega. \tag{6.1}$$

Если $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < a^2\}$ — шар радиуса a с центром в точке $x = 0$, то для решения задачи удобно перейти к полярным координатам (ρ, φ). Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Задача (6.1) принимает вид

$$\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u(\rho,\varphi)}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u(\rho,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad \rho \in [0, a),\ \varphi \in [0, 2\pi], \tag{6.2}$$

$$u(a, \varphi) = g(\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{6.3}$$

Так как точка $(\rho, \varphi + 2\pi)$ совпадает с (ρ, φ), то нужно добавить условие периодичности

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = (\rho, \varphi) \quad \rho \in [0, 2\pi], \ \ \varphi \in \mathbb{R}. \tag{6.4}$$

Решим задачу (6.2)–(6.4) методом Фурье.

1 этап (разделение переменных). Ищем частные решения уравнения (6.2) вида $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$. Подставляя в (6.2) получаем

$$\rho\left(\rho R'\right)'\Phi + R\Phi'' = 0 \implies \rho\left(\rho R'\right)'\Phi = -R\Phi'' \implies \frac{\rho\left(\rho R'\right)'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Последнее равенство возможно только, если левая и правая часть равны одной и той же константе. Обозначим ее через λ. Получаем

$$\frac{\rho\left(\rho R'\right)'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

Следовательно,

$$\rho\left(\rho R'(\rho)\right)' + \lambda R(\rho) = 0 \qquad \rho \in [0, a), \tag{6.5}$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 \qquad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Подставляя в условие периодичности $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ получаем

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) = 0 \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

Таким образом, если функции $R(\rho)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями с некоторым (одинаковым) числом λ уравнений (6.5)–(6.7), то функция $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (6.2) и условию периодичности (6.4). Осталось найти λ для которых задача (6.6), (6.7) имеет нетривиальные решения.

2 этап. Решение спектральной задачи (6.6), (6.7) имеет вид

$$\begin{aligned} &\lambda_k = k^2 && k = \overline{0, \infty}, \\ &\Phi_0(\varphi) \equiv a_0, \quad \Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi && k = \overline{1, \infty}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

Простой подстановкой проверяется, что частными решениями ОДУ 2-го порядка (6.5) являются линейно-независимые функции

$$\begin{aligned} 1,\ \ \ln\rho \qquad &\text{при } \lambda = 0,\\ \rho^{\sqrt{\lambda}},\ \ \rho^{-\sqrt{\lambda}} \qquad &\text{при } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение равно

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 + C_2 \ln\rho & \text{при } \lambda = 0,\\ C_1\rho^{\sqrt{\lambda}} + C_2\rho^{-\sqrt{\lambda}} & \text{при } \lambda > 0. \end{cases}$$

Функции $\ln\rho$ и $\rho^{-\sqrt{\lambda}}$ не определены в точке $\rho = 0$. Поэтому, нужно положить $C_2 = 0$. Полагая $C_1 = 1$ получаем следующие решения уравнения (6.5) при $\lambda = \lambda_k = k^2$:

$$R_k(\rho) = \rho^k \quad k = \overline{0,\infty}.$$

3 этап. Функции

$$u_k = R_k(\rho)\Phi_k(\varphi) = \rho^k(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi)$$

удовлетворяют однородным линейным уравнениям (6.2), (6.4). Значит составленный из них ряд

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\rho^k(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi)$$

является решением (6.2), (6.4), если, разумеется, он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать. Осталось подобрать коэффициенты a_k и b_k так, чтобы выполнялось граничное условие (6.3). Удобно сделать замену $a_0 = \alpha_0/2$, $a_k = \alpha_k/a^k$, $b_k = \beta_k/a^k$. Тогда ряд принимает вид

$$u(\rho,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k(\alpha_k\cos k\varphi + \beta_k\sin k\varphi). \tag{6.9}$$

Подставим его в (6.3):

$$u(a,\varphi) = g(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi + \beta_k\sin k\varphi)$$

— разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе $\{cos k\varphi, \sin k\varphi\}$. Согласно теореме 3.2 коэффициенты равны

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi, \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi. \tag{6.10}$$

Таким образом, решение краевой задачи Дирихле (6.1) определяется в полярных координатах рядом (6.9), коэффициенты — формулами (6.10), при условиях: ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать. Вопрос об условиях гарантирующих сходимость будет рассмотрен в **??** гл. III.

§ 7 Другие краевые задачи для уравнения Лапласа

Изложенный в предыдущем параграфе метод пригоден и для решения следующих задач для уравнения Лапласа.

Внешняя краевая задача Дирихле. $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < a^2\}$,

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \\ u(x) &= g(x) \quad x \in \Gamma, \\ u(x) &= O(1) \quad \text{при } |x| \to +\infty. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Последнее уравнение означает, что функция $u(x)$ должна быть ограниченной при $|x| \to +\infty$. Единственное отличие от внутренней задачи (6.1) возникает при выборе функций $R_k(\rho)$. Так как функции $\ln \rho$ и $\rho^{\sqrt{\lambda}}$ стремятся к $+\infty$ при $|x| \to +\infty$, то полагают

$$R_0 \equiv 1, \quad R_k = \rho^{-\sqrt{\lambda}} = \rho^{-k} \text{ при } k \geq 1.$$

В итоге, приходим к формуле

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi),$$

коэффициенты ряда определяются формулами (6.10).

Задача Неймана в круге. $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < a^2\}$,

$$\Delta u(x) = 0 \;\; x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \;\; x \in \Gamma.$$

$n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ (в данном случае $n = x/a$). Нетрудно проверить, что производная по нормали в полярных координатах имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial n} = a u'_\rho \text{ на } \Gamma.$$

Следовательно, граничное условие можно записать в виде:

$$u'_\rho(a, \varphi) = \frac{1}{a} g(\varphi) \;\; \varphi \in [0, 2\pi].$$

Необходимым условием разрешимости задачи является (см. **??** гл. V)

$$\int_\Gamma g\, ds = a \int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Решение задачи, как и в случае задачи Дирихле, определяется рядом (6.9). Коэффициенты ряда находятся из граничного условия:

$$u'_\rho(a, \varphi) = \frac{1}{a} g(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi).$$

— разложение функции $g(\varphi)$ в ряд Фурье (нужно учесть, что $\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,d\varphi = 0$) Используя теорему 3.2 заключаем

$$\alpha_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi, \quad \beta_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi.$$

Отметим, что коэффициент α_0 может принимать любые значения, так как решение задачи Неймана для уравнения Лапласа определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Смешанная краевая задача в круговом секторе. Пусть область Ω в полярных координатах имеет вид $\Omega = \{(\rho,\varphi) : \rho \in [0,a),\ \varphi \in (0,\theta)\}$. Границу Ω можно разбить на три части: Γ_1 — отрезок, лежащий в Ω и на луче $\varphi = 0$; Γ_2 отрезок, лежащий в Ω и на луче $\varphi = \theta$; Γ_3 — часть окружности $|x| = a$, отсеченная указанными выше лучами. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \qquad x \in \Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \qquad x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\\ u &= g(x) \qquad x \in \Gamma_3. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{\rho}u'_\varphi \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\rho}u'_\varphi \text{ на } \Gamma_2.$$

Значит задача в полярных координатах принимает вид

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2} &= 0 \qquad \rho \in [0,a),\ \varphi \in [0,\theta],\\ u'_\varphi(\rho,0) = u'_\varphi(\rho,\theta) &= 0 \qquad \rho \in (0,a),\\ u(a,\varphi) &= g(\varphi) \qquad \varphi \in [0,\theta]. \end{aligned}$$

Условие периодичности по очевидной причине отсутствует. Разделяя переменные, получаем для $R(\rho)$ дифференциальное уравнение (6.5), для функции Φ спектральную задачу

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 \ \ \varphi \in (0,\theta), \quad \Phi'(0) = \Phi'(\theta) = 0.$$

Они имеют решения

$$\begin{gathered} \lambda_k = \left(\frac{k\pi\varphi}{\theta}\right)^2, \ \ \Phi_k(\varphi) = \cos\left(\frac{k\pi}{\theta}\right)\\ R_k(\rho) = \rho^{\sqrt{\lambda_k}} = \rho^{k\pi/\theta} \quad k = \overline{0,\infty}. \end{gathered}$$

Следовательно, функция $u = u(\rho,\varphi)$ определяется рядом

$$u(\rho,\varphi) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{k\pi}{\theta}} \cos\left(\frac{k\pi\varphi}{\theta}\right).$$

Коэффициенты находятся из граничного условия на Γ_3:

$$u(a,\varphi) = g(\varphi) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{k\pi\varphi}{\theta}\right)$$

— разложение функции $g(\varphi)$ в ряд Фурье по $\cos\left(\frac{k\pi}{\theta}\right)$,

$$c_k = \frac{2}{\theta}\int_0^{\theta} g(\varphi)\cos\left(\frac{k\pi\varphi}{\theta}\right)\, d\varphi \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Краевые задачи в кольце. Пусть Ω — кольцо, ограниченное окружностями Γ_1, Γ_2 с центами в точке $x = 0$ радиуса r_1 и r_2 соответственно, $r_1 < r_2$. Решение задачи

$$\Delta u(x) = 0 \ \ x \in \Omega, \ \ u(x) = g_i(x) \ \ x \in \Gamma_i \ \ i = 1, 2$$

удобно искать в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где u_1, u_2 — решения задач:

$$\begin{aligned} &\Delta u_1(x) = 0 \ \ x \in \Omega, \ \ u_1|_{\Gamma_1} = g_1(x), \ \ u|_{\Gamma_2} = 0, \\ &\Delta u_2(x) = 0 \ \ x \in \Omega, \ \ u_2|_{\Gamma_1} = 0, \qquad\quad u_2|_{\Gamma_2} = g_2(x). \end{aligned}$$

Найдем, например, функцию u_1. Переходя к полярным координатам и разделяя переменные, получаем для функций $\Phi(\varphi)$ задачу (6.6), (6.7), ее решение определяется формулами (6.8). Для функций $R(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho\left(\rho R'(\rho)\right)' + \lambda R(\rho) = 0 \quad \rho \in (r_1, r_2),$$

его общее решение

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 + C_2 \ln\rho & \text{при } \lambda = 0, \\ C_1\rho^{\sqrt{\lambda}} + C_2\rho^{-\sqrt{\lambda}} & \text{при } \lambda > 0. \end{cases}$$

Из граничного условия $u_1|_{\Gamma_2} = 0$ вытекает

$$R(r_2) = 0.$$

Следовательно, если положить $C_2 = 1$, то

$$C_1 = -\ln a_2 \text{ при } \lambda = 0, \quad C_1 = -r_2^{-2\sqrt{\lambda}}.$$

Подставляя $\lambda = \lambda_k = k^2$ получаем

$$R_0(\rho) = \ln(\rho/r_2), \ \ R_k(\rho) = \rho^{-k} - \left(r_2^{-2}\rho\right)^k$$

и решение определяется рядом

$$u_1(\rho,\varphi) = a_0 \ln(\rho/r_2) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\rho^{-k} - \left(r_2^{-2}\rho\right)^k\right)\left(a_k\cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right).$$

Коэффициенты ряда находятся из граничного условия на Γ_1:

$$u_1(r_1,\varphi) = g_1(\varphi).$$

§ 8 Решение неоднородных уравнений с правой частью специального вида

Неоднородные уравнения можно сводить к однородным используя следующее свойство: общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения однородного и частного решения неоднородного. Рассмотрим это на следующем примере:

$$\begin{aligned} u_t'(x,t) - a^2 u_{xx}''(x,t) = f(x,t) \qquad & x \in (0,l), \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad & x \in (0,l), \\ u(0,t) = 0, \ \ u(l,t) = 0 \qquad & t > 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Пусть нам известна функция w, удовлетворяющая уравнениям (8.1) без начального условия, то есть

$$w_t'(x,t) - a^2 w_{xx}''(x,t) = f(x,t) \qquad x \in (0,l), \ \ t > 0, \tag{8.2}$$

$$w(0,t) = 0, \ \ w(l,t) = 0 \qquad t > 0. \tag{8.3}$$

Ищем решение задачи (8.1) в виде: $u = w + v$, где v — новая неизвестная функция. Она должна удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} v_t'(x,t) - a^2 v_{xx}''(x,t) = 0 \qquad & x \in (0,l), \ \ t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) - w(x,0) \qquad & x \in (0,l), \\ v(0,t) = 0, \ \ v(l,t) = 0 \qquad & t > 0. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Задача (8.4) решается методом Фурье, описанном в § 4. Осталось выяснить каким образом можно найти решение уравнений (8.2), (8.3). Эту задачу можно свести к решению ОДУ в следующих случаях

1. $f = f(x)$, т.е. правая часть не зависит от t. Если искать решение в виде $w = w(x)$, то приходим к задаче

$$-a^2 w''(x) = f(x), \ \ w(0) = w(l) = 0.$$

2. $f = f(x)e^{\omega t}$. Если искать решение в виде $w = w(x)e^{\omega t}$, то уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\omega w(x) e^{\omega t} - a^2 w''(x) e^{\omega t} = f(x) e^{\omega t},$$

следовательно,

$$w''(x) - \frac{\omega}{a^2} w(x) = -\frac{1}{a^2} f(x), \ \ w(0) = w(l) = 0.$$

3. $f = f(x)\sin \alpha t$. Если искать решение в виде

$$w = w_1(x) \sin \alpha t + w_2(x) \cos \alpha t,$$

то уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\begin{aligned} & \alpha w_1(x) \cos \alpha t - \alpha w_2(x) \sin \alpha t - \\ & \qquad - a^2 \Big(w_1(x) \sin \alpha t + w_2(x) \cos \alpha t \Big) = f(x) \sin \alpha t. \end{aligned}$$

Оно выполняется, если, например,

$$\alpha w_1 - a^2 w_2'' = 0, \ \ -\alpha w_2 - a^2 w_1'' = f(x).$$

4. $f = \sum\limits_{i=1}^{m} e^{\omega_i t}(f_i(x)\cos(\alpha_i t) + f_i(x)\sin(\alpha_i t))$. В этом случае решение ищется в виде:

$$w = \sum_{i=1}^{m} e^{\omega_i t}(w_{1,i}(x)\cos(\alpha_i t) + w_{2,i}(x)\sin(\alpha_i t)).$$

Задача с неоднородными граничными условиями сводится к задаче с нулевыми граничными условиями с помощью замены вида: $u = \tilde{u} + g$, где $\tilde{u}$ — новая неизвестная функция, а g — любая функция, удовлетворяющая граничным условиям. Например, в случае

$$u(0,t) = g_1(t), \ \ u(l,t) = g_2(t)$$

можно положить

$$g = g_1(t)\frac{l-t}{l} + g_2(t)\frac{t}{l}.$$

§ 9 Решение неоднородных уравнений методом Фурье

Метод Фурье пригоден и для решения неоднородных уравнений. Рассмотрим, например, задачу (8.1) предыдущего параграфа. Функцию u можно искать в виде: $u = v + w$, где v и w — решения задач:

$$\begin{aligned} v_t'(x,t) - a^2 v_{xx}''(x,t) = 0 \qquad & x \in (0,l), \ \ t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) \qquad & x \in (0,l), \\ v(0,t) = 0, \ \ v(l,t) = 0 \qquad & t > 0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

$$w_t'(x,t) - a^2 w_{xx}''(x,t) = f(x,t) \qquad x \in (0,l), \ \ t > 0, \tag{9.2}$$

$$w(x,0) = 0 \qquad x \in (0,l), \tag{9.3}$$

$$w(0,t) = 0, \ \ w(l,t) = 0 \qquad t > 0. \tag{9.4}$$

Задача (9.1) решается методом Фурье, описанном в § 4. Решим задачу (9.2)–(9.4). Решение ищем в виде:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{9.5}$$

Если этот ряд сходится, то он удовлетворяет граничным условиям (9.4). Для фиксированного момента времени t функцию $x \to f(x,t)$ (зависящую только от аргумента x), можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\, dx.$$

Подставляя ряд (9.5) в уравнение (9.2), меняя местами знаки суммы и производных, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'(t)+a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k(t)\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Это равенство выполняется, если, например,

$$T'(t)+\omega_k^2 T(t)=f_k(t) \quad (\omega_k=(ak\pi/l)^2). \tag{9.6}$$

Из начального условия $w(x,0)=0$ вытекает

$$T_k(0)=0. \tag{9.7}$$

Таким образом, функции T_k находятся как решение задачи Коши (9.6), (9.7). Они равны

$$T_k(t)=\int_0^t f_k(\tau)e^{\omega_k^2(\tau-t)}\,d\tau.$$

Глава III

Параболические уравнения

Пусть $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $d \geq 1$. Из теории квадратичных форм вытекает, что уравнение

$$u'_t - \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

является параболическим, если матрица $((a_{i,j}(x,t)))$, является положительно определенной (либо отрицательно определенной) в любой точке. В этой главе мы рассмотрим параболические уравнения вида (1) с оператором Лапласа в главной части:

$$u'_t - a^2 \Delta u + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u + c \cdot u = f(x,t),$$

где

$$\overrightarrow{b} = \big(b_1(x,t), \ldots, b_d(x,t)\big), \quad \nabla u = \big(u'_{x_1}, \ldots, u'_{x_d}\big).$$

§ 1 Принцип максимума

Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^d$ с границей Γ. Обозначим

$$Q_T = \Omega \times (0, T]$$

— пространственно-временной цилиндр. $C^{2,1}(Q_T)$ — множество функций, которые дважды непрерывно дифференцируемы по x и один раз по t на Q_T. Введем дифференциальный оператор

$$Lu \equiv -a^2 \Delta u + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u + cu,$$

вектор-функция $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}(x,t)$ и скалярная функция $c = c(x,t)$ заданы в Q_T, вещественное $a^2 > 0$. Рассмотрим сначала случай $c \equiv 0$.

Лемма 1.1. *Пусть $c \equiv 0$. Тогда, если функция $u \in C^{2,1}(Q_T)$ удовлетворяет неравенству*

$$u'_t + Lu > 0 \ \ (< 0) \qquad \text{в } Q_T,$$

то она не имеет в Q_T точек минимума (максимума).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: существует $(x_0, t_0) \in Q_T$ — точка минимума функции $u(x,t)$. Тогда согласно необходимым условиям минимума в точке (x_0, t_0) выполняется

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \geq 0 \;\; i = \overline{1,d}, \\
&u'_t = 0 \quad \text{при } t_0 < T \quad \text{и} \quad u'_t \leq 0 \quad \text{при } t_0 = T.
\end{aligned}$$

Следовательно, $u'_t + Lu \leq 0$ в (x_0, t_0). Противоречие с условием леммы. Случай $u'_t + Lu < 0$ в Q_T рассматривается аналогично. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что функция u не имеет в Q_T точек *локального* минимума (максимума).

Т е о р е м а 1.1 (принцип максимума). *Любое решение $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ уравнения*

$$u'_t - a^2 \Delta u + \overrightarrow{b}(x,t) \cdot \nabla u = 0 \;\; \text{в } Q_T \tag{1.1}$$

удовлетворяет оценке

$$m(u) \leq u(x,t) \leq M(u) \quad \forall (x,t) \in Q_T, \tag{1.2}$$

в которой

$$\begin{aligned}
m(u) &= \min\left\{\inf_{x\in\Omega} u(x,0), \inf_{x\in\Gamma,\, t\in[0,T]} u(x,t)\right\}, \\
M(u) &= \max\left\{\sup_{x\in\Omega} u(x,0), \sup_{x\in\Gamma,\, t\in[0,T]} u(x,t)\right\}.
\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $u_\epsilon = u + \epsilon t$, $\epsilon > 0$. Тогда

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - a^2 \Delta u_\epsilon + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u_\epsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u\right) + \epsilon = \epsilon > 0 \text{ в } Q_T.$$

Значит к функции u_ϵ можно применить лемму 1.1 согласно которой функция u_ϵ не имеет в Q_T точек минимума. Следовательно, минимум u_ϵ достигается либо при $x \in \Gamma$ либо при $t = 0$, то есть

$$m(u_\epsilon) \leq u_\epsilon(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q_T.$$

Переходя к пределу при $\epsilon \to 0+$ получаем нижнюю оценку в (1.2). Верхняя оценка доказывается аналогично. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно сформулировать так: *любое решение однородного параболического уравнения (1.1) достигает своего максимального и минимального значений либо в начальный момент времени $t = 0$ либо на границе области Γ .*

Рассмотрим теперь случай $c \not\equiv 0$.

Лемма 1.2. *Пусть $c = c(x,t) \geq 0$ в Q_T. Тогда, если функция $u \in C^{2,1}(Q_T)$ удовлетворяет неравенству*

$$u'_t + Lu > 0 \;\; (< 0) \qquad \text{в } Q_T,$$

то она не имеет в Q_T точек отрицательного минимума (положительного максимума).

Доказательство такое же как и у леммы 1.1. Предположим противное: существует $(x_0, t_0) \in Q_T$ — точка минимума функции $u(x,t)$, причем $u(x_0,t_0) < 0$. Точно также как и при доказательстве леммы 1.1 из необходимых условий минимума вытекает

$$u'_t - a^2\Delta u + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u \leq 0 \text{ в точке } (x_0, t_0).$$

Так как $c(x_0,t_0)u(x_0,t_0) \leq 0$, то $u'_t + Lu \leq 0$ в (x_0,t_0). Противоречие с условием леммы. Лемма доказана.

Теорема 1.2 (принцип максимума). *Пусть $c = c(x,t) \geq 0$ в Q_T. Тогда любое решение $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ уравнения*

$$u'_t - a^2\Delta u + \overrightarrow{b}(x,t) \cdot \nabla u + c(x,t) \cdot u = 0 \text{ в } Q_T \tag{1.3}$$

удовлетворяет оценке

$$\min\{m(u), 0\} \leq u(x,t) \leq \max\{M(u), 0\} \quad \forall (x,t) \in Q_T, \tag{1.4}$$

$m(u)$ и $M(u)$ определены в теореме 1.1.

Доказательство такое же как и у теоремы 1.1. Положим $u_\epsilon = u + \epsilon t$. Тогда

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + Lu_\epsilon \equiv \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - a^2\Delta u_\epsilon + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u_\epsilon + c \cdot u_\epsilon = \epsilon + \epsilon t \cdot c > 0 \quad \text{в } Q_T.$$

Значит можно применить к функции u_ϵ лемму 1.2 согласно которой u_ϵ не имеет в Q_T отрицательных минимумов. Следовательно, либо функция u_ϵ положительная в Q_T либо ее минимум достигается при $x \in \Gamma$ или $t = 0$. Это означает

$$\min\{0, m(u)\} \leq u_\epsilon(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q_T.$$

Переходя к пределу при $\epsilon \to 0+$ получаем нижнюю оценку в (1.4). Верхняя доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание. При $c(x,t) < 0$ принцип максимума не выполняется. Если в левой части уравнения (1.3) поменять знак у одного из слагаемых, то принцип максимума не будет выполняться. Например, в одномерном случае (т.е. $d = 1$) функция $u(x,t) = e^t \sin x$ является решением уравнений

$$u'_t - u''_{xx} - 2u = 0, \;\; u'_t + u''_{xx} = 0 \qquad \text{в } Q_T = (-\pi, \pi) \times (0, T],$$

а экстремальные значения, равные ± 1, достигаются в точках $(\pm\pi/2, T) \in Q_T$.

§ 2 Единственность и устойчивость начально-краевой задачи Дирихле

Рассмотрим начально-краевую задачу Дирихле для параболического уравнения:

$$u'_t - a^2\Delta u + \overrightarrow{b}(x,t)\cdot\nabla u + c(x,t)\cdot u = f(x,t) \text{ в } Q_T, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad x \in \Gamma, \;\; t \in (0,T). \tag{2.3}$$

Здесь $Q_T \equiv \Omega \times (0,T]$, Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^d$ с границей Γ.

Определение. Функция $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющая (2.1)–(2.3) называется *классическим решением* начально-краевой задачи (2.1)–(2.3).

Из принципа максимума (теорема 1.2) вытекает

Следствие 2.1. *Пусть $f \equiv 0$, $c(x,t) \geq 0$ в Q_T, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\Gamma \times [0,T])$. Тогда любое классическое решение задачи (2.1)–(2.3) удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{C(\overline{Q}_T)} \leq \max\left\{\|\varphi\|_{C(\overline{\Omega})},\ \|g\|_{C(\Gamma\times[0,T])}\right\}.$$

Используя этот результат нетрудно доказать

Теорема 2.1. *Пусть $c(x,t) \geq 0$ в Q_T, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\Gamma \times [0,T])$. Тогда*

(а) задача (2.1)–(2.3) имеет не более одного классического решения;

(б) классическое решение задачи (2.1)–(2.3) устойчиво по φ и g в следующем смысле: если u_1 и u_2 — решения (2.1)–(2.3) с исходными данными (f,φ_1,g_1) и (f,φ_2,g_2) соответственно, то

$$\|u_1 - u_2\|_{C(\overline{Q}_T)} \leq \max\left\{\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C(\overline{\Omega})},\ \|g_1 - g_2\|_{C(\Gamma\times[0,T])}\right\}.$$

Доказательство. (а) Пусть существует два решения u_1 и u_2 задачи (2.1)–(2.3). Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнениям

$$u'_t - a^2\Delta u + \overrightarrow{b}(x,t)\cdot\nabla u + c(x,t)\cdot u = 0 \text{ в } Q_T,$$

$$u(x,0) = 0 \quad x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = 0 \quad x \in \Gamma, \;\; t \in (0,T).$$

Применяя следствие 2.1 получаем $u = 0$. Следовательно, $u_1 = u_2$. Единственность решения доказана.

(б) Пусть u_1 и u_2 — решения (2.1)–(2.3) с исходными данными (f, φ_1, g_1) и (f, φ_2, g_2) соответственно. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} &u'_t - a^2 \Delta u + \overrightarrow{b}(x,t) \cdot \nabla u + c(x,t) \cdot u = 0 \text{ в } Q_T, \\ &u(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \quad x \in \Omega, \\ &u(x,t) = g_1(x,t) - g_2(x,t) \quad x \in \Gamma, \ \ t \in (0,T). \end{aligned}$$

Осталось применить следствие 2.1. Теорема доказана.

Замечание. Классическое решение задачи (2.1)–(2.3) устойчиво и по правой части f. Это вытекает из априорной оценки:

$$\|u\|_{C(\overline{Q}_T)} \le \max\left\{ \|\varphi\|_{C(\overline{\Omega})}, \ \|g\|_{C(\Gamma \times [0,T])} \right\} + C\|f\|_{C(\overline{Q}_T)}$$

(постоянная C зависит только от T), для доказательства которой достаточно заметить, что функция $v = u + t(K + \epsilon)$ ($v = u - t(K + \epsilon)$), $K = \|f\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $\epsilon > 0$ удовлетворяет неравенству

$$v'_t - a^2 \Delta v + \overrightarrow{b}(x,t) \cdot \nabla v + c(x,t) \cdot v > 0 \ \ (< 0) \qquad \text{в } Q_T$$

и применить лемму 1.2.

Замечание. Решение задачи (2.1)–(2.3) будет единственным и в случае $c \le 0$ (см. § 4).

§ 3 Разрешимость задачи Дирихле для однородного одномерного уравнения теплопроводности (обоснование метода Фурье)

Пусть $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q_T \equiv [0,l] \times (0,T]$. Рассмотрим задачу

$$u'_t - a^2 u''_{xx} = 0 \quad \text{ в } Q_T, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in [0,l], \tag{3.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

Следуя методу Фурье (§ 4 гл. II) ищем решение в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{3.4}$$

где

$$u_k(x,t) = a_k e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx.$$

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi \in C[0,l]$, $\varphi' \in L^2(0,l)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда* *(а) ряд (3.4) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q}_T$;*

(б) для любого $\tau > 0$ ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \tag{3.5}$$

сходятся абсолютно и равномерно на $[0, l] \times [\tau, T]$;

(в) функция u, определяемая формулой (3.4), является классическим решением задачи (3.1)–(3.3).

Доказательство. (а) Согласно теореме 3.1 гл. II

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{3.6}$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на $[0, l]$. Так как

$$|u_k(x,t)| \leq |a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)| \quad \forall k \geq 1, \ \ x \in [0, l], \ \ t \in [0, T],$$

то ряд (3.6) мажорирует ряд (3.4) в $\overline{Q}_T$. Значит последний сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q}_T$.

(б) Так как

$$|a_k| \leq \frac{2}{l} \int_0^l |\varphi(x)|\, dx = C \quad k = \overline{1, \infty},$$

постоянная C не зависит от k, то нетрудно заметить, что при всех $t \in [\tau, T]$, $x \in [0, l]$ выполняются

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right| &= \left|a_k (\frac{k\pi a}{l})^2 e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right| \leq \\
&\leq C\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 k^2 e^{-k^2\omega}, \quad \omega = (\pi a/l)^2 \tau > 0, \\
\left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| &= \left|a_k (\frac{k\pi}{l}) e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right| \leq \\
&\leq C\left(\frac{\pi}{l}\right) k e^{-k^2\omega}, \\
\left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right| &= \left|a_k (\frac{k\pi}{l})^2 e^{-(\frac{k\pi a}{l})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right| \leq \\
&\leq C\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 k^2 e^{-k^2\omega},
\end{aligned}$$

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k^2\omega}$ сходится. Значит функциональные ряды (3.5) мажорируются на $[0, l] \times [\tau, T]$ сходящимися числовыми рядами. Значит (3.5) сходятся абсолютно и равномерно на $[0, l] \times [\tau, T]$.

(в) Из утверждений (а), (б), формулы (3.6) и равенств

$$u_k(0,t) = u_k(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = 0$$

вытекает, что $u \in C(\overline{Q}_T) \cap C^{2,1}([0,l] \times [\tau,T])$ и удовлетворяет (3.2), (3.3), а также (3.1) в $[0,l] \times [\tau,T]$ для любого $\tau > 0$. Значит выполняется утверждение (в). Теорема доказана.

Из теорем 2.1 и 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть $\varphi \in C[0,l]$, $\varphi' \in L^2(0,l)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда классическое решение задачи (3.1)–(3.3) существует, единственно, устойчиво (по φ) и определяется формулой (3.4).*

З а м е ч а н и е. Нетрудно заметить, что ряд составленный из производных функций u_k любого порядка сходится абсолютно и равномерно по $[0,l] \times [\tau,T]$ для любого $\tau > 0$. Значит классическое решение задачи (3.1)–(3.3) бесконечное число раз дифференцируемо в Q_T.

§ 4 Единственность решения 3-й краевой задачи и задачи Неймана

Пусть $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q_T \equiv \Omega \times (0,T]$, Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^d$ с границей Γ, $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Рассмотрим задачу

$$u'_t - a^2 \Delta u + c(x,t) \cdot u = f(x,t) \text{ в } Q_T, \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \Omega, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + \alpha u = g(x,t) \quad x \in \Gamma, \ \ t \in (0,T). \tag{4.3}$$

При $\alpha = 0$ она называется начально-краевой задачей Неймана, при $\alpha \neq 0$ — 3-й начально-краевой задачей. Отметим, что при $\alpha \geq 0$, $c \geq 0$ для нее справедлив принцип максимума (в **??** гл. Vон будет доказан для эллиптического уравнения). В этом разделе мы докажем единственность решения другим способом (метод энергетических неравенств) не накладывая условия на знак коэффициента $c(x,t)$.

О п р е д е л е н и е. Функция $u = u(x,t)$ удовлетворяющая (4.1)–(4.3) называется

– *классическим решением,* если $u \in C^{2,1}(Q_T)$ и u, $\nabla u \in C(\overline{Q}_T)$;

– *регулярным решением,* если $u \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

Очевидно, что любое регулярное решение является классическим.

Пусть $u \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ — решение уравнения (4.1). Умножим уравнение (4.1) на u и проинтегрируем по $x \in \Omega$ используя 1-ю формулу Грина (см. **??**). Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_\Omega u'_t u \, dx &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega u^2 \, dx, \\ -\int_\Omega \Delta u u \, dx &= \int_\Omega \nabla u \nabla u \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} u \, ds, \end{aligned}$$

получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\,dx + \int_\Omega \left(a^2|\nabla u|^2 + c|u|^2\right)\,dx - a^2\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}u\,ds = \int_\Omega fu\,ds, \tag{4.4}$$

которое является основой для получения априорных оценок решений и, как следствие, для доказательства единственности и устойчивости решения. Мы ограничимся следующим результатом.

Теорема 4.1. *Пусть функция $\alpha = \alpha(x,t)$ — неотрицательная и интегрируемая по Γ для всех $t \in [0,T]$; функция $c = c(x,t)$ интегрируемая и ограниченная снизу на Q_T. Тогда задача (4.1)–(4.2) имеет не более одного регулярного решения.*

Доказательство. Пусть существует два решения: u_1 и u_2. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}
&u'_t - a^2\Delta u + c(x,t)\cdot u = 0 \text{ в } Q_T,\\
&u(x,0) = 0 \quad x \in \Omega,\\
&\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + \alpha u = 0 \quad x \in \Gamma,\ \ t \in (0,T).
\end{aligned}$$

Равенство (4.4) принимает вид (учитываем, что $f \equiv 0$, $\partial u/\partial n = -\alpha u$):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\,dx + \int_\Omega \left(a^2|\nabla u|^2 + c|u|^2\right)\,dx + a^2\int_\Gamma \alpha|u|^2\,ds = 0 \text{ при } t > 0,$$

Так как $\alpha > 0$, то

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2\,dx \le -\int_\Omega c\,u^2\,dx \le -C\int_\Omega u^2\,dx,$$

где C — константа, ограничивающая снизу функцию $c(x,t)$. Положим

$$\theta(t) = \int_\Omega u^2(x,t)\,dx.$$

Тогда $\theta'(t) \le -2C\theta(t)$ и значит можно применить лемму Гронуолла (см. § 7), согласно которой

$$\theta(t) \le \theta(0)e^{-2Ct}.$$

Так как $u(x,0) = 0$, то $\theta(0) = 0$ и поэтому $\theta(t) = 0$ для всех $t > 0$. Это возможно только при $u \equiv 0$, то есть при $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

Замечание. Используя точно такие же рассуждения можно доказать единственность регулярного решения начально-краевой задачи Дирихле (2.1)–(2.3) при условии: функции

$$c(x,t) \quad \text{и} \quad -\sum_{i=1}^d \frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}$$

ограничены снизу и интегрируемы на Q_T. Следует только учесть, что если $u(x,t) = 0$ $x \in \Gamma$, то

$$\int_\Omega \overrightarrow{b}\cdot\nabla u\,u\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^d b_i\frac{\partial u^2}{\partial x_i}\,dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^d \frac{\partial b_i}{\partial x_i}u^2\,dx.$$

§ 5 Стабилизация решения уравнения теплопроводности

Говорят, что решение $u(x,t)$ стабилизируется по времени, если существует конечный предел

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = u_0(x).$$

Рассмотрим начально-краевую задачу Дирихле для уравнения теплопроводности

$$u'_t - a^2\Delta u = f(x) \text{ в } Q_\infty = \Omega \times (0,+\infty), \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \Omega, \tag{5.2}$$

$$u(x,t) = g(x) \quad x \in \Gamma, \;\; t \in (0,T). \tag{5.3}$$

Эта задача описывает, например, процесс теплообмена в области Ω (u — температура), в случае когда источники тепла внутри области и температура на границе Ω не меняются со временем. Очевидно, что температура $u(x,t)$ должна стабилизироваться. Докажем, что она сходится к решению $u_0(x)$ задачи

$$-a^2\Delta u_0(x) = f(x) \;\; x \in \Omega, \quad u_0(x) = g(x) \;\; x \in \Gamma. \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. *Пусть существуют решения $u = u(x,t) \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0,+\infty))$ начально-краевой задачи (5.1)–(5.3) и $u_0(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ стационарной задачи (5.4). Тогда*

$$\int_\Omega |u(x,t) - u_0(x)|^2\,dx \le \int_\Omega |\varphi(x) - u_0(x)|^2\,dx \cdot e^{-C_1 a^2 t} \to 0 \tag{5.5}$$

при $t \to +\infty$; $C_1 = 2/C$, $C = C(\Omega)$ — постоянная из неравенства Фридрихса (см. § 7 гл. I).

Доказательство. Положим $v = u - u_0$. Учитывая (5.1)–(5.4) получаем для функции $v(x,t)$ уравнения:

$$v'_t - a^2\Delta v = 0 \text{ в } Q_T,$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - u_0(x) \quad x \in \Omega,$$

$$v(x,t) = 0 \quad x \in \Gamma, \;\; t \in (0,T).$$

Значит можно применить к v формулу (4.4), которая в нашем случае принимает вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega v^2\,dx + \int_\Omega a^2|\nabla v|^2 dx = 0.$$

Так как функция $x \to v(x,t)$ равна нулю при $x \in \Gamma$, то можно справедливо Фридрихса (см. § 7 гл. I)

$$\int_\Omega |v|^2\,dx \le C\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \iff -\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \le -\frac{1}{C}\int_\Omega |v|^2\,dx$$

Из двух последних соотношений оценка
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega v^2\,dx = -\int_\Omega a^2|\nabla v|^2 dx \le -\frac{a^2}{C}\int_\Omega v^2\,dx.$$
Следовательно, функция
$$\theta(t) = \int_\Omega v^2\,dx$$
удовлетворяет неравенству: $\theta'(t) \le (-2a^2/C)\theta(t)$. Применяя лемму Гронуолла (см. **??**) получаем
$$\theta(t) \le \theta(0)e^{-(2a^2/C)t}.$$
Так как
$$\theta(0) = \int_\Omega |\varphi(x) - u_0(x)|^2\,dx, \quad \theta(t) = \int_\Omega |u(x,t) - u_0(x)|\,dx,$$
то теорема доказана.

§ 6 Неустойчивость решения уравнения теплопроводности с обратных ходом по времени

Рассмотрим задачу
$$u'_t - a^2\Delta u = f(x,t) \text{ в } Q_T, \tag{6.1}$$
$$u(x,T) = \varphi(x) \quad x \in \Omega, \tag{6.2}$$
$$u(x,t) = g(x,t) \quad x \in \Gamma, \ \ t \in (0,T). \tag{6.3}$$

Она отличается от рассмотренных ранее тем, что задается условие не в начальный, а в конечный момент времени. Замена
$$\tau = T - t$$
приводит задачу (6.1)–(6.3) к виду:
$$-u'_\tau - a^2\Delta u = f(x) \text{ в } Q_T, \tag{6.4}$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \Omega, \tag{6.5}$$
$$u(x,\tau) = g(x,\tau) \quad x \in \Gamma, \ \ \tau \in (0,T), \tag{6.6}$$

то есть к начально-краевой задаче для уравнения (6.4), которое отличается от уравнения теплопроводности знаком при производной по времени. (6.4) называют уравнением теплопроводности с обратным ходом по времени.

Оказывается, что решение задачи (6.4)–(6.6) (и, следовательно, задачи (6.1)–(6.3)) неустойчиво.

Например, в одномерном случае (т.е. $d = 1$) функция
$$u(x,\tau) = \frac{1}{k}e^{k^2\tau}\sin(kx)$$

является решением задачи

$$
\begin{aligned}
&-u'_\tau - u''_{xx} = 0 \qquad \text{в } (0,\pi)\times(0,T]\\
&u(x,0) = \varphi(x),\\
&u(0,\tau) = u(\pi,\tau) = 0
\end{aligned}
$$

при $\varphi(x) = \frac{1}{k}\sin(kx)$. Так как

$$\|\varphi(x)\|_{C[0,\pi]} \to 0 \text{ при } k \to +\infty,$$

то и решение задачи, если бы оно было устойчивым, стремилось бы к нулю при $k \to +\infty$. Однако,

$$\max_{x\in[0,\pi],\,\tau\in[0,T]} |u(x,\tau)| = \frac{1}{k}e^{kT} \to +\infty \text{ при } k \to +\infty.$$

Следовательно, решение неустойчиво.

Глава IV
Гиперболические уравнения

Из теории квадратичных форм вытекает, что уравнение

$$u''_{tt} + \alpha(x,t)u'_t - \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

является гиперболическим, если матрица, составленная из $a_{i,j}(x,t)$, является положительно определенной (либо отрицательно определенной) в любой точке. В этой главе мы ограничимся рассмотрением волнового уравнения

$$u''_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t).$$

Отметим, что в случае постоянных коэффициентов α, $a_{i,j}$, b_i, c уравнение (1) с помощью замены функции вида

$$u(x,t) = v(x,t)\cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{d} \beta_i x_i + \gamma\right)$$

приводится к

$$v''_{tt} - \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \tilde{f}(x,t).$$

Сделав в последнем линейную замену переменных получаем волновое уравнение.

§ 1 Единственность решения начально-краевых задач

Пусть $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q_T \equiv \Omega \times (0,T]$, Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ с границей Γ, $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u''_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t) \quad \text{в } Q_T, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u'_t(x,0) = \psi(x) \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g(x,t) \quad x \in \Gamma, \;\; t \in (0,T), \tag{1.3}$$

где α и β — заданные вещественные числа. Задача (1.1)–(1.3) называется начально-краевой задачей

— Дирихле при $\alpha = 0$, $\beta = 1$;

— Неймана при $\alpha = 1$, $\beta = 0$;

— 3-го рода при $\alpha, \beta \neq 0$.

Определение. Функция $u = u(x,t) \in C^2(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющая уравнениям (1.1)–(1.3), называется *регулярным решением* н.к.з. (1.1)–(1.3).

Пусть функция $u = u(x,t) \in C^2(\overline{Q}_T)$ является решением уравнения (1.1). Умножим (1.1) на u_t' и проинтегрируем по $x \in \Omega$. Учитывая, что

$$\begin{aligned}
u''_{tt}u'_t &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}({u'_t}^2), \\
-\int_\Omega \Delta u \cdot u'_t\,dx &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u'_t\,dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} u'_t\,ds, \\
\nabla u \cdot \nabla u'_t &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'_t}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2
\end{aligned}$$

(второе соотношение вытекает из 1-й формулы Грина **??**), получаем

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left({u'_t}^2 + a^2|\nabla u|\right)\,dx = \int_\Omega f \cdot u'_t\,dx + a^2\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}u'_t\,ds.$$

Если ввести обозначение

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left({u'_t}^2 + a^2|\nabla u|\right)\,dx \quad \text{— \textit{интеграл энергии,}}$$

то полученную формулу можно записать в виде:

$$E'(t) = \int_\Omega f \cdot u'_t\,dx + a^2\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}u'_t\,ds \quad \forall t \geq 0. \tag{1.4}$$

Используя (1.4) можно получать различные априорные оценки решений начально-краевых задач для волнового уравнения, на основании которых доказываются теоремы единственности и устойчивости решения. Мы докажем единственность.

Теорема 1.1. *Пусть $\alpha = 0$, $\beta = 1$ либо $\alpha = 1$, $\beta \geq 0$. Тогда начально-краевая задача (1.1)–(1.3) имеет не более одного регулярного решения.*

Доказательство. Пусть существует два решения: u_1 и u_2. Тогда из разность $u = u_1 - u_2$ является решением задачи:

$$\begin{aligned}
&u''_{tt} - a^2\Delta u = 0 \quad \text{в } Q_T, \\
&u(x,0) = 0, \;\; u'_t(x,0) = 0 \quad x \in \Omega, \\
&\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0 \quad x \in \Gamma, \;\; t \in (0,T).
\end{aligned}$$

Формула (1.4) принимает вид

$$E'(t) = a^2 \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} u'_t \, ds \quad \forall t \geq 0. \tag{1.5}$$

Докажем, что $E(t) \equiv 0$. Прежде всего отметим

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left({u'_t}^2(x,0) + a^2 |\nabla u(x,0)| \right) dx = 0,$$

в силу условий $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = 0$.

Если $\alpha = 0$, $\beta = 1$, то

$$u(x,t) = 0 \implies u'_t(x,t) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma.$$

Подставляя в (1.5) получаем $E'(t) = 0$, то есть $E(t) = E(0) = 0$.

Если $\alpha = 1$, $\beta \geq 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\beta u,$$

следовательно,

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} u'_t \, ds = -\beta \int_\Gamma u \cdot u'_t \, ds = -\frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \int_\Gamma u^2 \, ds.$$

Подставляя в (1.5) получаем

$$0 = \frac{d}{dt} \left(E(t) + \frac{\beta}{2} \int_\Gamma u^2 \, ds \right) \implies$$

$$E(t) + \frac{\beta}{2} \int_\Gamma u^2 \, ds = E(0) + \frac{\beta}{2} \int_\Gamma u^2(x,0) \, ds \leq E(0) = 0,$$

так как $\beta \geq 0$. Следовательно, $E(t) \equiv 0$.

Доказали, что $E(t) \equiv 0$. Это возможно только при

$$u'_t \equiv 0, \ \ \nabla u \equiv 0 \implies u \equiv Const.$$

Так как $u(x,0) = 0$, то $u \equiv 0$. То есть $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

§ 2 Разрешимость задачи Дирихле для уравнения свободных колебаний струны (сходимость метода Фурье)

Пусть $u = u(x,t)$, $(x,t) \in [0,l] \times [0,T] \equiv Q_T$. Рассмотрим задачу:

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0 \qquad \text{в } Q_T, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ u'_t(x,0) = \psi(x) \quad x \in [0,l], \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Она описывает колебания струны с закрепленными концами (в точках $x = 0$ и $x = l$) при отсутствие внешних сил (т.е. свободные колебания). Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — это положение и скорость струны в начальный момент времени.

Из физических и математических соображений очевидно, что функции φ и ψ не могут быть произвольными.

Лемма 2.1. *Если задача (2.1)–(2.3) имеет регулярное решение, то $\varphi \in C^2[0,l]$, $\psi \in C^1[0,1]$, причем*

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть u — регулярное решение. Так как $u \in C^2(\overline{Q}_T)$, то, в частности, функции $x \to u(x,0)$ и $x \to u'_t(x,0)$ принадлежат $C^2[0,l]$ и $C^1[0,l]$ соответственно. Используя уравнения (2.1)–(2.3), получаем

$$\left.\begin{array}{lll} u(x,0) = \varphi(x) & \Longrightarrow & u(0,0) = \varphi(0) \\ u(0,t) = 0 & \Longrightarrow & u(0,0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \varphi(0) = 0;$$

$$\left.\begin{array}{lll} u''_{xx}(x,t) = -a^{-2}u''_{tt}(x,t) & \Longrightarrow & u''_{xx}(0,0) = -a^{-2}u''_{tt}(0,0) \\ u(0,t) = 0 & \Longrightarrow & u''_{tt}(0,0) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \Longrightarrow & u''_{xx}(0,0) = \varphi''(0) \end{array}\right\}$$

Следовательно, $\varphi''(0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{lll} u'_t(x,0) = \psi(x) & \Longrightarrow & u'_t(0,0) = \psi(0) \\ u(0,t) = 0 & \Longrightarrow & u'_t(0,0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \psi(0) = 0.$$

Равенства нулю в точке $x = l$ доказываются абсолютно также. Лемма доказана.

Следуя методу Фурье (см. **??** гл. II) ищем решение в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{2.5}$$

где

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$
$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx.$$

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi \in C^2[0,l]$, $\psi \in C^1[0,1]$, φ''', $\psi'' \in L^2(0,l)$ и выполняются условия согласования (2.4). Тогда ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{Q}_T$, функция $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ является регулярным решением задачи (2.1)–(2.3).

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что функции φ, ψ разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся на $[0,l]$ ряды Фурье (см. теорему **??** гл. II)

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{2.7}$$

Докажем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Big(|a_k| + |b_k|\Big). \tag{2.8}$$

Три раза применяя формулу интегрирования по частям и учитывая условия: φ, $\varphi'' = 0$ при $x = 0, l$, получаем

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\,dx = -\frac{2}{l}\frac{l}{k\pi}\int_0^l \varphi(x)\left(\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right)'\,dx = \\
&= \frac{2}{l}\frac{l}{k\pi}\int_0^l \varphi'(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\,dx = \\
&= \frac{2}{l}\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\int_0^l \varphi'(x)\left(\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right)'\,dx = \\
&= -\frac{2}{l}\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\int_0^l \varphi''(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\,dx = \\
&= \frac{2}{l}\left(\frac{l}{k\pi}\right)^3\int_0^l \varphi'''(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Аналогично, два раза применяя формулу интегрирования по частям получаем

$$b_k = -\frac{2}{k\pi a}\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\int_0^l \psi''(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\,dx.$$

Следовательно,

$$a_k = \frac{\alpha_k}{k^3}, \quad b_k = \frac{\beta_k}{k^3},$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2}{l}\int_0^l (l/\pi)^3\varphi'''(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\,dx, \\
\beta_k &= -\frac{2}{l}\int_0^l (l/\pi)^3 a^{-1}\psi''(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\,dx
\end{aligned}$$

— коэффициенты Фурье функций $(l/\pi)^3\varphi'''$, $-(l/\pi)^3 a^{-1}\psi'' \in L^2(0,l)$ по ортогональным системам $\cos(k\pi x/l)$ и $\sin(k\pi x/l)$ соответственно. Тогда (лемма **??**) ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|/k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_k|/k$ сходятся. Так как

$$k^2(|a_k| + |b_k|) = |\alpha_k|/k + |\beta_k|/k,$$

то ряд (2.8) также сходится.

Вычисляя, если нужно, производные и учитывая, что $|\sin(\ldots)| \leq 1$, $|\cos(\ldots)| \leq 1$, получаем для всех $k \geq 1$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$

$$\begin{aligned}
|u_k| &\leq |a_k| + |b_k| \leq k^2 \Big(|a_k| + |b_k|\Big);\\
|\partial u_k/\partial t| &\leq \frac{k\pi a}{l}\Big(|a_k| + |b_k|\Big) \leq (\pi a/l)k^2 \Big(|a_k| + |b_k|\Big);\\
|\partial^2 u_k/\partial t^2| &\leq \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \Big(|a_k| + |b_k|\Big) = (\pi a/l)^2 k^2 \Big(|a_k| + |b_k|\Big);\\
|\partial u_k/\partial x| &\leq \frac{k\pi}{l}\Big(|a_k| + |b_k|\Big) \leq (\pi/l)k^2 \Big(|a_k| + |b_k|\Big);\\
|\partial^2 u_k/\partial x^2| &\leq \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \Big(|a_k| + |b_k|\Big) = (\pi/l)^2 k^2 \Big(|a_k| + |b_k|\Big).
\end{aligned}$$

Таким образом сходящийся числовой ряд (2.8), умноженный на соответствующие константы, мажорирует функциональные ряды (2.6). Значит они сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{Q}_T$. Следовательно, $u \in C^2(\overline{Q}_T)$. Из (2.7) и формул:

$$\begin{aligned}
&u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad u'_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right);\\
&\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad u_k(0,t) = u_k(l,t) = 0
\end{aligned}$$

вытекает выполнение уравнений (2.1)–(2.3). Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть $\varphi \in C^2[0,l]$, $\psi \in C^1[0,1]$, φ''', $\psi'' \in L^2(0,l)$ и выполняются условия согласования (2.4). Тогда регулярное решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) существует, единственно и определяется рядом (2.5).*

Замечание. Существование и единственность регулярного решения задачи (2.1)–(2.3) можно доказать без условий на φ''' и ψ'' (см. **??**), однако, в этом случае ряд (2.5) может расходиться.

Замечание. Абсолютно аналогично рассматривается задача Неймана (то есть краевые условия (2.2) заменяются на $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$).

§ 3 Задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны

Рассмотрим задачу Коши

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u'_t(x,0) = \psi(x) \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Положим $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$. Функция $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, удовлетворяющая уравнениям (3.1), (3.2), называется регулярным решением задачи Коши (3.1), (3.2).

Лемма 3.1. *Любое решение $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ уравнения (3.1) представимо в виде*

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at), \tag{3.3}$$

функции θ_1, $\theta_2 \in C^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. В переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

уравнение (3.1) принимает вид:

$$u''_{\xi\eta} = 0.$$

Так как $\dfrac{\partial u'_\eta}{\partial \xi} = 0$, то u'_η не зависит от ξ, то есть $u'_\eta = C(\eta)$, следовательно,

$$u(\xi, \eta) = \int C(\eta)\, d\eta + \theta_1,$$

где θ_1 не зависит от η, то есть $\theta_1 = \theta_1(\xi)$. Возвращаясь к старым переменным получаем формулу (3.3). Лемма доказана.

Очевидно, что любая функция вида (3.3) является решением уравнения (3.1). Формула (3.3) называется *формулой Даламбера.*

Подберем функции θ_1 и θ_2 так, чтобы выполнялись начальные условия (3.1). Подставляя (3.3) в (3.2) получаем

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = u(x,0) = \theta_1(x) + \theta_2(x) \quad \Longrightarrow \\
&\quad \theta_1(y) + \theta_2(y) = \varphi(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}, && (3.4)\\
&\psi(x) = u'_t(x,0) = -a\theta'_1(x) + a\theta'_2(x) \quad \Longrightarrow \\
&\quad -\theta'_1(x) + \theta'_2(x) = \frac{1}{a}\psi(x) \quad \Longrightarrow \\
&\quad -\theta_1(y) + \theta_2(y) = \frac{1}{a}\int_0^y \psi(\xi)\, d\xi + C \quad \forall y \in \mathbb{R}, && (3.5)
\end{aligned}$$

где $C = -\theta_1(0) + \theta_2(0)$. Складывая и вычитая формулы (3.4), (3.5) получаем

$$\begin{aligned}
\theta_2(y) &= \frac{1}{2}\varphi(y) + \frac{1}{2a}\int_0^y \psi(\xi)\, d\xi + \frac{C}{2},\\
\theta_1(y) &= \frac{1}{2}\varphi(y) - \frac{1}{2a}\int_0^y \psi(\xi)\, d\xi - \frac{C}{2}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные формулы в (3.3) приходим к

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi - \int_0^{x-at} \psi(\xi)\, d\xi\right).$$

Простой подстановкой проверяется, что функция u удовлетворяет начальным условиям (3.2). Учитывая, что

$$-\int_0^{x-at} \psi(\xi)\, d\xi = \int_{x-at}^{0} \psi(\xi)\, d\xi$$

полученную формулу можно записать в виде

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi \tag{3.6}$$

— *формула Даламбера* решения задачи Коши (3.1), (3.2). Очевидно, что если $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, то $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ и непрерывным образом зависит от φ и ψ. Таким образом, мы доказали

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда регулярное решение задачи Коши (3.1), (3.2) существует, единственно, устойчиво (по φ и ψ) и определяется формулой Даламбера (3.6).*

Замечание. Существуют формулы для решения аналогичной 2-х мерной задачи (формула Пуассона), 3-х мерной (формула Кирхгофа) и задачи Коши для неоднородного волнового уравнения.

§ 4 Задача Коши на полуоси

Рассмотрим уравнение свободных колебаний струны на полуоси:

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0 \quad x>0, t>0. \tag{4.1}$$

В этом случае для выделения единственного решения надо помимо начальных условий

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u'_t(x,0) = \psi(x) \quad x>0, \tag{4.2}$$

задать граничное условие при $x=0$. Например, условие Дирихле

$$u(0,t) = 0 \quad t>0. \tag{4.3}$$

Эту задачу можно свести к задаче Коши из предыдущего параграфа и решить с помощью формулы Даламбера.

Из доказательства леммы 2.1 вытекает

Лемма 4.1. *Если задача (4.1)–(4.3) имеет регулярное решение, то*

$$\varphi \in C^2[0,+\infty), \;\; \varphi(0) = \varphi''(0) = 0, \quad \psi \in C^1[0,+\infty), \;\; \psi(0) = 0. \tag{4.4}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0 && x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \\ &u(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \;\; u'_t(x,0) = \tilde{\psi}(x) && x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ее решение определяется формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi)\, d\xi. \tag{4.6}$$

Лемма 4.2. *Пусть функции $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$ и $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$ нечетные. Тогда решение задачи Коши (4.5) удовлетворяет уравнению (3.4).*

Для доказательства достаточно воспользоваться формулой

$$u(0,t) = \frac{\tilde{\varphi}(-at) + \tilde{\varphi}(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \tilde{\psi}(\xi)\, d\xi$$

и учесть, что в силу нечетности $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ выполняется

$$\tilde{\varphi}(-at) + \tilde{\varphi}(at) = 0, \;\; \int_{-at}^{at} \tilde{\psi}(\xi)\, d\xi = 0.$$

Продолжим φ и ψ на всю вещественную ось нечетным образом и обозначим полученные функции через $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ соответственно, то есть

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \ge 0, \\ -\varphi(-x) & \text{при } x < 0. \end{cases} \qquad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{при } x \ge 0, \\ -\psi(-x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Лемма 4.3. *Пусть выполняются условия (4.4). Тогда $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Докажем, что $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$. Так как $\varphi(0) = 0$, то функция $\tilde{\varphi}$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Очевидно, что $\tilde{\varphi}'$ непрерывна при $x \neq 0$. Используя нечетность $\tilde{\varphi}$ и условие $\varphi(0) = \tilde{\varphi}(0) = 0$, получаем

$$\tilde{\varphi}'(0-) = \lim_{x \to 0-} \frac{\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-\varphi(-x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\varphi(x)}{x} = \varphi'(0).$$

Так как $\tilde{\varphi}'(0+) = \varphi'(0) = \tilde{\varphi}'(0-)$, то $\tilde{\varphi}'$ непрерывна в точке $x = 0$. Из нечетности $\tilde{\varphi}$ вытекает нечетность $\tilde{\varphi}''$. Тогда из условий $\varphi'' \in C[0,+\infty)$, $\varphi''(0) = 0$ следует непрерывность функции $\tilde{\varphi}''$. Доказали, что $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$. Утверждение $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия (4.4). Тогда регулярное решение задачи (4.1)–(4.3) существует, единственно, устойчиво (по начальным данным) и определяется формулой (4.6), в которой $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ — нечетное продолжение функций φ и ψ на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Так как $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$ (лемма 4.3), то существует регулярное решение $u(x,t)$ задачи Коши (4.5), которое определяется формулой Даламбера

(4.6). Так как функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ нечетные, то функция u удовлетворяет граничному условию (4.2) (лемма 4.2). Значит она является регулярным решением (4.1)–(4.3).

Докажем единственность. Пусть существует два решения: u_1 и u_2. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ является решением задачи:

$$\begin{aligned}
&u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0 \quad x > 0, t > 0,\\
&u(x,0) = 0, \;\; u'_t(x,0) = 0 \quad x > 0,\\
&u(0,t) = 0 \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Положим $\tilde{u}(x,t) = u(x,t)$ при $x \geq 0$ и $\tilde{u}(x,t) = -u(-x,t)$ при $x < 0$. Так как

$$u(0,t) = u''_{xx}(0,t) = 0 \quad t \geq 0,$$

то по лемме 4.3 функция $\tilde{u}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x при $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Тогда нетрудно проверить, что $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Так как

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}''_{xx} = (-u(-x,t))''_{xx} = -u''_{xx}(-x,t),\\
&\tilde{u}''_{tt} = (-u(-x,t))''_{tt} = -u''_t(-x,t)
\end{aligned} \qquad \text{при } x < 0,$$

то

$$\tilde{u}''_{tt} - a^2 \tilde{u}''_{xx} = -\left(u''_t(-x,t) - a^2 u''_{xx}(-x,t)\right) = 0 \text{ при } x < 0,$$

то есть функция $\tilde{u}$ удовлетворяет уравнению (4.1) при $x < 0$. Она удовлетворяет этому же уравнению и при $x \geq 0$. Следовательно,

$$\tilde{u}''_{tt} - a^2 \tilde{u}''_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0.$$

Нетрудно заметить, что

$$\tilde{u}(x,0) = 0, \;\; \tilde{u}'_t(x,0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}.$$

То есть функция $\tilde{u}$ является регулярным решением задачи Коши с нулевыми начальными данными. Регулярное решение единственно. Значит $\tilde{u} \equiv 0$ и, поэтому, $u \equiv 0$, $u_1 \equiv u_2$. Единственность доказана. Устойчивость решения очевидна. Теорема доказана.

Замечание. Абсолютно аналогично решается задача (4.1)–(4.3), если условие Дирихле (4.2) заменить на условие Неймана:

$$u'_x(0,t) = 0.$$

В этом случае функции φ и ψ надо продолжать на $\mathbb{R}$ *четным* образом. Условия на φ и ψ:

$$\varphi \in C^2[0,+\infty), \;\; \varphi'(0) = 0, \quad \psi \in C^1[0,+\infty), \;\; \psi'(0) = 0.$$

§ 5 Решение начально-краевых задач с помощью формулы Даламбера

Начально-краевая задача

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0 \quad x \in (0,l), \;\; t \in (0,T], \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u'_t(x,0) = \psi(x) \quad x \in [0,l], \tag{5.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad t \in [0,T]. \tag{5.3}$$

сводится к задаче Коши (4.5), если положить

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \qquad \vdots & \\ -\varphi(-x) & \text{при } x \in [-l,0), \\ \varphi(x) & \text{при } x \in [0,l], \\ -\varphi(l-x) & \text{при } x \in (l,2l], \\ \varphi(2-x) & \text{при } x \in (2l,3l), \\ \qquad \vdots & \end{cases} \tag{5.4}$$

и аналогичным образом определить функцию $\tilde{\psi}$. Тогда

$$\tilde{\varphi}(x) = -\tilde{\varphi}(-x) = -\tilde{\varphi}(l-x), \;\; \tilde{\psi}(x) = -\tilde{\psi}(-x) = -\tilde{\psi}(l-x) \tag{5.5}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Согласно лемме 2.1 необходимыми условиями существования регулярного решения начально-краевой задачи (5.1)–(5.3) являются

$$\begin{array}{l} \varphi \in C^2[0,l], \;\; \varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = 0 \\ \psi \in C^1[0,1], \;\; \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{array} \tag{5.6}$$

Точно также как и в предыдущем параграфе доказываются

Лемма 5.1. *Пусть $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$ и $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$ — любые функции, удовлетворяющие (5.5). Тогда для решения $u(x,t)$ задачи Коши (4.5) выполняются граничные условия (5.3).*

Лемма 5.2. *Пусть выполняются условия (5.6), функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ определяются (5.4). Тогда $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$ и $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$. (5.3).*

Из этих двух лемм очевидным образом вытекает

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия (5.6). Тогда регулярное решение начально-краевой задачи Дирихле (5.1)–(5.3) существует, единственно, устойчиво по начальным данным и определяется формулой Даламбера (4.6), функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ определяются (5.4).*

Замечание. Для определения решения в прямоугольнике $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$ достаточно вычислить значения $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ на $[-aT, l+aT]$.

Начально-краевая задача Неймана (т.е. граничные условия (5.3) заменяем на $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$) решается аналогично. Надо положить

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(kl - x), \quad \tilde{\psi}(x) = \psi(kl - x) \qquad \text{при } x \in (kl, kl + l], \quad k \geq 1$$

и продолжить функции $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ на отрицательную полуось четным образом. Условия на начальные данные:

$$\varphi \in C^2[0,l], \quad \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0, \qquad \psi \in C^1[0,l], \quad \psi'(0) = \psi'(l) = 0.$$

Глава V

Эллиптические уравнения

Дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x)$$

является эллиптическим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, если матрица $(\!(a_{i,j(x)})\!)$ положительно (отрицательно) определена в любой точке $x \in \Omega$, то есть

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j > 0 \ \ (< 0) \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \ \ x \in \Omega.$$

Мы ограничимся рассмотрением эллиптическим уравнений с оператором Лапласа в главной части:

$$-\Delta u + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u + c(x) \cdot u = f(x,t),$$

где

$$\overrightarrow{b} = \big(b_1(x), \ldots, b_d(x)\big)\,, \quad \nabla u = \big(u'_{x_1}, \ldots, u'_{x_d}\big)\,.$$

§ 1 Принцип максимума

Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^d$ с границей Γ. Определим эллиптический дифференциальный оператор

$$Lu \equiv -\Delta u + \overrightarrow{b}(x) \cdot \nabla u + c(x) \cdot u.$$

Лемма 1.1. *Пусть $c \equiv 0$. Тогда, если функция $u \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет неравенству*

$$Lu > 0 \ \ (< 0) \qquad \text{в } \Omega,$$

то она не имеет в Ω точек минимума (максимума).

Доказательство. Предположим противное: существует $x_0 \in \Omega$ — точка минимума функции $u(x)$. Тогда согласно необходимым условиям минимума

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i} = 0, \ \ \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \geq 0 \ \ i = \overline{1,d},$$

Следовательно, $Lu(x_0) \le 0$. Противоречие с условием леммы. Случай $Lu < 0$ в Ω рассматривается аналогично.

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что функция u не имеет в Ω точек *локального* минимума (максимума).

Т е о р е м а 1.1 (принцип максимума). *Пусть хотя бы одна компонента вектор-функции* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}(x)$ *ограничена в* Ω. *Тогда любое решение* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *уравнения*

$$-\Delta u + \overrightarrow{b}(x) \cdot \nabla u = 0 \text{ в } \Omega \tag{1.1}$$

удовлетворяет оценке

$$m(u) \le u(x) \le M(u) \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.2}$$

в которой

$$m(u) = \min_{x \in \Gamma} u(x), \quad M(u) = \max_{x \in \Gamma} u(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, $b_1(x)$ ограничена в Ω, то есть существует постоянная $C > 0$ для которой

$$|b_1(x)| \le C \quad \forall x \in \Omega.$$

Возьмем любое число $\gamma > C$. Определим

$$w(x) = e^{x_1 \gamma}.$$

Считая, что $c \equiv 0$ вычисляем

$$Lw = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + b_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} = \gamma e^{\gamma x_1} \left(-\gamma + b_1\right) < 0 \text{ в } \Omega.$$

Следовательно, для функции $u_\epsilon = u + \epsilon w$ при $\epsilon > 0$ выполняется

$$Lu_\epsilon = Lu + \epsilon Lw = \epsilon Lw < 0.$$

Значит к функции u_ϵ можно применить лемму 1.1 согласно которой функция u_ϵ не имеет в Ω точек максимума. Следовательно, минимум u_ϵ достигается на границе Γ, то есть

$$u_\epsilon(x) \le M(u_\epsilon) \quad \forall x \in \Omega.$$

Переходя к пределу при $\epsilon \to 0+$ получаем верхнюю оценку в (1.2). Нижняя оценка доказывается аналогично. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно сформулировать так: *любое решение однородного эллиптического уравнения (1.1) достигает своего максимального и минимального значений на границе области* Γ .

Рассмотрим теперь случай $c \not\equiv 0$.

Лемма 1.2. *Пусть $c = c(x) \geq 0$ при $x \in \Omega$. Тогда, если функция $u \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет неравенству*

$$Lu > 0 \ \ (< 0) \qquad \text{в } \Omega,$$

то она не имеет в Ω точек отрицательного минимума (положительного максимума).

Доказательство такое же как и у леммы 1.1. Предположим противное: существует $x_0 \in \Omega$ — точка минимума функции $u(x)$, причем $u(x_0) < 0$. Точно также как и при доказательстве леммы 1.1 из необходимых условий минимума вытекает

$$-\Delta u + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u \leq 0 \text{ в точке } x_0.$$

Так как $c(x_0)u(x_0) \leq 0$, то $Lu(x_0) \leq 0$. Противоречие с условием леммы. Лемма доказана.

Теорема 1.2 (принцип максимума). *Пусть функция $c = c(x)$ неотрицательная и ограниченная в Ω, хотя бы одна компонента вектор-функции $\overrightarrow{b}$ ограничена в Ω. Тогда любое решение $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ уравнения*

$$-\Delta u + \overrightarrow{b} \cdot \nabla u + c \cdot u = 0 \ \text{ в } \Omega$$

удовлетворяет оценке

$$\min\{m(u), 0\} \leq u(x) \leq \max\{M(u), 0\} \quad \forall x \in \Omega,$$

$m(u)$ и $M(u)$ определены в теореме 1.1.

Доказательство повторяет рассуждения теоремы 1.1.

Замечание. При $c(x) < 0$ принцип максимума не выполняется. Например, функция

$$u(x) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2) \cdot \ldots \cdot \sin(x_d)$$

является решением уравнения

$$-\Delta u - u = 0 \text{ в } \Omega \equiv (-\pi, \pi)^d,$$

а максимальное и минимальное значения равные 1 и -1 достигаются в точках с координатами $\pm\pi/2$, лежащими в Ω.

§ 2 Единственность решения краевой задачи Дирихле

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для эллиптического уравнения:

$$-\Delta u + \overrightarrow{b}(x) \cdot \nabla u + c(x) \cdot u = f(x) \text{ в } \Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x) = g(x) \quad x \in \Gamma. \tag{2.2}$$

Здесь Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^d$ с границей Γ.

О п р е д е л е н и е. Функцию $u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую (2.1), (2.2) называют *классическим решением* краевой задачи Дирихле (2.1), (2.2).

Из принципа максимума (теорема 1.2) очевидным образом вытекает

Следствие 2.1. *Пусть $f \equiv 0$, функция $c = c(x)$ неотрицательная и ограниченная в Ω, хотя бы одна компонента вектор-функции $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}(x)$ ограничена в Ω, $g \in C(\Gamma)$. Тогда любое классическое решение задачи (2.1), (2.2) удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le \|g\|_{C(\overline{\Gamma})}.$$

Из этого результата точно также, как и в параболическом случае (**??** гл. III) вытекает

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $f \equiv 0$, функция $c = c(x)$ неотрицательная и ограниченная в Ω, хотя бы одна компонента вектор-функции $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}(x)$ ограничена в Ω, $g \in C(\Gamma)$. Тогда*

(а) задача (2.1), (2.2) имеет не более одного классического решения;

(б) классическое решение задачи (2.1)–(2.2) устойчиво по g в следующем смысле: если u_1 и u_2 — решения (2.1), (2.2) с исходными данными (f, g_1) и (f, g_2) соответственно, то

$$\|u_1 - u_2\|_{C(\overline{\Omega})} \le \|g_1 - g_2\|_{C(\overline{\Gamma})}.$$

З а м е ч а н и е. Классическое решение задачи (2.1), (2.2) устойчиво и по правой части f. Это вытекает из априорной оценки:

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_1 \|f\|_{C(\overline{\Omega})} + \|g\|_{C(\overline{\Gamma})}.$$

(постоянная C_1 зависит только от Ω), для доказательства которой достаточно заметить, что функция $v = u + e^{Kx_1}$ $(v = u - e^{Kx_1})$ удовлетворяет неравенству

$$Lv < 0 \ \ (> 0) \quad \text{ в } \Omega,$$

если число K достаточно большое и применить лемму 1.2.

З а м е ч а н и е. В отличие от параболического уравнения, решение задачи (2.1), (2.2) в случае $c \le 0$ может быть неединственным. Например, задача

$$-\Delta u - u = 0 \text{ в } \Omega \equiv (-\pi, \pi)^d, \quad u|_\Gamma = 0$$

помимо тривиального имеет решение

$$u(x) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2) \cdot \ldots \cdot \sin(x_d).$$

§ 3 Принцип максимума для 3-й краевой задачи

Рассмотрим эллиптическое уравнение с граничным условием 3-го рода:

$$-\Delta u + \overrightarrow{b}(x) \cdot \nabla u + c(x) \cdot u = f(x) \text{ в } \Omega, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \kappa(x) \big(g(x) - u \big) \quad x \in \Gamma. \tag{3.2}$$

$n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Если $u = u(x)$ — температура в точке x, то условие (3.2) означает, что между областью Ω и внешней средой происходит теплообмен через границу Γ (по закону Фурье), κ — коэффициент температуропроводности, $g(x)$ — температура внешней среды.

Функция $u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая (3.1), (3.2) называется *классическим решением* краевой задачи (3.1), (3.2).

Теорема 3.1. *Пусть $f \equiv 0$, $\kappa(x) > 0$ $x \in \Gamma$, хотя бы одна компонента вектор-функции $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}(x)$ ограничена в Ω. Тогда классическое решение задачи (3.1), (3.2) удовлетворяет оценке*

(а) если $c \equiv 0$, то

$$m \le u(x) \le M \;\; x \in \Omega,$$

где $m = \min\limits_{x\in\Gamma} g(x)$, $M = \max\limits_{x\in\Gamma} g(x)$;

(б) если функция $c = c(x)$ неотрицательна и ограничена в Ω, то

$$\min\{0, m\} \le u(x) \le \max\{0, M\} \;\; x \in \Omega.$$

Доказательство. (а) Пусть $c \equiv 0$. Так как $f \equiv 0$, то можно применить принцип максимума (теорема 1.1), согласно которому максимальное и минимальное значение функции u достигается на Γ. Значит существует точка $x_0 \in \Gamma$, $u(x_0) \ge u(x)$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Согласно необходимым условиям экстремума, для любого вектора $l = l(x)$, направленного в точке x_0 вне Ω выполняется

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial l} \ge 0.$$

В частности, $\partial u(x_0)/\partial n \ge 0$. Тогда из граничного условия (3.2) вытекает

$$\kappa(x_0) \big(g(x_0) - u(x_0) \big) \ge 0.$$

Так как $\kappa(x_0) > 0$, то $g(x_0) \ge u(x_0)$ и, поэтому,

$$u(x) \le u(x_0) \le g(x_0) \le M \quad \forall x \in \Omega.$$

Верхняя оценка доказана. Нижняя доказывается аналогично.

Для доказательства утверждения (б) достаточно применить теорему 1.2 и повторить приведенные выше рассуждения. Теорема доказана.

Из полученной априорной оценки стандартным образом вытекает

Следствие 3.1. *Пусть $\kappa(x) > 0$ $x \in \Gamma$, функция $c = c(x)$ неотрицательна и ограничена в Ω, хотя бы одна компонента вектор-функции $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}(x)$ ограничена в Ω. Тогда задача (3.1), (3.2) имеет не более одного классического решения. Если решение существует, то оно устойчиво по g.*

Замечание. Нетрудно заметить, что результаты параграфа остаются в силе, если в граничном условии (3.2) вектор n заменить на l, где $l = l(x)$ — любой вектор, направленный в точке x вне Ω и не являющийся касательным к Γ.

§ 4 Единственность решения 3-й краевой задачи и задачи Неймана (метод энергетических неравенств)

Рассмотрим задачу

$$-\Delta u + c(x) \cdot u = f(x) \qquad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x) u = g(x) \qquad x \in \Gamma. \tag{4.2}$$

Функция $u = u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая (4.1), (4.2) называется *регулярным решением* краевой задачи (4.1), (4.2).

Пусть $u = u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ является решением уравнения (4.1). Умножим (4.1) на u и проинтегрируем по Ω. Учитывая равенство

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot u \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} u \, ds,$$

вытекающее из 1-й формулы Грина (см. **??** гл. I), получаем

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + c(x)|u|^2 \right) \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} u \, ds = \int_\Omega f \cdot u \, dx. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Пусть функции $c = c(x)$, $x \in \Omega$ и $\beta = \beta(x)$, $x \in \Gamma$ непрерывны и неотрицательны, причем хотя бы одна из них не равна тождественно нулю. Тогда краевая задача (4.1), (4.2) имеет не более одного регулярного решения.*

Доказательство. Пусть существует два решения: u_1 и u_2. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнениям:

$$-\Delta u + c(x) \cdot u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x) u = 0 \quad x \in \Gamma. \quad x \in \Gamma.$$

Формула (4.3) принимает вид ($f \equiv 0$, $-\partial u / \partial n = \beta u$):

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + c(x)|u|^2 \right) \, dx + \int_\Gamma \beta(x)|u|^2 \, ds = 0$$

Так как $c(x)$, $\beta(x) \geq 0$, то последнее равенство возможно только при $\nabla u(x) \equiv 0$. Следовательно, $u = const$. Кроме того, $c(x)u(x) = 0$ при $x \in \Omega$, $\beta(x)u(x) = 0$ при $x \in \Gamma$. Значит $u \equiv 0$, $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

Рассмотрим отдельно случай $c(x) \equiv 0$, $\beta(x) \equiv 0$. Тогда (4.1), (4.2) — задача Неймана для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u = f(x) \text{ в } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \quad x \in \Gamma. \tag{4.4}$$

Из формулы (4.3) вытекает

Теорема 4.2. *Если u_1, u_2 — регулярные решения краевой задачи Неймана (4.4), то $u_1 - u_2 \equiv Const$ (т.е. решение определяется с точностью до аддитивной постоянной).*

Решение задачи Неймана существует не при всех исходных данных f и g.

Теорема 4.3. *Если краевая задача Неймана (4.4) имеет регулярное решение, то*

$$\int_\Omega f(x)\,dx + \int_\Gamma g(x)\,ds = 0.$$

Для доказательства достаточно в формуле Грина:

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v\,dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\,ds$$

положить $v \equiv 1$ и подставить $-\Delta u = f$, $\frac{\partial u}{\partial n} = g$.

§ 5 Корректность задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге (обоснование метода Фурье)

Краевая задача Дирихле

$$\begin{aligned} &\Delta u(x) = 0 && x \in \Omega \equiv \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2 < a^2\right\}, \\ &u(x) = g(x) && x \in \Gamma \equiv \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2 = a^2\right\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

в полярных координатах (ρ, φ) $(u = u(\rho, \varphi))$ принимает вид:

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \rho \in [0, a), \ \ \varphi \in [0, 2\pi], \tag{5.2}$$

$$u(a, \varphi) = g(\varphi) \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{5.3}$$

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi) \qquad \rho \in [0, a], \ \ \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{5.4}$$

Следуя методу Фурье (**??** гл. II) ищем ее решение в виде ряда:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}u_k, \tag{5.5}$$

$$u_k=\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\Big(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\Big),$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi.$$

Естественно считать, что $\Omega=\{(\rho,\varphi):\rho\in[0,a),\ \varphi\in[0,2\pi]\}$.

Теорема 5.1. *Пусть $g=g(\varphi)\in C[0,2\pi]$, $g'(\varphi)\in L^2(0,2\pi)$, $g(0)=g(2\pi)$. Тогда*

(а) ряд (5.5) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$;

(а) для любого $r\in(0,a)$ ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial\rho},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial\rho^2},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial\varphi},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial\varphi^2},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial\varphi\partial\rho} \tag{5.6}$$

сходятся абсолютно и равномерно при $\rho\in[0,r]$, $\varphi\in[0,2\pi]$;

(в) функция u, определяемая (5.5), принадлежит $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. (а) Из условий теоремы и теории рядов Фурье (теорема **??** гл. II) вытекает, что функция $g(\varphi)$ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0,2\pi]$ ряд Фурье:

$$g(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\Big). \tag{5.7}$$

Так как $|\rho/a)^k|\le 1$ при $\rho\in[0,a]$, то

$$|u_k(\rho,\varphi)|\le|a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi|\ \ \forall(\rho,\varphi)\in\overline{\Omega},\ \ k\ge 1.$$

то есть, ряд (5.5) мажорируется в $\overline{\Omega}$ рядом (5.7). Следовательно, он сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

(б) Так как α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции $g(\varphi)$ по ортогональной системе $\{\cos k\varphi,\,\sin k\varphi\}$, то числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k^2$ сходятся (см. **??** гл. II). Следовательно,

$$\alpha_k\to 0,\ \ \beta_k\to 0\ \text{при}\ k\to\infty.$$

Значит числовые последовательности α_k и β_k ограничены, то есть существует $C>0$ такая, что $|\alpha_k|+|\beta_k|\le C\quad\forall k\ge 1$. Пусть $r\in(0,a)$. Дифференцируя $u_k(\rho,\varphi)$ по соответствующим переменным и применяя неравенства

$$\frac{\rho}{a}\le\frac{r}{a}=\mu<1\qquad\text{при}\ \rho\in[0,r],$$

$$|\alpha_k|+|\beta_k|\le C,\quad|\cos(\ldots)|\le 1,\ \ |\sin(\ldots)|\le 1$$

нетрудно доказать, что функциональные ряды (5.6) мажорируются на $(\rho, \varphi) \in [0, r] \times [0, 2\pi]$ числовыми рядами вида

$$A \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mu^k,$$

где A — некоторая константа. Так как $\mu < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 \mu^k$ сходится. Следовательно, ряды (5.6) сходятся абсолютно и равномерно на $(\rho, \varphi) \in [0, r] \times [0, 2\pi]$.

(в) Из доказанного утверждения (а), формулы (5.7) и

$$u(a, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \Big),$$
$$u_k(\rho, \varphi + 2\pi) = u_k(\rho, \varphi)$$

вытекает, что функция u непрерывна на $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет уравнениям (5.3), (5.4). Из утверждения (б) вытекает, что во-первых, $u \in C^2([0, r] \times [0, 2\pi])$, во-вторых, ряд (5.5) можно дважды почленно дифференцировать на множестве $[0, r] \times [0, 2\pi]$ для любого $r \in (0, a)$. Так как каждый член ряда удовлетворяет однородному уравнению (5.2), то и функция u (сумма ряда) удовлетворяет этому же уравнению для любого $\rho \in [0, a)$. Теорема доказана.

Обозначим через $\tau = \tau(x)$ — единичный вектор касательный к окружности Γ в точке x. Тогда производная по направлению τ, с точностью до постоянного множителя, совпадает с производной по углу φ.

Следствие 5.1. *Пусть $g \in C(\Gamma)$, $g'_\tau \in L^2(\Gamma)$. Тогда классическое решения задачи Дирихле (5.1) существует, единственно, устойчиво по g и определяется в полярных координатах рядом (5.5).*

Замечание. Аналогичным образом методом Фурье доказывается разрешимость задачи Неймана

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma$$

при (необходимом) условии

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0,$$

а также внешних краевых задач (вне круга), краевых задач в кольце и секторе.

§ 6 Формулы Пуассона и

Пусть выполняются условия теоремы 5.1. Тогда решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге (5.1) определяется (в полярных координатах (ρ, φ)) рядом

$$
\begin{aligned}
u(\rho,\varphi) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^k \Big(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\Big) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\,d\psi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\cos k\psi\,d\psi\cdot\cos k\varphi + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\sin k\psi\,d\psi\cdot\sin k\varphi\right).
\end{aligned}
$$

Так как ряд сходится абсолютно и равномерно, то ряд можно знаки интеграла и суммы можно менять местами. В итоге получаем формулу:

$$
\begin{aligned}
u(\rho,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\times \\
&\times\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\rho/a)^k\Big(\cos k\varphi\cdot\cos k\psi + \sin k\varphi\cdot\cos k\psi\Big)\right)d\psi.
\end{aligned}
$$

Ее можно упростить используя формулу для косинуса разности:

$$
u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\rho/a)^k\cos\Big(k(\varphi-\psi)\Big)\right) g(\psi)\,d\psi. \tag{6.1}
$$

Лемма 6.1. *Пусть $\mu \in (0,1)$. Тогда для любого $\theta \in \mathbb{R}$*

$$
1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\cdot\cos(k\theta) = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2-2\mu\cos\theta}.
$$

Доказательство. Пусть i — мнимая единица. Тогда

$$
e^{\pm ik\theta} = \cos(k\theta) \pm i\sin(k\theta).
$$

Следовательно, $\cos(k\theta) = (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta})/2$. Тогда используя формулу

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k = \frac{\gamma}{1-\gamma} \quad \forall \text{ при } |\gamma| < 1,
$$

получаем

$$
\begin{aligned}
1 + 2&\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\cdot\cos(k\theta) = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu e^{i\theta}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu e^{-i\theta}\right)^k = 1 + \frac{\mu e^{i\theta}}{1-\mu e^{i\theta}} + \frac{\mu e^{-i\theta}}{1-\mu e^{-i\theta}} = \\
&= \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2-\mu e^{i\theta}-\mu e^{-i\theta}}.
\end{aligned}
$$

Осталось учесть, что $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$. Лемма доказана.

Суммируя ряд в (6.1) с помощью леммы 6.1, в которой $\theta = \varphi - \psi$, $\mu = \rho/a \in (0,1)$, приходим к

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)}\,d\psi \tag{6.2}$$

— *формула Пуассона.*

Запишем ее в декартовых координатах. Пусть ds — элемент длины дуги окружности Γ. Нетрудно проверить, что $ds = a d\psi$ или $d\psi = ds/a$. Пусть точки $x \in \Omega$, $y \in \Gamma$ имеют полярные координаты (ρ,φ) и (a,ψ) соответственно. Тогда угол между векторами x и y равен $\varphi - \psi$ и по теореме косинусов

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x|\cdot|y|\cos(\varphi-\psi) = \rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\psi).$$

Следовательно, формулу Пуассона можно записать в виде:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi a}\int_\Gamma \frac{a^2-|x|^2}{|x-y|^2}\,ds_y. \tag{6.3}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 6.1. *Пусть $g \in C(\Gamma)$, $g'_\tau \in L^2(\Gamma)$. Тогда классическое решения задачи Дирихле (5.1) определяется формулой Пуассона (6.2) в полярных координатах и (6.3) в декартовых координатах.*

Замечание. Теорема 6.1 остается в силе, если отбросить условие на производную функции g.

Замечание. Нетрудно заметить, что любая функция определяемая формулой Пуассона (6.3) принадлежит $C^\infty(\Omega)$.

Решение задачи Неймана

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma$$

определяется формулой

Ее можно выводить также как и формулу Пуассона, учитывая

Глава VI
Метод потенциалов и функций Грина

В этой главе мы кратко рассмотрим два метода решения дифференциальных уравнений:

1. метод потенциалов, который сводит краевую задачу к решению интегрального уравнения;

2. метод функций Грина.

Для упрощения изложения ограничимся случаем уравнения Лапласа (Пуассона).

§ 1 Сингулярное решение уравнения Лапласа

Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^d$. Функция $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

называется *гармонической* в области Ω. Если область Ω неограниченная, то добавляют условие

$$u(x) = \begin{cases} O(1) & \text{при } d = 2 \\ O(|x|^{d-2}) & \text{при } d \geq 3 \end{cases} \qquad \text{при } x \in \Omega, \quad |x| \to \infty. \tag{1.1}$$

Найдем гармонические функции вида $u = u(|x|)$. Переходя к полярным координатам при $d = 2$ и к сферическим при $d = 3$ и учитывая, что $u = u(\rho)$ получаем уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0 \qquad \text{при } d = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0 \qquad \text{при } d = 3.$$

Решая их находим:

$$u(\rho) = \begin{cases} C_1 \ln \rho + C_2 & \text{при } d = 2, \\ C_1 \rho^{-1} + C_2 & \text{при } d = 3. \end{cases}$$

Значит функция

$$u(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{при } d = 2, \\ 1/|x| & \text{при } d = 3. \end{cases}$$

гармоническая всюду кроме точки $x = 0$. При $d > 3$ функция $u(x) = 1/|x|^{d-2}$ также гармоническая в $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Нетрудно заметить, что тогда и функция

$$u(x) = \begin{cases} \ln|x-y| & \text{при } d = 2, \\ 1/|x-y|^{d-2} & \text{при } d \geq 3 \end{cases}$$

является гармонической в $\mathbb{R}^d \setminus \{y\}$. Обозначим ω_d — площадь сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^d$.

Определение. Функция

$$E_d(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln|x-y| & \text{при } d = 2, \\ \dfrac{1}{(d-2)\,\omega_d\,|x-y|^{d-2}} & \text{при } d \geq 3 \end{cases}$$

называется *сингулярным решением* уравнения Лапласа.

Сингулярное решение обладает следующими свойствами:

1. симметричность: $E_d(x,y) = E_d(y,x)$;
2. функция $x \to E_d(x,y)$ гармоническая и бесконечно дифференцируема при всех $x \neq y$;
3. функция $y \to E_d(x,y)$ гармоническая и бесконечно дифференцируема при всех $y \neq x$.

§ 2 Формула Грина интегрального представления функций

Теорема 2.1. *Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Тогда для всех $x \in \Omega$*

$$u(x) = \int_\Omega E_d(x,y)\Delta u(y)\,dy + \int_\Gamma \left(u(y)\frac{\partial E_d(x,y)}{\partial n_y} - E_d(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) ds_y. \tag{2.1}$$

Доказательство проведем для случая $d \geq 3$. Тогда

$$E_d(x,y) = \frac{1}{(d-2)\omega_d}|x-y|^{2-d},$$

ω_d — площадь сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^d$. Возьмем любую точку $x_0 \in \Omega$. Выберем достаточно малое $\epsilon > 0$. Обозначим

$$B_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^d : |x_0 - y| \leq \epsilon\}, \quad S_\epsilon \equiv \partial B_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^d : |x_0 - y| = \epsilon\}.$$

Если ϵ мало, шар B_ϵ содержится в Ω. Положим

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B}_\epsilon.$$

Граница $\partial\Omega_\epsilon$ области Ω_ϵ состоит из Γ и S_ϵ. Положим $v_d(y) = E_d(x_0, y)$. Нам нужно доказать, что

$$u(x_0) = \int_\Omega v_d \Delta u \, dy + \int_\Gamma \left(u \frac{\partial v_d}{\partial n} - v_d \frac{\partial u}{\partial ny} \right) ds_y. \tag{2.2}$$

В правой части (2.2) $u = u(y)$. Так как $x_0 \notin \overline{\Omega}_\epsilon$, то функция v_d гармоническая в Ω_ϵ и принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega}_\epsilon)$. Значит можно применить к функциям $u = u(y)$ и $v_d = v_d(y)$ 2-ю формулу Грина в Ω_ϵ:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Delta v_d u \, dy = \int_{\Omega_\epsilon} \Delta v_d u \, dy + \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left(u \frac{\partial v_d}{\partial n} - v_d \frac{\partial u}{\partial n_y} \right) ds_y.$$

Так как $\Delta v_d = 0$, то левая часть полученного соотношения равна нулю. Представим интеграл по $\partial\Omega_\epsilon$ в правой части в виде суммы интегралов по Γ и S_ϵ, перенося второй из них в левую часть получаем равенство:

$$I_1(\epsilon) + I_2(\epsilon) = \int_{\Omega_\epsilon} \Delta v_d u \, dy + \int_\Gamma \left(u \frac{\partial v_d}{\partial n} - v_d \frac{\partial u}{\partial n_y} \right) ds_y, \tag{2.3}$$
$$I_1(\epsilon) = \int_{S_\epsilon} v_d \frac{\partial u}{\partial n_y} \, ds, \quad I_2(\epsilon) = -\int_{S_\epsilon} u \frac{\partial v_d}{\partial n_y}.$$

Предел правой части в (2.3) при $\epsilon \to +0$ равен правой части в (2.2). Осталось доказать, что

$$I_1(\epsilon) \to 0, \;\; I_2(\epsilon) \to u(x_0) \quad \text{при } \epsilon \to 0.$$

Заметим, что при $y \in S_\epsilon$

$$v_d(y) = E_d(x_0, y) = \frac{1}{(d-2)\omega_d |x_0 - y|^{d-2}} = \frac{1}{(d-2)\omega_d \, \epsilon^{d-2}}.$$

Так как $u \in C^1(\overline{\Omega})$, то производные функции u ограничены в $\overline{\Omega}$. Следовательно, существует постоянная $C > 0$ (не зависящая от ϵ) такая, что

$$|\nabla u| \le C \text{ в } \Omega \implies \left| \frac{\partial u}{\partial n_y} \right| \le |\nabla u| \le C \text{ на } S_\epsilon.$$

Тогда учитывая, что $\operatorname{meas} S_\epsilon = \epsilon^{d-1}\omega_d$, получаем

$$\begin{aligned} |I_1(\epsilon)| &= \left| \int_{S_\epsilon} v_d \frac{\partial u}{\partial n_y} \, ds \right| = \frac{1}{(d-2)\omega_d \, \epsilon^{d-2}} \left| \int_{S_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n_y} \, ds \right| \le \\ &\le \frac{1}{(d-2)\omega_d \, \epsilon^{d-2}} C \operatorname{meas} S_\epsilon = \frac{\epsilon}{(d-2)} C \to 0 \text{ при } \epsilon \to 0. \end{aligned}$$

Введем новую переменную $r = |y - x_0|$. Так как вектор нормали к S_ϵ внешний по отношению к Ω_ϵ равен $x_0 - y$, то

$$\frac{\partial \cdot}{\partial n_y} = -\frac{\partial \cdot}{\partial r} \text{ на } S_\epsilon.$$

Учитывая, что

$$
\begin{aligned}
v_d(y) &= \frac{1}{(d-2)\omega_d r^{d-2}}, \\
\frac{\partial v_d}{\partial n_y} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{(d-2)\omega_d r^{d-2}}\right) = \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} = \frac{1}{\omega_d \epsilon^{d-1}} = \frac{1}{\operatorname{meas} S_\epsilon},
\end{aligned}
$$

получаем

$$I_2(\epsilon) = \frac{1}{\operatorname{meas} S_\epsilon}\int_{S_\epsilon} u(y)\,ds_y.$$

Согласно интегральной теореме о среднем найдется точка $x_\epsilon \in S_\epsilon$ такая, что

$$\frac{1}{\operatorname{meas} S_\epsilon}\int_{S_\epsilon} u(y)\,ds_y = u(x_\epsilon).$$

Очевидно, что $x_\epsilon \to x_0$ при $\epsilon \to 0$. Значит $I_2(\epsilon) \to u(x_0)$ при $\epsilon \to 0$. Переходя к пределу в (2.3) при $\epsilon \to 0$ получаем (2.2). Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Любая гармоническая в Ω функция является бесконечно дифференцируемой в Ω.*

Доказательство. Пусть $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ в Ω. Возьмем любую точку $x_0 \in \Omega$, B — шар с центром в точке x_0, лежащий в Ω. Так как $u \in C^2(\Omega)$, то $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Значит к функции u в шаре B можно применить формулу (2.1). Она принимает вид:

$$u(x) = \int_{\partial B}\left(u(y)\frac{\partial E_d(x,y)}{\partial n_y} - E_d(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right) ds_y \quad \forall x \in B.$$

Функция, стоящая под знаком интеграла является бесконечно дифференцируемой по $x \in B$ для любого $y \in \partial B$. Значит $u \in C^\infty(B)$. В силу произвольности точки x_0 следствие доказано.

Замечание. Можно доказать более сильное утверждение: любая гармоническая в Ω функция является аналитичной в Ω.

§ 3 Фундаментальные решения уравнения Лапласа

Замыкание множества точек, в которых функция f отлична от нуля называется *носителем* функции f. Обозначается: $\operatorname{supp} f$. Введем $D(\mathbb{R}^d)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^d$ функций с ограниченными носителями.

Определение. Функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x,y)$, которая для любого $x \in \mathbb{R}^d$ дважды дифференцируема по $y \in \mathbb{R}^d$ при $y \neq x$ и удовлетворяет уравнению:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(x,y)\Delta v(y)\,dy = v(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{3.1}$$

называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа.

Пусть $v \in D(\mathbb{R}^3)$. Тогда существует шар Ω, который содержит носитель функции v и, следовательно, функция v равна нулю в некоторой окрестности границы Ω. Из (2.1) вытекает

$$\int_\Omega E_d(x,y)\Delta v(y)\,dy = v(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Так как $v = 0$ вне Ω, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} E_d(x,y)\Delta v(y)\,dy = v(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Таким образом, сингулярное решение является фундаментальным. Нетрудно заметить, что если функция $u = u(y)$ гармоническая в $\mathbb{R}^d$, то

$$\mathcal{F}(x,y) = E_d(x,y) + u(y) \tag{3.2}$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Справедлив и обратный результат:

Лемма 3.1. *Разность двух фундаментальных решений равна сингулярному решению.*

Таким образом все фундаментальные решения имеют вид (3.2).

§ 4 Потенциалы и их свойства

Пусть функции $f = f(x)$ и $\rho(x)$ измеримы в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ и на $\Gamma = \partial\Omega$ соответственно. Тогда

$$u(x) = \int_\Omega f(y)E_d(x,y)\,dy \qquad \text{— \textit{объемный потенциал}}$$

зарядов, распределенных в Ω с плотностью f,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Gamma \rho(y)E_d(x,y)\,dy \qquad \text{— \textit{потенциал простого слоя,}} \\ u(x) &= \int_\Gamma \rho(y)\frac{E_d(x,y)}{\partial n_y}\,dy \qquad \text{— \textit{потенциал двойного слоя,}} \end{aligned}$$

зарядов распределенных на поверхности Γ с плотностью ρ. Потенциалы простого и двойного слоя называют *поверхностными.* Отметим, что если $x \in \Omega$ ($x \in \Gamma$), то значения объемного (поверхностного) потенциала в точке x вычисляется как значение несобственного интеграла, т.к. подинтегральная функция $y \to E_d(x,y)$ имеет особенность в точке $y = x$.

Потенциал двойного слоя

Рассмотрим поведение потенциала двойного слоя

$$u(x) = \int_\Gamma \rho(y)\frac{E_d(x,y)}{\partial n_y}\,dy \tag{4.1}$$

в точках $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Теорема 4.1. *Если $\rho \in L^1(\Gamma)$, то потенциал двойного слоя (4.1) удовлетворяет уравнению Лапласа в Ω и $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$.*

Доказательство. Если $x \notin \Gamma$, то функция $y \to E_d(x,y)$, непрерывна на Γ. Значит интеграл (4.1) существует и конечен. Так как функция $x \to E_d(x,y)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ при $y \in \Gamma$, то и потенциал u бесконечно дифференцируем в $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$. Более того, при $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$

$$\Delta u(x) = \int_\Gamma \rho(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_x E_d(x,y)\,dy = 0,$$

так как $\Delta_x E_d(x,y) = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Потенциал двойного слоя является гармонической в Ω и $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ функцией, т.е. дополнительно выполняется условие (1.1).

При переходе через границу Γ потенциал двойного слоя терпит разрыв 1-го рода. Обозначим

$$u^-(x_0) = \lim_{x\in\Omega,\, x\to x_0} u(x), \quad u^+(x_0) = \lim_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\overline{\Omega},\, x\to x_0} u(x) \qquad \text{при } x_0 \in \Gamma,$$

то есть u^- — продолжение функции u на Γ изнутри Ω, u^+ — извне Ω. Если u непрерывна на $\overline{\Omega}$ (на $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$) то функция u^- (функция u^+) определена и непрерывна на Γ. Имеет место

Теорема 4.2 (о скачке). *Пусть $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ с некоторым $\alpha > 0$, $\rho \in C(\Gamma)$. Тогда потенциал двойного слоя (4.1) определен всюду в $\mathbb{R}^d$, непрерывен на $\overline{\Omega}$ и $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ и терпит разрыв 1-го рода при переходе через Γ, причем*

$$u^-(x) = -\frac{1}{2}\rho(x) + \int_\Gamma \rho(y)\frac{E_d(x,y)}{\partial n_y}\,dy \quad x \in \Gamma, \tag{4.2}$$

$$u^+(x) = \frac{1}{2}\rho(x) + \int_\Gamma \rho(y)\frac{E_d(x,y)}{\partial n_y}\,dy \quad x \in \Gamma; \tag{4.3}$$

Доказательство можно найти в [1, 2, 3, 7].

Потенциал простого слоя

Для потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_\Gamma \rho(y)E_d(x,y)\,dy \tag{4.4}$$

справедлива

Теорема 4.3. *Если $\rho \in L^1(\Gamma)$, то потенциал простого слоя (4.4) удовлетворяет уравнению Лапласа в Ω и $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$.*

Доказательство повторяет рассуждения теоремы 4.1. Потенциал простого слоя является гармонической в Ω и $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ функцией, т.е. дополнительно выполняется условие (1.1).

Если $\rho \in C(\Gamma)$, то потенциал простого слоя непрерывен всюду в $\mathbb{R}^d$. Однако, его производные терпят разрыв 1-го рода при переходе через границу Γ. Положим $u_i = u$ в Ω, $u_e = u$ в $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$,

$$\frac{\partial u^-}{\partial n} = \frac{\partial u_i}{\partial n}, \quad \frac{\partial u^+}{\partial n} = \frac{\partial u_e}{\partial n} \qquad \text{на } \Gamma$$

— нормальная производная функции u на Γ, вычисленная по значениям внутри и вне области Ω.

Теорема 4.4 (о скачке). *Пусть $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ с некоторым $\alpha > 0$, $\rho \in C(\Gamma)$. Тогда потенциал простого слоя (4.4) непрерывен в $\mathbb{R}^d$, его первые производные непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ и терпят разрыв 1-го рода при переходе через Γ, причем*

$$\frac{\partial u^-}{\partial n} = \frac{1}{2}\rho(x) + \int_\Gamma \rho(y) \frac{E_d(x,y)}{\partial n_y}\, dy \quad x \in \Gamma, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial n} = -\frac{1}{2}\rho(x) + \int_\Gamma \rho(y) \frac{E_d(x,y)}{\partial n_x}\, dy \quad x \in \Gamma; \tag{4.6}$$

Доказательство можно найти в [1, 2, 3, 7].

Замечание. Выражение

$$\int_\Gamma \rho(y) \frac{E_d(x,y)}{\partial n_x}\, dy$$

получается формальным дифференцированием потенциала простого слоя по нормали n (если поменять знаки производной и интеграла местами). Его называют *прямым значением* нормальной производной потенциала.

Объемный потенциал

Если $f \in L^1(\Omega)$, то повторяя рассуждения теоремы 4.1 получаем, что объемный потенциал

$$u(x) = \int_\Omega f(y) E_d(x,y)\, dy \tag{4.7}$$

является гармонической в $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ функцией. В каждой точке $x \in \Omega$ он определяется несобственным интегралом, который сходится (см. [1, 2, 3, 7]). Более того справедлива

Теорема 4.5. *Пусть $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда объемный потенциал (4.7) принадлежит $C^2(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет уравнению Пуассона*

$$-\Delta u(x) = f(x) \qquad x \in \Omega. \tag{4.8}$$

Доказательство утверждения $u \in C^2(\overline{\Omega})$ можно найти в [1, 2, 3, 7]. Докажем (4.8). Для этого нам потребуется вспомогательный результат. Обозначим $D(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых в Ω функций, каждая из которых равна нулю в некоторой окрестности Γ.

Лемма 4.1. *Если $u \in C(\Omega)$, причем*

$$\int_\Omega u\, v\, dx = 0 \qquad \forall v \in D(\Omega),$$

то $u \equiv 0$.

Доказательство. Предположим противное: существует точка $x_0 \in \Omega$, $u(x_0) \neq 0$. Пусть, например, $u(x_0) > 0$. Так как функция u непрерывна, то найдется окрестность U точки x_0 в которой $u > 0$. Возьмем любой открытый шар B с центром в точке x радиуса ϵ такой, что $B \subset U$, $\overline{B} \subset \Omega$. Тогда

$$u(x) > 0 \qquad x \in B.$$

Возьмем любую функцию v такую, что

$$v_0(x) = 0 \quad x \in \Omega \setminus \overline{B}, \qquad v(x) > 0 \quad x \in B.$$

Такой функцией является, например,

$$v_0(x) = \eta(|x - x_0|), \qquad \text{где } \eta(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t^2-\epsilon^2}\right) & \text{при } |t| < \epsilon, \\ 0 & \text{при } |t| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_\Omega u\, v_0\, dx = \int_B u\, v_0\, dx > 0,$$

что противоречит условию. Лемма доказана.

Доказательство формулы (4.8). Согласно лемме 4.1 достаточно показать, что

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v\, dx = 0 \qquad \forall v \in D(\Omega). \tag{4.9}$$

Возьмем любую функцию $v \in D(\Omega)$. Применяя 2-ю формулу Грина и учитывая, что

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad \text{на } \Gamma$$

получаем уравнение

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega u(x)\, \Delta v(x)\, dx.$$

Подставим в правую часть формулу для потенциала (4.7):

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega E_d(x,y)\, f(y)\, dy \right) \Delta v(x)\, dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_\Omega E_d(x,y)\, \Delta v(x)\, dx \right) f(y)\, dy.$$

Применим к функции v формулу интегрального представления Грина (2.1), в которой поменяли местами x и y:

$$v(y) = -\int_\Omega E_d(x, y)\,\Delta v(x)\,dx.$$

Подставляя последнюю формулу в правую часть предыдущей получаем

$$\int_\Omega \Delta u(x)\,v(x)\,dx = -\int_\Omega v(y)\,f(y)\,dy.$$

Формула (4.9) доказана.

§ 5 Решение краевых задач методом потенциалов

Метод потенциалов сводит решение краевых задач для уравнений Лапласа $\Delta u = 0$ и Пуассона $-\Delta u = f$ к решению интегральных уравнений. Уравнение Пуассона с помощью замены

$$u = v + u_f,$$

где u_f — объемный потенциал с плотностью f, а v — новая неизвестная функция, сводится к уравнению Лапласа для функции v, т.к. $-\Delta u = f$ (теорема 4.5). Поэтому, будем рассматривать краевые задачи только для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача Дирихле

Ищем решение задачи

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad u = g \quad \text{на } \Gamma \tag{5.1}$$

в виде потенциала двойного слоя:

$$u(x) = \int_\Gamma \rho(y)\frac{E_d(x, y)}{\partial n_y}\,dy. \tag{5.2}$$

Неизвестной является плотность ρ. Если $\rho \in C(\Gamma)$, то по теореме 4.1 функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет уравнению Лапласа. Осталось выбрать плотность ρ из граничного условия $u(x) = g(x)$ $x \in \Gamma$. Оно эквивалентно

$$u^-(x) = g(x) \quad \text{на } \Gamma.$$

Согласно теореме 4.2

$$u^-(x) = -\frac{1}{2}\rho(x) + \int_\Gamma \rho(y)\frac{E_d(x, y)}{\partial n_y}\,dy \qquad x \in \Gamma.$$

Следовательно, функция u является решением задачи Дирихле (4.2), если и только если

$$-\frac{1}{2}\rho(x) + \int_\Gamma \rho(y)\frac{E_d(x, y)}{\partial n_y}\,dy = g(x) \qquad x \in \Gamma. \tag{5.3}$$

Таким образом, решение задачи (4.2) сводится к решению (5.3), которое является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

Теорема 5.1. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$, $g \in C(\Gamma)$. Тогда задача Дирихле (5.2) имеет единственное классическое решение, оно определяется формулой (5.2), плотность $\rho \in C(\Gamma)$ является единственным решением интегрального уравнения (5.3).*

Доказательство. Единственность решения (5.1) вытекает из принципа максимума (**??** гл. V). Следовательно, однородное интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2}\rho(x) + \int_\Gamma \rho(y)\frac{E_d(x,y)}{\partial n_y}\,dy = 0 \qquad x \in \Gamma$$

имеет только тривиальное решение. Тогда по альтернативе Фредгольма неоднородное интегральное уравнение 2-го рода (5.3) имеет решение $\rho \in C(\Gamma)$ для любой правой части $g \in C(\Gamma)$. Соответствующий потенциал двойного слоя (5.2) является решением задачи (5.1). Теорема доказана.

С помощью теории потенциала можно доказать, что гладкость решения повышается с увеличением гладкости исходных данных. В частности справедлива

Теорема 5.2. *Пусть*

$$\alpha \in (0,1),\ \ m \geq 0,\ \ \Gamma \in C^{m,\alpha},\ \ f \in C^m_\alpha(\Omega),\ \ g \in C^{m+2}_\alpha(\Omega).$$

Тогда задача

$$-\Delta u = f \quad \text{в } \Omega, \qquad u = g \quad \text{на } \Gamma$$

имеет решение $u \in C^{m+2}_\alpha(\Omega)$.

Подчеркнем, что при $\alpha = 0$ либо $\alpha = 1$ теорема неверна.

Отметим, что решение задачи Дирихле (5.1) можно искать в виде потенциала простого слоя:

$$u(x) = \int_\Gamma \rho(y)E_d(x,y)\,dy.$$

Если $\rho \in C(\Gamma)$, то функция u дважды дифференцируема в Ω, непрерывна в $\mathbb{R}^d$ и удовлетворяет уравнению Лапласа. Чтобы выполнялось граничное условие необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\Gamma \rho(y)E_d(x,y)\,dy = g(x) \qquad x \in \Gamma. \tag{5.4}$$

То есть для нахождения плотности ρ нужно решить интегральное уравнение 1-го рода. Недостаток этого подхода — решение уравнения 1-го рода является неустойчивым.

§ 6 Решение краевых задач с помощью функции Грина

Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u = f(x) \ \ x \in \Omega, \quad \alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g(x) \ \ x \in \Gamma. \tag{6.1}$$

Определение. Функция $G(x,y)$, удовлетворяющая для любого $x \in \Omega$ условиям:

1. функция $y \to G(x,y)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа;

2. выполняется граничное условие:

$$\alpha(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} + \beta(y)G(x,y) = 0 \ \ y \in \Gamma; \tag{6.2}$$

называется *функцией Грина* краевой задачи (6.1).

Подчеркнем, что функция Грина не зависит от функций f и g (т.е. от исходных данных задачи).

Из условия 1 вытекает, что G представима в виде:

$$G(x,y) = E_d(x,y) + v(x,y).$$

Для любого $x \in \Omega$ функция $y \to v(x,y)$ является гармонической в Ω, то есть

$$\Delta_x v(x,y) = 0 \quad x \in \Omega. \tag{6.3}$$

Из условия 2 вытекает, что

$$\alpha(x)\frac{\partial v(x,y)}{\partial n_x} + \beta(x)v(x,y) = -\alpha(x)\frac{\partial E_d(x,y)}{\partial n_x} - \beta(x)E_d(x,y) \quad x \in \Gamma. \tag{6.4}$$

Таким образом, чтобы найти функцию Грина нужно решить краевую задачу (6.3), (6.4).

Пусть функция Грина известна, $G = E_d + v$. Найдем с ее помощью решение краевой задачи (6.1). Применим к функциям v и u 2-ю формул Грина. Учитывая, что $\Delta_y v = 0$, $\Delta u = f$ получаем

$$0 = \int_\Omega \Delta_y v(x,y)\, u(y)\, dy = \int_\Omega v(x,y)\, f(y)\, dy + \\ + \int_\Gamma \left(u(y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial n_y} - \frac{\partial u(y)}{\partial n} v(x,y) \right) ds_y.$$

Согласно формуле (2.1) интегрального представления Грина

$$u(x) = \int_\Omega E_d(x,y)\, f(y)\, dy + \int_\Gamma \left(u(y)\frac{\partial E_d(x,y)}{\partial n_y} - E_d(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) ds_y.$$

Сложим две последние формулы. Так как $v + E_d = G$, то получим

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy + \int_\Gamma \left(u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} - G(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) ds_y. \tag{6.5}$$

Из этого равенства выводятся формулы для решения краевой задачи (6.1) Рассмотрим три случая.

Задача Дирихле. Пусть $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 1$. Тогда

$$u(y) = g(y), \quad G(x, y) = 0 \quad y \in \Gamma.$$

Из (6.5) вытекает

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y)\, f(y)\, dy + \int_\Gamma g(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}\, ds_y \quad x \in \Omega \tag{6.6}$$

— формула для решения задачи Дирихле.

Задача Неймана и 3-го рода. Пусть $\alpha \equiv 1$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u + g, \quad \frac{\partial G}{\partial n_y} = -\alpha G \quad y \in \Gamma.$$

Следовательно,

$$u \frac{\partial G}{\partial n_y} - \frac{\partial u}{\partial n} G = -u\alpha G - (-\alpha u + g)G = gG.$$

Из (6.5) вытекает

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y)\, f(y)\, dy - \int_\Gamma g(y) G(x, y)\, ds_y \quad x \in \Omega \tag{6.7}$$

— формула для решения задачи Неймана и 3-го рода.

Таким образом, зная функцию Грина можно решить краевую задачу (6.1) для *любых* исходных данных f и g. Недостаток метода — явное выражение для функции Грина можно выписать только в случаях: α, β — постоянные, Ω обладает некоторой симметрией. Для этого применяется *метод отражения.* Примеры построения функции Грина для задачи Дирихле в шаре, полупространстве, полушаре и угле можно найти в [1, 3]

Литература

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

[2] Годунов С.К Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

[3] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов И.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматиздат, 1962.

[4] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа:
В 2-х т. Висагинас: «Alfa», 1998.

[5] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

[6] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1973.

[7] Михлин С.Г. Курс математической физики. СПб.: «Лань», 2002.

[8] Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

[9] Шилов Г.Е. Математический анализ (функции одного переменного), часть 3. М.: Наука, 1970.