Летняя многопредметная олимпиадная школа СУНЦ МГУ
Секция математики, 16 июня 2005 года
ЗАДАЧНЫЙ КАЛЕЙДОСКОП

1 Логические и комбинаторные задачи

№ 1. (Из протокола Кишиневской гимназии за 1879 г.; обнаружила Б. П. Коварская — см. «Математика в школе», № 2, 1998.) Три мужа — Андрей, Иван и Степан пошли со своими женами — Анной, Екатериной и Ольгой за покупками. Каждый платил за каждую вещь по стольку рублей, сколько он купил вещей. Андрей купил больше Анны на 23 вещи, Иван — больше Екатерины на 11 вещей, а Степан — меньше Ольги на 23 вещи. Определить, кто на ком женат, если каждый из мужей израсходовал 63-мя рублями больше своей жены.

№ 2. а) Математик R сказал математикам P и S: «Я задумал два натуральных числа. Каждое из них больше единицы, а сумма их меньше 100. Математику P я сейчас сообщу (по секрету от S) произведение этих чисел, а математику S (по секрету от P) — их сумму».

Он выполнил обещанное и предложил отгадать задуманные числа. Между P и S произошел следующий диалог (высказывания P мы обозначаем буквой π с индексами, высказывания S — буквой σ):

— (π_1) Я, пожалуй, не могу сказать, чему равны задуманные числа.
— (σ_1) Я заранее знал, что Вы этого не сможете.
— (π_2) А ведь тогда я их знаю.
— (σ_2) А тогда и я их знаю.

Попробуйте теперь и вы отгадать задуманные числа.

б) Начало условия этой задачи вплоть до (σ_1) — то же, что и в п. а). Дальше диалог меняется:

— (π_2) А я заранее знал, что Вы это будете знать заранее.
— (σ_2) Я не знаю, чему равны задуманные числа.
— (π_3) А я тогда их знаю.

Найдите задуманные числа.

№ 3. Совет директоров большой компании, состоящий из 15 человек, решил образовать из своих членов 20 комитетов. Можно ли сформировать эти комитеты так, что

— каждый член совета входит в 4 комитета;
— каждый комитет состоит из трех членов;
— нет двух комитетов, включающих более одного общего члена.

№ 4. В тенисном турнире принимали участие 10 игроков. Каждый играл с каждым только один раз. В этом турнире если игрок i выигрывал партию у игрока j, то количество партий, который проиграл i плюс количество партий, которые выиграл j не меньше 8. Скажем, что три игрока i, j, k образуют нетипичную тройку игроков, если i

выиграл у j, j выиграл у k и k выиграл у i. Докажите, что в этом турнире участвовало ровно 40 нетипичных троек игроков.

№ 5. На множестве действительных чисел введена новая операция $x\#y$ такая, что для любых x, y, z

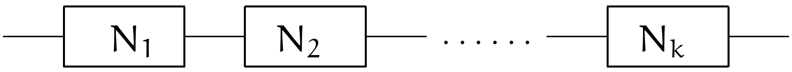
1) $(x+y)(x\#y) = x^2\#y^2$;
2) $x\#y = (x+z)\#(y+z)$;
3) $1\#0 = 1$.

Найти эту операцию (выразить через известные).

№ 6. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число. Найти максимальное количество элементов в множестве M пар целых чисел (j,k), $1 \leqslant j < k \leqslant n$, удовлетворяющих условию: если $(j,k) \in M$, то $(k,m) \notin M$ при всех m.

№ 7. Доказать, что по окончании волейбольного турнира с участием 2^n команд (в один круг) можно выбрать команды K_1, K_2,…, K_{n+1} так, что каждая из команд K_j, $j \leqslant n$, выиграла у всех команд K_{j+1}, …, K_{n+1}.

№ 8. Схема железнодорожного узла изображена на рисунке



Он состоит из k разъездов, в которых N_1, N_2, …, N_k железнодорожных веток. Справа к узлу приближается состав из m локомотивов, которые могут двигаться только справа налево. При каком наибольшем m локомотивы при прохождении железнодорожного узла могут перестроиться в любом порядке? В любой ветке может поместиться любое количество локомотивов.

№ 9. На бесконечном листе клетчатой бумаги (со стороной клетки 1) некоторые стороны клеток окрашены краской так, что из любого узла можно перейти в любой другой узел по окрашенным отрезкам, при этом отсутствуют замкнутые пути. Доказать, что существуют такие два соседних узла, что кратчайший путь из одного в другой по окрашенным линиям больше 1000.

№ 10. В квадратной таблице $n \times n$ расставлены буквы так, что все строки таблицы различны. Докажите, что можно вычеркнуть один из столбцов таблицы так, что в полученной таблице $n \times (n-1)$ все стоки будут по прежнему различны.

2 Алгебра и теория чисел

№ 11. Ученик, используя свои записи, должен был написать на доске шесть членов арифметической прогрессии, составленной из натуральных чисел. В итоге он написал только пять членов
$$113, 137, 149, 155, 173;$$
при этом ошибся при записи одного из этих пяти чисел. Можно ли восстановить все шесть членов прогрессии?

№ 12. Двузначное число таково, что если его умножить на обе его цифры, то получится число с тремя одинаковыми цифрами. Найти все такие числа.

№ 13. Найти все натуральные n, для которых число $n^4 + 4^n$ является простым. Что можно сказать о $n^{16} + 16^n$ и $n^k + k^n$?

№ 14. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - 2 = y, \\ y^2 - 2 = z, \\ z^2 - 2 = x. \end{cases}$$

№ 15. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел x, y, z таких, что $x^3 + y^5 = z^7$.

№ 16. Найти $x^2 + y^2 + z^2$, если натуральные числа x, y, z таковы, что
$$7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8 \quad \text{и} \quad 16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3.$$

№ 17. Доказать, что ни одно из чисел вида
$$a_n = \underbrace{1001001\ldots1001}_{n \text{ единиц}} \qquad (n \geqslant 2),$$
не является простым.

№ 18. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(x^3) + Q(x^3)$ делится на $x^2 + x + 1$. Доказать, что $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на $(x - 1)$.

№ 19. Для каждого $n \geqslant 3$ найти наименьшее число $f(n)$ со следующим свойством: при любом выборе подмножества $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ с $f(n)$ элементами в нем найдутся три попарно взаимно простых числа.

№ 20. Решить систему уравнений $(a > 0)$
$$\begin{cases} x_1|x_1| = x_2|x_2| + (x_1 - a)|x_1 - a|, \\ x_2|x_2| = x_3|x_3| + (x_2 - a)|x_2 - a|, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n|x_n| = x_1|x_1| + (x_n - a)|x_n - a|. \end{cases}$$

№ 21. Известно, что уравнение $x^2 + y^2 - az^2 - au^2 = 0$, где a — целое число, имеет ненулевое решение в целых числах. Доказать, что тогда и уравнение $x^2 + y^2 - az^2 = 0$ имеет ненулевое решение в целых числах.

№ 22. Вычислить сумму

$$\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} 3 + \ldots + \operatorname{tg}(n-1) \cdot \operatorname{tg} n.$$

№ 23. Найти все целые числа a, b, c, d такие, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 b^2 c^2.$$

№ 24. Найти наименьшее натуральное число n такое, чтобы числа $2n+1$ и $37n+1$ были квадратами некоторых чисел.

№ 25. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — действительные числа. Составим десять сумм по три слагаемых в каждой: $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 + x_4$, $\ldots$, $x_3 + x_4 + x_5$. Найти наименьшее число n со следующим свойством: если n из указанных сумм равны нулю, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

№ 26. Дано 16 кубов с длинами ребер соответственно равных $1, 2, 3, \ldots, 16$. Разделить их на две группы так, чтобы в обеих группах были равны: суммарные объемы, суммы площадей боковых поверхностей, суммы длин всех ребер и количество кубов.

3 Анализ

№ 27. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \{(5 + \sqrt{24})^n\}.$$

№ 28. (VII Соровская олимпиада). Пусть γ — наибольший корень уравнения

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

Найти первые 100 знаков после запятой у числа γ^{1000}.

№ 29. Уравнение $ax^2 - bx + c = 0$, где a — натуральное число, а b и c — целые числа, имеет два различных корня, которые расположены строго внутри интервала $(0; 1)$. Доказать, что $a \geqslant 5$.

№ 30. (И. И. Воронович, г. Минск). Найти все пары положительных чисел α и β, такие, что при любом натуральном n выполняется равенство $[\alpha[\beta n]] = n - 1$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x.

№ 31. Доказать, что для всех $n = 2, 3, \ldots$

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}} < 3.$$

№ 32. Для каждого натурального числа $n \geqslant 2$, найти функцию вида

$$f_n(x) = a_n + b_n x + c_n |x - D_n|,$$

где a_n, b_n, c_n, D_n зависят только от n и такую, что

$$f_n(k) = k+1 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \quad \text{и} \quad f_n(n) = 1.$$

№ 33. Можно ли подобрать 100 натуральных чисел так, чтобы разность двух любых из них равнялась наибольшему общему делителю этой пары чисел? (С.И.Токарев; см. «Математика в школе», № 2, 1998, задача 4310).

№ 34. Найти все функции целого аргумента $f(x)$, которые при любых целых x и y удовлетворяют соотношению

$$f(x+y) + f(x-y) = f(2x).$$

№ 35. Последовательность положительных действительных чисел a_1, a_2, a_3,... обладает следующим свойством:

$$a_n^2 \leqslant a_n - a_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказать, что при любом n выполняется неравенство $a_n < 1/n$.

№ 36. Найти все такие натуральные числа k, для каждого из которых выражение

$$\sin kx \cdot \sin^k x + \cos kx \cdot \cos^k x - \cos^k 2x$$

не зависит от x.

№ 37. Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geqslant 6^n (n!)^2.$$

№ 38. Доказать, что для любых действительных чисел a и b существует действительное число $c \in (0; 1)$ такое, что

$$\left| ac + b + \frac{1}{c} \right| > \frac{1}{24}.$$

№ 39. Доказать, что существует целое число n в пределах $1 \leqslant n \leqslant 800$, для которого $|\sin \sqrt{n}| < 1/100$.

№ 40. Найти наименьшее значение величины

$$\max\{x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4 + x_5, x_4 + x_5 + x_6, x_5 + x_6 + x_7\},$$

где все x_k — неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

№ 41. Доказать, что положительные числа a, b, c, d всегда удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leqslant \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{d}\right)^b.$$

№ 42. Рассмотрим числовую последовательность a_1, a_2, ..., где $a_0 = 1$ и при всех $n \geqslant 1$
$$a_n = a_{[2n/3]} + a_{[n/4]}.$$
Найти
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

№ 43. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что сумма любых нескольких членов этой последовательности не представляется в виде степени натурального числа с натуральным показателем, большим единицы?

№ 44. Доказать, что для любых чисел x_1, x_2, ..., x_n из отрезка $[0, 1]$ справедливо неравенство
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \leqslant \frac{n^2}{2}.$$

№ 45. Уравнение
$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
имеет шесть действительных корней. Найти коэффициенты a, b, c, d.

№ 46. Доказать, что существует число вида 5^n (n — натуральное), десятичная запись которого содержит 100 подряд идущих нулей.

№ 47. Доказать, что для всех положительных x справедливо неравенство
$$\frac{1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}}{x + x^3 + \ldots + x^{2n-1}} \geqslant \frac{n+1}{n}.$$

№ 48. Какие натуральные числа можно представить в виде
$$\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right],$$
где n — натуральное число?

№ 49. Пусть $0 < \alpha < \pi$. Доказать, что
$$\sin\frac{\alpha}{6} + \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\frac{\alpha}{4}\right) < \frac{\alpha}{3}.$$

№ 50. Доказать неравенство
$$\min_{i\leqslant j}(a_i - a_j)^2 \leqslant \frac{12}{n(n^2-1)}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2),$$
где a_1, a_2, ..., a_n — произвольные действительные числа.

№ 51. На прямой заданы n красных и n синих точек. Докажите, что сумма квадратов расстояний между точками одного цвета, не превосходит суммы квадратов расстояний между точками разного цвета.

№ 52. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что
$$f(x) = \sup_y (xy - f(y)).$$

4 Геометрия (планиметрия)

№ 53. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC касаются друг друга. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABD и CDB также касаются друг друга.

№ 54. Ученик начертил четырехугольник $ABCD$ и измерил длины его сторон и диагоналей. Он получил следующие результаты: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 8$, $DA = 9$, $AC = 10$, $BD = 11$. Докажите, что его измерения неточны.

№ 55. Точки D и E лежат на стороне BC треугольника ABC. Известно, что $BD = CE$ и то, что углы BAD и CAE равны. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

№ 56. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE и точка — точка их пересечения. На отрезках OA и OC взяты точки M и K соответственно так, что углы BMC и BKA — прямые. Докажите, что $BK = BM$.

№ 57. Поместить внутри правильного шестиугольника со стороной 1 квадрат возможно больших размеров. Найти сторону этого квадрата.

№ 58. Доказать, что на координатной плоскости не существует замкнутой ломаной с нечетным числом звеньев, у которой координаты всех вершин рациональны, а длина каждого звена равна 1.

№ 59. Докажите, что правильный $2n$-угольник можно разрезать на ромбы.

№ 60. Все вершины треугольника ABC имеют целые координаты, а строго внутри этого треугольника имеется ровно одна точка P с целыми координатами. Прямая AP пересекает NC в точке E. Найти наибольшее значение, которое может принимать отношение AP/PE.

№ 61. Доказать, что на плоскости существует равноугольный шестиугольник, стороны которого равны 5, 8, 11, 14, 23 и 29 в некотором порядке.

№ 62. На плоскости даны две точки, расстояние между которыми больше 1 км. При помощи только неразмеченной короткой линейки (с длиной меньше 20 см.) провести отрезок, соединяющий заданные точки.

№ 63. Даны две непересекающиеся окружности с центрами O_1 и O_2. Построим окружность с центром на прямой O_1O_2, касающуюся двух первых внешним образом. Доказать, что третья окружность пересекает общие внутренние касательные к данным окружностям в четырех точках, являющихся вершинами четырехугольника, две стороны которого соответственно параллельны общим внешним касательным к данным окружностям.

№ 64. Найти все простые четырехугольники такие, что на их сторонах и диагоналях можно расставить стрелки так, что сумма шести полученных векторов будет равна нулю.

№ 65. Дан треугольник ABC. Точки D, E и F, отличные от вершин треугольника, лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Доказать, что если около четырехугольника $AFDE$ можно описать окружность, то

$$4\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leqslant \left(\frac{EF}{AD}\right)^2.$$

№ 66. Пусть ABC остроугольный треугольник и p — прямая, проходящая через его ортоцентр. Доказать, что три прямые, симметричные p относительно сторон треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

№ 67. Какую наибольшую площадь имеет правильный треугольник, который можно покрыть тремя равносторонними треугольниками со сторонами 1?

№ 68. Докажите, что круг не равносоставлен никакому многоугольнику.

№ 69. На сторонах AB, BC и AC правильного треугольника ABC построены равнобедренные треугольники ABL, DCK и ACM, с углами при основаниях, равных, соответственно, $25°$, $20°$ и $15°$, а точки L, K и M лежат внутри треугольника ABC. Обозначим через R, Q, P — точки пересечения прямых AL и CK, BK и AM, CM и BL (также соответственно). Найти углы треугольника PQR.

№ 70. Даны k равносторонних треугольников со сторонами 1, $1/2$, $1/3$, $\ldots$, $1/k$. Каково наименьшее число a, при котором все эти треугольники можно без наложений поместить в равносторонний треугольник со стороной a?

№ 71. Доказать, что $d^2 + (b-a)^2 < c^2$, где d — диаметр вписанной в треугольник окружности и a, b, c — его стороны.

№ 72. «Изобретатель» придумал прибор, позволяющий через любую данную точку плоскости провести прямую, делящую площадь данной фигуры пополам. При помощи этого прибора, циркуля и линейки

а) разделить данный угол на три равные части.

б) построить квадрат по площади равного площади данного круга.

№ 73. На клетчатом листе бумаги нарисован квадрат со стороной 64, а в нем отмечено 62 квадрата со сторонами $1, 2, 3, \ldots, 63$. Стороны всех отмеченных квадратов проходят по линиям клетчатого листа. Доказать, что хотя бы один из отмеченных квадратов содержит другой отмеченный квадрат.

№ 74. . На острове зарыто некоторое число кладов, которые делят между собой несколько пиратов (все разной силы). Координаты кладов известны всем пиратам. Они договорились о том, что клад в данный момент принадлежит тому из пиратов, который находится к нему ближе остальных. Если несколько пиратов находятся на одинаковом расстоянии от клада, то клад достается наиболее сильному из них. Перед началом дележа каждому из них принадлежит хотя бы один клад. В первый момент времени каждый пират перемещается в такую точку острова, каждая координата которой является средним арифметическим соответствующих координат кладов, которыми данный пират владеет. В следующий момент каждый пират определяет какие клады принадлежат ему после перемещения и вновь перемещаются по тому же правилу, что и в первый момент. Если после очередного перемещения у одного из пиратов не оказалось ни одного клада, он выбывает из дележа. Доказать, что дележ закончится через конечное число перемещений.

№ 75. На плоскости дан треугольник ABC. Если кузнечик находится в некоторой точке X, то ему разрешается прыгать только в точки, симметричные точке X относительно любой из прямых AB, BC или AC. Доказать, что из любой точки плоскости кузнечик может за конечное число прыжков заскочить внутрь треугольника ABC либо на его границу.

№ 76. Стороны треугольника являются корнями уравнения третьей степени с целыми коэффициентами. Докажите, что высоты являются корнями уравнения шестой степени с целыми коэффициентами.

Обладают ли похожими свойствами медианы и биссектрисы?

№ 77. Доказать, что не существует квадрата, вершины которого расположены на четырех концентрических окружностях (на каждой окружности — по одной вершине), радиусы которых образуют арифметическую прогрессию.

№ 78. На плоскости расположено 100 точек так, что расстояние между любыми двумя из них не больше единицы. Каждые две из этих точек, удаленные друг от друга на расстояние больше чем $1/\cos 36^\circ$, соединяются отрезком. Доказать, что число проведенных отрезков не превосходит 3750.

№ 79. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены равнобедренные треугольники APB, AQC и CRB ($AP = PB$, $AQ = QC$, $CR = RB$). Треугольники APB и AQC лежат вне треугольника ABC, а треугольник CRB расположен по ту же сторону от отрезка BC, что и треугольник ABC. Доказать, что четырехугольник $APRQ$ является параллелограммом.

№ 80. Существует ли треугольник, который можно разрезать на три части по высоте и по биссектрисе, выходящих из одной вершины, из которых можно сложить другой треугольник?

№ 81. При помощи циркуля и линейки построить окружность, касающуюся данной окружности S и проходящую через две точки A и B, расположенные внутри S.

5 Геометрия (стереометрия)

№ 82. Пусть P — точка внутри тетраэдра $ABCD$. Прямые AP, BP, CP, DP пересекают противоположные грани тетраэдра в точках A', B', C', D' соответственно. Доказать, что точка P не может быть серединой более чем одного из отрезков AA', BB', CC', DD'.

№ 83. Даны две сферы: S_A с центром A и S_B с центром B. Прямая p касается сферы S_A в точке A_1 и сферы S_B в точке B_1; прямая q касается сферы S_A в точке A_2 и сферы S_B в точке B_2. Доказать, что ортогональные проекции отрезков A_1A_2 и B_1B_2 на прямую ABB равны.

№ 84. Куб разбит на конечное число прямоугольных параллелепипедов так, что объем шара, описанного около куба, равен сумме объемов шаров, описанных около параллелепипедов разбиения. Доказать, что все параллелепипеды являются кубами.

№ 85. В тетраэдре $ABCD$ двугранный угол с ребром AB равен двугранному углу с ребром DA. Доказать, что $S_{ABD} = S_{BDC}$, $S_{ABC} = S_{ADC}$.

№ 86. Имеются два тетраэдра, проекции которых на любую плоскость пространства являются многоугольниками с одинаковым числом вершин. Доказать, что эти тетраэдры равны.

№ 87. Внутри сферы S с центром в точке O и радиусом R расположены точки A, B, C не лежащие на одной прямой так, что $OA \perp AB$, $OA \perp AC$. Через точки A, B, C проведены две сферы радиусов R_1 и R_2 касающиеся сферы S. Доказать, что $R_1 + R_2 = R$.

№ 88. Четыре вершины куба, не лежащие в одной плоскости, имеют целые координаты в прямоугольной декартовой системе координат. Доказать, что координаты всех вершин куба — целые числа.

№ 89. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V. На луче $[A, B)$ выбрана точка E такая, что $AE = 2AB$. Аналогично на лучах $[BC)$, $[CD)$, $[DA)$ отмечаются точки F, G, H. Найти объем тетраэдра $EFGH$.