Задачи на решётках

В. В. Вавилов, О. Н. Герман, А. В. Устинов

1 Базисы решёток

1. Пара векторов $\mathbf{a} = m\mathbf{e_1} + n\mathbf{e_2}$ и $\mathbf{b} = k\mathbf{e_1} + l\mathbf{e_2}$, где m, n, k, l — целые числа, тогда и только тогда порождает ту же решетку, что и векторы $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$, т. е. $\Lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \Lambda(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$, когда

$$|ml - nk| = 1.$$

2. Доказать, что у любой решетки можно так выбрать базис $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, что $|\mathbf{e_2}| \geq |\mathbf{e_1}|$, длина проекции вектора $\mathbf{e_2}$ на направление вектора $\mathbf{e_1}$ не превосходит половины длины вектора $\mathbf{e_1}$ и угол между векторами $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$ не тупой.

2 Примитивные треугольники

3. Пусть A и B — два узла решетки $\mathbb{Z}^2$, из которых второй на p клеток правее и на q выше первого, т. е. расстояние между узлами равно $\sqrt{p^2 + q^2}$. Вычислите расстояние от ближайшего к прямой AB узла решетки, не лежащего на этой прямой.
4. (Материалы жюри ВМО) Любую вершину треугольника разрешается симметрично отразить относительно другой и заменить ее полученной точкой. Можно ли такими операциями любой треугольник превратить в прямоугольный или остроугольный.
5. Вершины треугольника являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$ и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что если такой треугольник внутри себя содержит ровно один узел решетки, то он является центром тяжести (точкой пересечения медиан) этого треугольника.
6. Докажите, что если решетку $\mathbb{Z}^2$ разбить на четыре непересекающихся подрешетки с клетками 2×2, то вершины любого примитивного треугольника решетки $\mathbb{Z}^2$ обязательно попадут в узлы трех разных указанных подрешеток.
7. Игра «Чехарда». (Москва, 1973) В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду, т. е. прыгают друг через друга, причем если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии, что и до прыжка, и, естественно, на той же прямой. Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину?

3 Формула Пика и её приложения

8. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, ограничивает простой многоугольник.
а) Какую площадь может ограничивать эта ломаная?
б) Какую наибольшую длину она может иметь?
9. Докажите, что площадь восьмиугольника, полученного в результате соединения вершин квадрата площади 1 с серединами его сторон, равна $1/6$. Рассмотрите случай параллелограмма.
10. Пусть вершины выпуклого n–угольника находятся в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$, а внутри и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что $n \leq 4$.
11. (Ленинград, 1982) Все вершины выпуклого пятиугольника являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$, а его стороны — целые числа. Докажите, что периметр такого пятиугольника является чётным числом.
12. (Россия, 1983) Докажите, что внутри любого выпуклого пятиугольника на решетке $\mathbb{Z}^2$ найдется хотя бы один узел этой решетки. Справедливо ли аналогичное утверждение для невыпуклого пятиугольника?
13. Произвольный квадрат размером $n \times n$ на плоскости, очевидно, покрывает $(n+1)^2$ узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, если один из его углов находится в узле решетки, а его стороны параллельны линиям решетки. Докажите, что при любом расположении такого квадрата на плоскости он покрывает не более $(n+1)^2$ точек решетки $\mathbb{Z}^2$.
14. Если вершины треугольника ABC являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$, а внутри него имеется ровно один узел этой решетки, то

$$[ABC] \leq 9/2.$$

4 Многоугольники на решётках

15. Существует ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами, который может быть положен на клетчатую бумагу так, чтобы его вершины попали в узлы, и ни одна из сторон не совпадала с линиями бумаги?
16. Пусть α — наименьший угол параллелограмма, расположенного на решетке $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что имеется только три возможности: α/π — иррациональное число, $\alpha = \pi/2$ или $\alpha = \pi/4$.
17. а) На решетке $\mathbb{Z}^2$ нельзя расположить никакой правильный многоугольник, за исключением квадрата, таким образом, чтобы все его вершины являлись узлами решетки.
б) Из утверждения а) следует, что числа $\cos(\pi/n)$ при $n > 3$ являются иррациональными; то же — для чисел $\sin(\pi/n)$ при $n \neq 6$ и для $\operatorname{tg}(\pi/n)$ при $n \neq 4$.
18. Докажите, что не существует решётки, которая одновременно содержала бы квадрат и правильный треугольник.
19. а) Докажите, что из всех возможных равноугольных многоугольников на решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить только прямоугольник и восьмиугольник.

б) Докажите, что среди всех равносторонних многоугольников на решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить многоугольник с любым четным числом сторон и нельзя расположить ни одного многоугольника с нечетным числом сторон.

5 Математический сад

20. Отрезок с концами в точках $A(p, 0)$ и $B(0, p)$ проходит через $p-1$ узел решетки $\mathbb{Z}^2$: $(1, p-1), (2, p-2), \ldots, (p-1, 1)$. Если провести через эти точки отрезки, соединяющие их с началом координат — точкой $O = (0, 0)$, то их будет $p-1$ и они разобьют треугольник OAB на p маленьких треугольников. Ясно, что два крайних треугольника имеют по стороне, лежащей на некоторой оси координат, и не имеют узлов решетки внутри себя. Если p — простое число, то верно также то, что ни один из разделяющих отрезков, исходящих из начала координат, не содержит никакого узла решетки. Докажите, что для простого p все узлы решетки, находящиеся внутри треугольника OAB, располагаются внутри $p-2$ маленьких треугольников, причем поровну в каждом из них.

21. Математический сад. а) На квадратном участке со стороной 100 растут (цилиндрические) деревья радиуса 1. Докажите, что если на этом участке нельзя проложить (сколь угодно тонкую) прямолинейную тропинку длины 10, не задевающую ни одного дерева, то число деревьев не менее 400.

б) На плоскости расположены круги радиуса r с центрами во всех узлах целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, за исключением узла $(0, 0)$. Какой длины отрезок, середина которого совпадает с точкой $(0, 0)$, можно разместить, чтобы он не пересекал данных кругов?

в) Пусть ρ — наименьший радиус стволов в правильно засаженной лесе, имеющем форму круга, при котором деревья полностью заслоняют вид из центра. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \leq \rho \leq \frac{1}{R}.$$

22. В целочисленную решетку на плоскости вбили тонкие гвозди и положили вектор длины 1987. Можно ли перемещать его по плоскости так, чтобы повернуть на 180° и так, чтобы он не задел ни одного гвоздя?

23. Докажите, что «перекатывая через сторону» правильный пятиугольник по плоскости ее нельзя полностью покрыть конечное число раз (т. е. таким образом, чтобы каждая точка принадлежала одинаковому числу пятиугольников).

6 Теорема Минковского

24. (Блихфельд.) а) Любую фигуру, площади меньше 1, можно так расположить на плоскости, что она не будет покрывать ни одного узла целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.

б) **Теорема Блихфельда.** Пусть на плоскости заданы некоторая решетка Λ, $\Delta(\Lambda) = 1$, и плоская фигура F, которая имеет площадь не меньше заданного натурального числа n: $[F] \geq n$. Тогда эту фигуру можно при помощи параллельного переноса переместить таким образом, чтобы она покрывала (содержала внутри или на своей границе) не менее $n+1$ узла решетки Λ .

25. (Москва, 85) Квадрат площади 4 на плоскости
а) содержит не менее двух узлов решетки $\mathbb{Z}^2$;
б) в предположении что он содержит уже не менее 7 узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, в действительности содержит тогда не менее 9 таких узлов.

26. Теорема Минковского. Узел $(0,0)$ является центром симметрии выпуклой фигуры площади больше 4 (возможен случай неограниченной области). Тогда эта фигура содержит хотя бы одну точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

27. (Чехословакия, 1982) На координатной плоскости найти выпуклое множество, которое содержит бесконечно много узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, но в пересечении с любой прямой содержит лишь конечное (или пустое) множество таких узлов.

28. Теорема Ферма–Эйлера. Для того, чтобы простое число $p > 2$ было представимо в виде суммы двух квадратов, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид $p = 4n + 1$.

7 Домашнее задание

29. (Венгрия, 1942.) Пусть a, b, c, d такие целые числа, что система уравнений

$$\begin{aligned} ax + by &= m, \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

для всех целых n и m имеет решение в целых числах. Докажите, что

$$|ad - bc| = 1.$$

30. (Москва, 1958.) Сторона клетчатой бумаги равна 1. По линиям сетки построен прямоугольник размером $m \times n$. Можно ли в прямоугольнике провести по линиям сетки ломаную, которая ровно один раз проходила бы через каждый узел сетки, расположенный внутри или на границе прямоугольника? Если можно, то какова её длина? Какую площадь она будет ограничивать?

31. Пусть $f(P) = aN_i(P) + bN_e(P) + c$, где a, b, c — некоторые числа. Пусть эта функция, заданная на всех простых многоугольниках и расположенных на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ такова, что $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$, если P разбит некоторой ломаной с вершинами в узлах решетки на два простых многоугольника P_1 и P_2 (такие функции называются аддитивными). Докажите, что $b = a/2$ и $c = -a$.

32. (Студенческая олимпиада, мехмат МГУ.) В пространстве дан параллелепипед с вершинами в узлах целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3$. Внутри параллелепипеда расположено a узлов, на внутренней части граней (исключая ребра) — b узлов, на ребрах (исключая вершины) — c узлов. Докажите, что объем параллелепипеда равен $a + b/2 + c/4 + 1$.

33. (Студенческая олимпиада, Москва.) Доказать, что на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ любой выпуклый многоугольник площади S можно заключить в параллелограмм площади не более $4S$ (все вершины многоугольников — узлы решетки).

34. (Киев, 1975.) На решетке $\mathbb{Z}^2$ расположен треугольник со сторонами a, b, c и радиусом описанной окружности R. Докажите, что $abc \geq 2R$.
35. (Всесоюзная олимпиада, 1986.) Докажите, что на решетке $\mathbb{Z}^2$ нельзя расположить выпуклый четырехугольник, у которого одна диагональ вдвое длинней другой, а угол между диагоналями равен $45°$.
36. а) Среди пяти правильных многогранников в пространстве на решетке $\mathbb{Z}^3$ можно разместить куб, тетраэдр и октаэдр, но додекаэдр и икосаэдр не вписываются ни в какую пространственную решетку.
б) Пусть в пространстве задано семейство параллельных плоскостей такое, что расстояния между соседними плоскостями семейства равны. Можно ли расположить в пространстве а) икосаэдр, б) додекаэдр так, чтобы их вершины лежали на плоскостях семейства?
37. Докажите, что длина ребра куба с вершинами в узлах пространственной ортогональной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3$ всегда является целым числом.
38. (Москва, 1986.) Вокруг каждого узла решетки $\mathbb{Z}^2$ описан круг радиуса r. Тогда при $R > (3+r^2)/2$ любая окружность с радиусом R пересекает хотя бы один из этих кругов.
39. (Москва, 1986.) Вокруг каждого узла решетки $\mathbb{Z}^2$ описан круг радиуса r. Тогда при $R > (3+r^2)/2$ любая окружность с радиусом R пересекает хотя бы один из этих кругов.
40. (СФРЮ, 1973.) Несколько точек на плоскости расположены так, что расстояние между любыми двумя из них больше 2. Доказать, что любое множество площади меньше π можно параллельно перенести по плоскости на вектор длины меньше 1 так, чтобы оно не содержало ни одной из данных точек.
41. Всякая замкнутая выпуклая область (в частности, выпуклый многоугольник) на плоскости, имеющая площадь не меньше, π содержит две точки, находящиеся на расстоянии 2 друг от друга.