Системы линейных уравнений

А. В. Устинов

1. Метод Гаусса. Предположим, что имеется система из n линейных уравнений от переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Одним из возможных методов решения такой системы является метод Гаусса. Он заключается в том, что с помощью первого уравнения переменная x_1 исключается из остальных уравнений. Затем с помощью нового второго уравнения переменная x_2 исключается из всех следующих уравнений. И так далее, пока из последнего уравнения не получится значение последней переменной. После чего остальные переменные находятся в обратном порядке.

2. За круглым столом сидят 4 гнома. Перед каждым стоит кружка с молоком. Один из гномов переливает $\frac{1}{4}$ своего молока соседу справа. Затем сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и, наконец, четвертый гном $\frac{1}{4}$ оказавшегося у него молока наливает первому. Во всех кружках вместе молока 2л. Сколько молока было первоначально в кружках, если

а) в конце у всех гномов молока оказалось поровну?

б) в конце у всех гномов оказалось молока столько, сколько было в начале?

3. Решите системы уравнений:

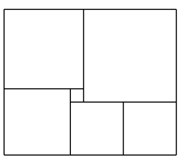
$$\text{а)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_{99} + x_{100} + x_1 &= 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 &= 0; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2a_1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2a_2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2a_3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 2a_4. \end{cases}$$

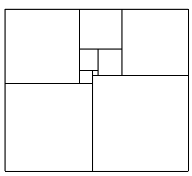
4. Известно, что

$$\begin{cases} a_1 - 4a_2 + 3a_3 &\geqslant 0, \\ a_2 - 4a_3 + 3a_4 &\geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 &\geqslant 0, \\ a_{100} - 4a_1 + 3a_2 &\geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $a_1 = 1$; чему равны тогда числа $a_2, \ldots, a_{100}$?

5. На рисунках изображены разбиения прямоугольников на квадраты. Найдите стороны этих квадратов, если в первом случае сторона наименьшего квадрата равна 1, а во втором — 2.

а) 

б) 

6. Может ли система линейных уравнений с действительными коэффициентами иметь в точности два различных решения?

7. Прямоугольник со сторонами a И b разрезан на конечное число квадратов. Докажите, что a/b — рациональное число.

8. Имеются 13 гирь. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на две чашки весов, по шесть на каждую, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют одну и ту же массу, если известно, что: а) масса каждой гири равна целому числу граммов; б) масса каждой гири равна рациональному числу граммов; в) масса каждой гири может быть равна любому действительному (неотрицательному) числу.

9. Альтернатива Фредгольма. Пусть имеется система линейных уравнений (1) с фиксированными коэффициентами $a_{j,k}$ $(1 \leqslant j, k \leqslant n)$. Докажите, что всегда выполняется одна из следующих возможностей:

1) для любых $b_1, \ldots, b_n$ система имеет ровно одно решение (в частности, при $b_1 = \ldots = b_n = 0$ существует только нулевое решение);

2) для некоторых $b_1, \ldots, b_n$ система неразрешима, а для некоторых (в том числе нулевых) имеет бесконечно много решений.

Определение. *Пусть функция $f(x, y)$ задана во всех точках плоскости с целыми координатами. Назовем функцию $f(x, y)$ гармонической, если ее значение в каждой точке равно среднему арифметическому значений функции в четырех соседних точках, то есть*

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)).$$

Если функция определена лишь в некоторой области, то это условие должно выполняться во всех внутренних точках этой области (то есть для тех, у которых существуют четыре соседние точки).

10. Гармонические функции в прямоугольнике. Докажите, что внутри прямоугольника $1 \leqslant x \leqslant m$, $1 \leqslant y \leqslant n$ всегда единственным образом можно восстановить значения гармонической функции $f(x, y)$, если её значения заданы в соседствующих с прямоугольником $2(m + n)$ точках.

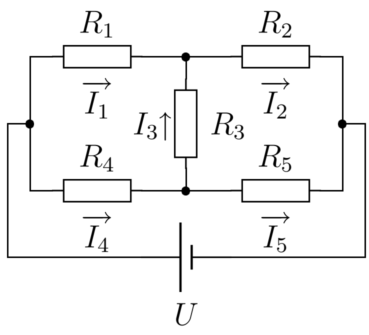
Изменится ли ситуация, если вместо прямоугольника рассматривать более сложные области?

11. Правила Кирхгофа. Для расчета схем постоянного тока используется следующий алгоритм. На каждом участке цепи ставится ток, идущий в произвольном направлении. Затем составляется система линейных уравнений с помощью двух правил Кирхгофа:

1) алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле цепи равна нулю;

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС.

Например, для схемы, изображенной ниже, получается следующая система уравнений, из которой можно однозначно найти токи $I_1, \ldots, I_5$:



$$\begin{cases} R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = U, \\ R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_4 = 0, \\ R_3 \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 - R_5 \cdot I_5 = 0, \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0, \\ -I_3 + I_4 - I_5 = 0. \end{cases}$$

Узлы электрической цепи будем обозначать $\langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle$. Для каждой пары соседних узлов $\langle j\rangle$ и $\langle k\rangle$ запись $\langle j,k\rangle$ будет обозначать соединяющий их проводник, $R_{j,k}$ — его сопротивление, $I_{j,k}$ — текущий из $\langle j\rangle$ в $\langle k\rangle$ ток ($I_{j,k} = -I_{k,j}$).

Докажите, что если токи удовлетворяют уравнениям, составленным по второму правилу Кирхгофа, то каждому узлу $\langle j\rangle$ электрической цепи можно поставить в соответствие некоторое число φ_j (потенциал) так, что для любых соседних узлов $\langle j\rangle$ и $\langle k\rangle$ будет выполняться равенство

$$I_{j,k} \cdot R_{j,k} = \varphi_j - \varphi_k$$

(падение напряжения равно разности потенциалов).

Выведите отсюда, что независимо от выбранной схемы, система линейных уравнений, составленная по правилам Кирхгофа не может иметь больше одного решения, и что она всегда разрешима.

12. Тепловая мощность цепи. Рассмотрим цепь, которая состоит из сопротивлений и одного источника напряжения. При прохождении тока $I_{j,k}$ по проводнику с сопротивлением $R_{j,k}$, соответствующего разности потенциалов $U_{j,k} = \varphi_j - \varphi_k$ на проводнике $\langle j,k\rangle$ выделяется тепловая мощность

$$q_{j,k} = R_{j,k} \cdot I_{j,k}^2 = U_{j,k} \cdot I_{j,k} = \frac{(\varphi_j - \varphi_k)^2}{R_{j,k}}.$$

Отвлечемся от физической природы задачи и рассмотрим величину

$$Q = \sum_{j,k} q_{j,k}$$

(суммарную мощность цепи) как функцию от потенциалов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Будем считать, что потенциалы φ_1 и φ_n стоят на концах источника напряжения и, таким образом, фиксированы.

а) Докажите, что для функции Q существует ровно один набор значений $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, при котором она достигает своего минимального значения. Используя этот потенциал дайте второе доказательство того факта, что система уравнений, составленная по правилам Кирхгофа разрешима и имеет ровно одно решение. Проверьте также, что для токов, удовлетворяющих правилам Кирхгофа, потенциалы распределены так, что тепловая мощность цепи минимальна.

б) Докажите, что минимальное значение величины Q равно $U \cdot I = R \cdot I^2$, где $U = \varphi_1 - \varphi_n$ — напряжение на источнике, I — текущий через него ток, и R — общее сопротивление цепи, определяемое равенством $R = U/I$.

в) Докажите, что если в цепи одно сопротивление увеличить, то общее сопротивление цепи не уменьшится.