Окружности на решетках

В.ВАВИЛОВ, А.УСТИНОВ

Статья посвящена изучению возможных расположений окружности на декартовой плоскости и выяснению ситуаций, когда для заданного натурального числа n окружность внутри себя содержит ровно n узлов целочисленной решетки $\mathbf{Z}^2$ или проходит ровно через n ее узлов.

Теоремы Гаусса

Первое исследование решетки $\mathbf{Z}^2$ как математического объекта было, по-видимому, предпринято К.Гауссом – королем математики, как его называли современники. Он заинтересовался вопросом о том, как быстро с ростом R растет число $N(R)$ точек с целыми координатами в круге

$$K(R) = \left\{(x; y) : x^2 + y^2 \le R^2\right\},$$

где $R \ge 0$ целое число. Число $N(R)$ равно площади фигуры $F(R)$, составленной из тех единичных квадратов решетки, у которых левый нижний угол лежит в $K(R)$ (рис.1).

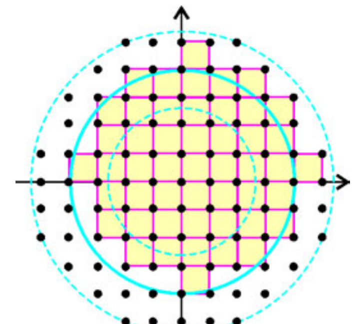
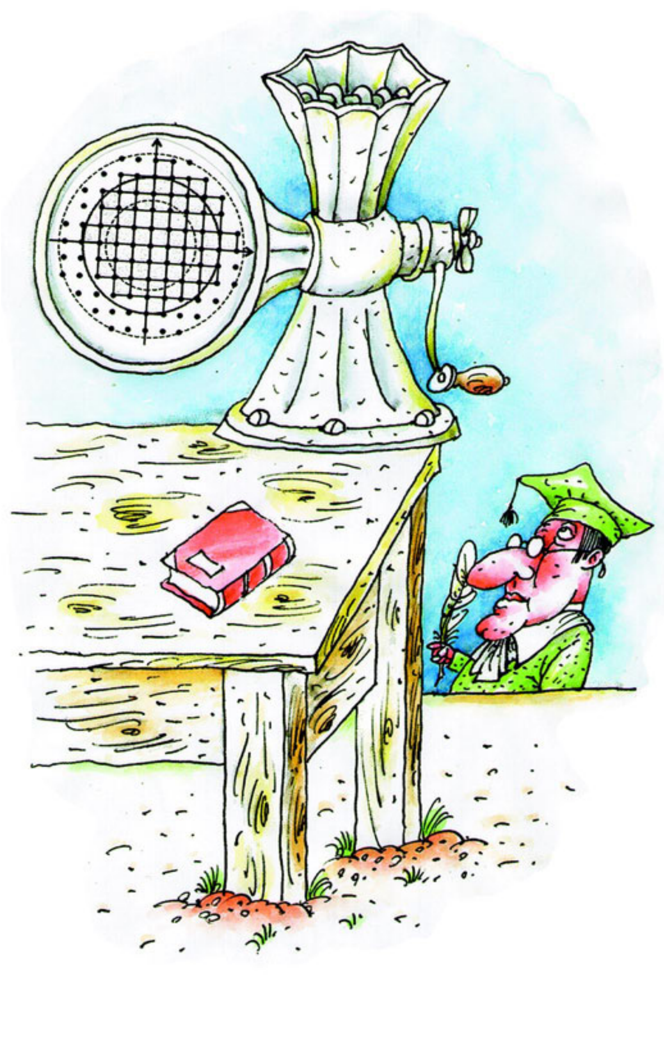


Рис. 1



Так как наибольшее расстояние между двумя точками единичного квадрата не превосходит $\sqrt{2}$, то ясно, что все квадраты, которые пересекаются окружностью $x^2 + y^2 = R^2$, расположены в кольце (при $R = 4$ его границы на рисунке 1 изображены пунктиром)

$$\left\{(x; y) : \left(R - \sqrt{2}\right)^2 \le x^2 + y^2 \le \left(R + \sqrt{2}\right)^2\right\}.$$

Площадь этого кольца равна

$$\pi\left(\left(R + \sqrt{2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{2}\right)^2\right) = 4\pi\sqrt{2}R,$$

и поэтому

$$\left|[F(R)] - \pi R^2\right| < 4\pi\sqrt{2}R,$$

где $[F]$ обозначает площадь фигуры F.

Итак,

$$\left|\frac{N(R)}{R^2} - \pi\right| \le \frac{4\pi\sqrt{2}}{R}.$$

Таким образом, при всех достаточно больших R имеет место приближенное равенство

$$\frac{N(R)}{R^2} \approx \pi,$$

что в более точной форме можно записать в виде отдельного утверждения.

Теорема 1 (К. Гаусс). *Имеет место соотношение*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{R^2} = \pi. \qquad (1)$$

Гаусс (как написано в книге [1]) численно проверил точность формулы (1), составив таблицу, где в последней строке приводятся приближенные значения для числа π:

R	10	20	30	100	200	300
$N(R)$	317	1257	2821	31417	125629	282697
π	3,17	3,1425	3,134	3,1417	3,140725	3,14107

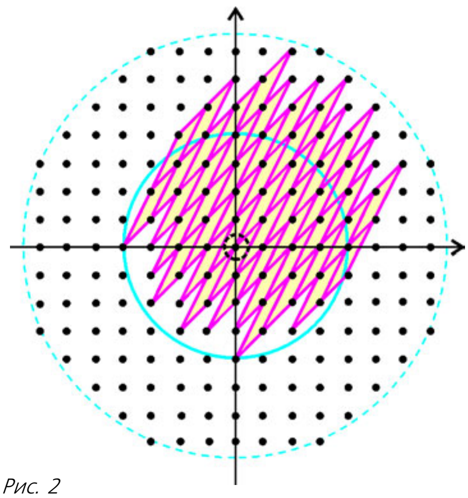


Рис. 2

Доказанное равенство (1) связано с одним из основных свойств решетки $\boldsymbol{Z}^2$: *площадь любого параллелограмма* П, *порождающего решетку* $\boldsymbol{Z}^2$, *равна 1*. Такие параллелограммы называются фундаментальными. Говорят, что параллелограмм порождает решетку $\boldsymbol{Z}^2$, если вся плоскость разбита (без наложений) на равные П параллелограммы, а множество вершин всех параллелограммов разбиения совпадает с множеством всех узлов целочисленной решетки.

Для доказательства сформулированного утверждения установим взаимно однозначное соответствие между фундаментальными параллелограммами и узлами решетки $\boldsymbol{Z}^2$. Сопоставим каждому параллелограмму его самую левую вершину, а если таких вершин две, то из них выберем ту, которая имеет наименьшую ординату. Модуль разности площади круга $K(R)$ и площади фигуры F, состоящей из объединения всех параллелограммов, которые соответствуют узлам из $K(R)$, меньше площади кольца

$$\left\{(x;\, y) : (R-a)^2 \le x^2 + y^2 \le (R+a)^2\right\},$$

где a – наибольшая диагональ параллелограмма П (на рисунке 2 $R = 4$ и $a = \sqrt{13}$). Если $[\Pi] = \Delta$, то $[F] = \Delta \cdot N(R)$ и, следовательно,

$$\left|\Delta \cdot N(R) - \pi R^2\right| < \pi\left((R+a)^2 - (R-a)^2\right) = 4a\pi R .$$

Значит,

$$\left|\frac{N(R)}{R^2} - \frac{\pi}{\Delta}\right| < \frac{4a\pi}{R\Delta} .$$

Устремляя R к бесконечности, по доказанному выше получаем, что

$$\pi = \lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{R^2} = \frac{\pi}{\Delta} = 1 ,$$

т.е. $\Delta = 1$.

Получим еще одно интересное следствие формулы (1). Величина $N(R)$ представляет собой число всех упорядоченных пар целых чисел $(x;\, y)$, для которых $x^2 + y^2 \le R^2$. Для любого узла $(x;\, y) \in \boldsymbol{Z}^2$ число $x^2 + y^2$ является целым. Поэтому если $r(k)$ обозначает число всех различных способов представления натурального k в виде суммы двух квадратов целых чисел (представления $k = a^2 + b^2 = (-a)^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2 = (-a)^2 + (-b)^2$ считаются попарно различными), то

$$N(R) = r(0) + r(1) + \ldots + r(n) ,$$

где $n = R^2$.

Теорема 2 (К.Гаусс). *Справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(0) + r(1) + \ldots + r(n)}{n} = \pi .$$

Отметим, что сама функция $r(n)$ ведет себя не регулярно. Например, $r(0) = 1$, $r(1) = 4$, $r(2) = 4$, $r(3) = 0$, $r(4) = 4$, $r(5) = 8$, $r(6) = 0$, $r(7) = 0$, $r(8) = 4$, … …, $r(21) = 0$, $r(22) = 0$, $r(23) = 0$, $r(24) = 0$, $r(25) = 12$.

Представление чисел суммой двух квадратов

С геометрической точки зрения величина $r(k)$ – это количество целых точек на окружности радиуса k с центром в начале координат. Ниже нам понадобятся формулы для вычисления значений функции $r(k)$.

Для натурального m запись $a \equiv b \pmod m$ означает, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m; другими словами, $a = mt + b$ ($t \in \boldsymbol{Z}$).

Инструментом для дальнейших построений является следующий важный результат.

Теорема 3 (о представлении целых чисел суммой двух квадратов). *Пусть $n > 1$ – натуральное число.*

а) Тогда

$$r(n) = 4\left(d_1(n) - d_3(n)\right),$$

где $d_1(n)$ – количество делителей числа n вида $4k + 1$ и $d_3(n)$ – количество делителей n вида $4k + 3$.

б) Если $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \ldots q_l^{\beta_l}$ – каноническое разложение n на простые множители, в котором $p_j \equiv 1 \pmod 4$, $q_j \equiv 3 \pmod 4$, то

$$r(n) = \begin{cases} 4(\alpha_1 + 1)\ldots(\alpha_k + 1), & \text{когда } \beta_1, \ldots, \beta_l \text{ четные;} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Полное доказательство этой теоремы, использующее свойства комплексных чисел, можно найти в статье А.Гончарова «Арифметика гауссовых чисел» («Квант» №12 за 1985 г.).

Отметим один полезный частный случай теоремы 3: уравнение

$$x^2 + y^2 = 5^k \ \ (k \ge 0)$$

имеет $4(k+1)$ целочисленных решений; другими словами, *окружность радиуса $5^{k/2}$ с центром в начале координат проходит в точности через $4(k+1)$ узлов решетки $\boldsymbol{Z}^2$.*

Теорема 3 имеет много различных приложений. В качестве первого из них приведем доказательство формулы Лейбница, которая на первый взгляд не связана ни с решетками, ни с представлениями чисел в виде суммы двух квадратов.

Теорема 4 (Г.Лейбниц). *Справедливо равенство*

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4},$$

где под выражением слева понимается

$$\lim_{n\to\infty} S_n,\quad S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Доказательство. Согласно утверждению а) теоремы 3,

$$N(R)=1+4\sum_{n=1}^{R^2}\left(d_1(n)-d_3(n)\right).$$

В то же время,

$$\sum_{n=1}^{R^2} d_1(n)=\left[\frac{R^2}{1}\right]+\left[\frac{R^2}{5}\right]+\left[\frac{R^2}{9}\right]+\ldots,$$

где справа стоит конечная сумма, а равенство справедливо, поскольку каждое слагаемое вида $\left[\frac{R^2}{k}\right]$ (k = = 1,5,9,13,…) равно количеству чисел, кратных k, в множестве $\{1, 2, 3, \ldots, R^2\}$. Аналогично,

$$\sum_{n=1}^{R^2} d_3(n)=\left[\frac{R^2}{3}\right]+\left[\frac{R^2}{7}\right]+\left[\frac{R^2}{11}\right]+\ldots$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}(N(R)-1)=\left[\frac{R^2}{1}\right]-\left[\frac{R^2}{3}\right]+\left[\frac{R^2}{5}\right]-\left[\frac{R^2}{7}\right]+\left[\frac{R^2}{9}\right]-\left[\frac{R^2}{11}\right]+\ldots$$

Определим $\sigma_n(R)$ равенством

$$\frac{1}{4}(N(R)-1)=\left[\frac{R^2}{1}\right]-\left[\frac{R^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{R^2}{4n+1}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+3}\right]+\sigma_n(R).\quad(2)$$

С одной стороны, остаток $\sigma_n(R)$ неотрицателен, так как

$$\sigma_n(R)=\left(\left[\frac{R^2}{4n+5}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+7}\right]\right)+\left(\left[\frac{R^2}{4n+9}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+11}\right]\right)+\ldots\ge 0$$

(каждая скобка неотрицательна). С другой стороны,

$$\sigma_n(R)=\left[\frac{R^2}{4n+5}\right]-\left(\left[\frac{R^2}{4n+7}\right]-\left[\frac{R^2}{4n+9}\right]\right)-\ldots\le\left[\frac{R^2}{4n+5}\right].$$

Пусть $R=4n+3$. Тогда очевидно, что $0\le\sigma_n(R)\le R$. Если в формуле (2) отбросить все целые части, то ее правая часть (по модулю) изменится не более чем на R. Таким образом,

$$\frac{1}{4}(N(R)-1)=R^2\left(1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right)+2\theta R,$$

или

$$\frac{N(R)-1}{4R^2}=1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{R-2}-\frac{1}{R}+\frac{2\theta}{R},$$

где $|\theta|\le 1$. Устремляя теперь R к бесконечности, с учетом равенства (1) получаем формулу Лейбница.

Окружности Шинцеля

Сначала отметим, что для любого натурального числа n существует круг с центром в точке $\left(\sqrt{2}; 1/3\right)$, который содержит внутри себя n точек целочисленной решетки. Для доказательства этого покажем, что если $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ – два различных узла целочисленной решетки, то *они находятся на различных расстояниях от точки* $\left(\sqrt{2}; 1/3\right)$. Действительно, если

$$\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{1}{3}\right)^2=\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2+\left(y_2-\frac{1}{3}\right)^2,$$

то

$$\left(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2-\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-2\sqrt{2}(x_1-x_2)\right)=0.$$

Отсюда следует, что

$$x_1=x_2 \text{ и } y_1^2-y_2^2-\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2=0.$$

Второе равенство означает, что

$$\left(y_1-\frac{1}{3}\right)^2=\left(y_2-\frac{1}{3}\right)^2,\text{ или } 3y_1-1=\pm(3y_2-1),$$

т.е. либо $y_1=y_2$, либо $3(y_1+y_2)=2$, что невозможно. Таким образом, $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. Итак, можно выбрать такую растущую последовательность радиусов R_n, что в круге $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+(y-1/3)^2=R_n^2$ будет содержаться в точности n точек.

Более интересным и трудным является следующий вопрос: *сколько точек решетки $\boldsymbol{Z}^2$ может попасть на окружность?*

Легко отыскать окружности, которые проходят через 1, 2, 3 или 4 точки (найдите их самостоятельно). Нетрудно придумать примеры для n = 8 и n = 12 (рис. 3, 4).

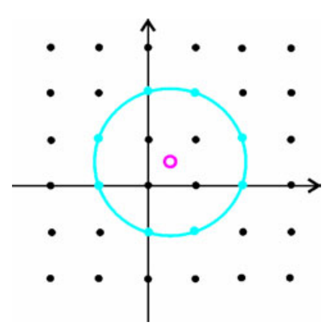


Рис. 3

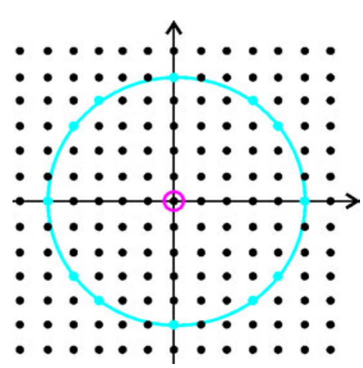


Рис. 4

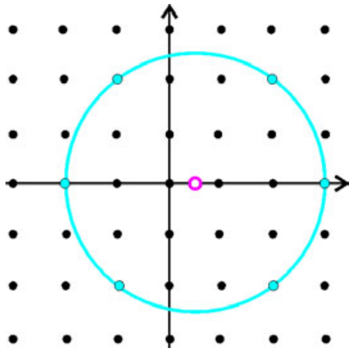


Рис. 5

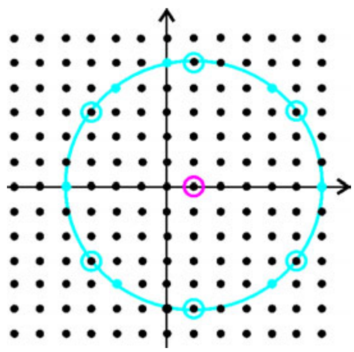


Рис. 6

Менее тривиален случай, когда $n = 6$ (рис.5). Внимательно сравнив окружности на рисунках 4 и 5, можно догадаться, как был построен этот пример. Окружность радиуса 5 была нарисована с центром в точке $(1;\ 0)$ (рис.6). Из 12 точек на ней 6 имеют четные координаты, т.е. являются узлами решетки $(2\boldsymbol{Z})\times(2\boldsymbol{Z})$, которая состоит из точек с четными координатами. Рассматривая эту более крупную решетку, мы и получаем рисунок 5.

Однако, имея только эти примеры, не вполне ясно, существуют ли окружности, на которых лежат 5, 7 или 17 точек.

Теорема 5 (А.Шинцель). *Для любого натурального n существует окружность, которая проходит ровно через n точек решетки* $\boldsymbol{Z}^2$.

Доказательство. Утверждение б) теоремы 3, конечно, позволяет для любого n построить окружность, на которой лежат в точности $4n$ точек. Для этого достаточно поместить центр окружности в начало координат, а в качестве радиуса выбрать число $R = 5^{(k-1)/2}$ (см. замечание после теоремы 3).

Рисунок 5 с шестью точками на окружности наталкивает на мысль, что полезно рассмотреть окружности с центром в точке $(1/2;0)$. Если в качестве радиуса взять число $R = 5^{(k-1)/2}/2$, то уравнение окружности запишется в виде

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{k-1}}{4}, \qquad (3)$$

или

$$(2x-1)^2 + (2y)^2 = 5^{k-1}. \qquad (4)$$

Как уже отмечалось раньше, уравнение

$$a^2 + b^2 = 5^{k-1} \qquad (5)$$

имеет $4k$ решений. Ясно, что в равенстве (5) одно из чисел a, b должно быть четным, а второе – нечетным. В уравнении (4) четность каждого из слагаемых фиксирована, и поэтому из каждых двух решений (a, b), (b, a) уравнения (5) получается ровно одно решение уравнения (4) (черные и белые точки на рисунке 6 симметричны относительно прямой $y = x - 1$). Таким образом, уравнение (4) имеет $2k$ решений (в 2 раза меньше, чем уравнение (5)).

Итак, мы можем построить окружность с любым четным количеством точек на ней. Например, чтобы получить окружность с 10 точками решетки $\boldsymbol{Z}^2$, достаточно в уравнении (4) взять $k = 5$ (рис.7).

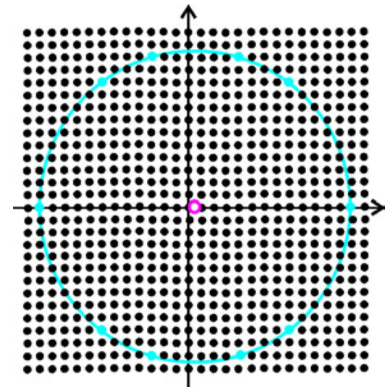


Рис. 7

Понятно, что точку $(1/2;0)$ нельзя брать в качестве центра, если мы хотим найти окружность с нечетным числом целых точек на ней (рисунок всегда симметричен относительно прямой $x = 1/2$). Оказывается, что для этого достаточно сдвинуть центр круга в точку $(1/3;0)$. Действительно, запишем уравнение окружности с центром $(1/3;0)$ и радиусом $5^k/3$:

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{2k}}{9}, \qquad (6)$$

или

$$(3x-1)^2 + (3y)^2 = 5^{2k}. \qquad (7)$$

По утверждению б) теоремы 3, уравнение

$$a^2 + b^2 = 5^{2k} \qquad (8)$$

имеет $4(2k+1)$ решений. Рассматривая остатки от деления на 3, получаем (квадраты целых чисел при делении на 3 могут давать только остатки 0 и 1), что одно из чисел a, b делится на 3, а другое – нет. Допустим, что $a \equiv 0 \pmod 3$, $b \equiv \pm 1 \pmod 3$. Тогда из четырех пар (a, b), $(a, -b)$, (b, a), $(-b, a)$ ровно одна пара приводит к решению уравнения (7). Следовательно, уравнение (7) имеет в 4 раза меньше решений, чем уравнение (8), т.е. $2k + 1$. Например, при $k = 2$ получается окружность (рис.8; сравните его с рис.7)

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^4}{9},$$

или

$$(3x-1)^2 + (3y)^2 = 5^4.$$

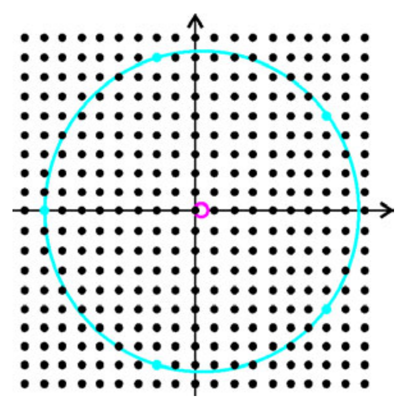


Рис. 8

Теорема 5 полностью доказана.

Окружности, которые задаются уравнениями (3) и (6), называются *окружностями Шинцеля*. Отметим, что для данного числа n эти уравнения могут задавать, вообще говоря, не самую маленькую окружность с n точками решетки на ней. Так происходит, например, при $n = 4$ (очевидно, что можно предъявить окружность радиуса $1/\sqrt{2}$) и при $n = 9$ (окружность Шинцеля имеет радиус 625/3, но окружность с центром $(1/3;0)$ и радиусом 65/3 также проходит через 9 целых точек).

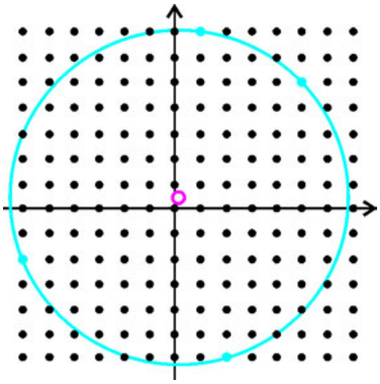


Рис. 9

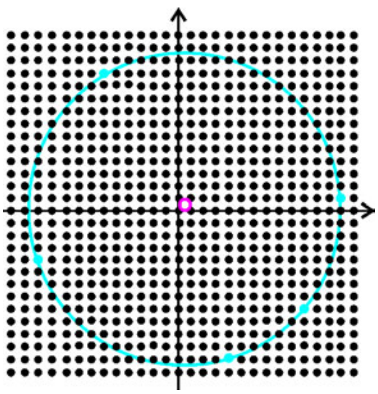


Рис. 10

Возможны более нетривиальные конфигурации точек. Так, на рисунке 9 изображена окружность с центром в точке (1/5; 2/5) и радиусом $\sqrt{13\cdot 17/5}$. Она проходит через четыре целые точки (−6; −2), (1; 7), (2; −6), (5; 5). На рисунке 10 можно видеть окружность, проходящую через пять целых точек (−12; −4), (−7; 11), (4; −12), (10; −8), (13; 1). Ее центр находится в точке (1/7; 2/7), а радиус равен $25\sqrt{13/7}$.

В связи с этим возникает следующая исследовательская задача: *описать множество окружностей, которые проходят в точности через* n *точек*.

Предполагается, что окружность, проходящая через четыре точки, – достаточно редкое явление, т.е. если провести окружность через три случайно выбранные точки решетки $\boldsymbol{Z}^2$, то через четвертую целую точку она пройдет с малой вероятностью.

С этой задачей тесно связан и вопрос об изображении круга на экране компьютера. Можно считать, что монитор – это прямоугольный лист клетчатой бумаги, а круг на экране – объединение всех таких клеточек (пикселей), которые пересекаются с внутренностью круга. Задача состоит в том, чтобы выяснить, *сколько различных изображений на экране имеет круг данного радиуса*. На рисунке 11 представлены некоторые возможные изображения круга радиуса 1,05; остальные найдите самостоятельно.

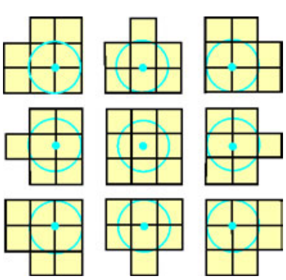


Рис. 11

Этой тематике было посвящено выступление британского математика М. Хаксли на конференции по теории чисел в Москве в 2006 году. Полных ответов на сформулированные вопросы пока нет.

Упражнения

1. Имеется шахматная доска (границы квадратов считаются окрашенными в черный цвет). Начертите на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на черных полях.

2 (Г.Штейнгауз; см. [2]). а) Имеются 64 квадратные плитки со стороной 10. Как их следует уложить на плоскости, чтобы все 64 плитки можно было описать окружностью радиусом 50? Существуют ли окружности меньшего радиуса, способные вместить все 64 плитки? Можно ли поместить 67 плиток внутри этого же круга?

б) Чему равно максимальное число квадратных плиток со стороной 1, которые можно расположить внутри круга радиуса 2?

3. Докажите, что если на окружности с центром (0; 0) лежат только видимые из начала координат узлы решетки $\boldsymbol{Z}^2$, то квадрат ее радиуса не делится ни на один квадрат натурального числа, и обратно.

4. Докажите, что для каждого натурального n существует шар с центром в точке с координатами $\left(\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ 1/3\right)$, который содержит внутри себя ровно n узлов решетки $\boldsymbol{Z}^3$.

5 (Т.Куликовский; см. [2]). Пусть $\left(x-x_0\right)^2+y^2=R^2$ – окружность Шинцеля, на которой лежат n точек решетки $\boldsymbol{Z}^2$. Докажите, что на сфере $\left(x-x_0\right)^2+y^2+\left(z-\sqrt{2}\right)^2=$ $=R^2+2$ лежат ровно n точек решетки $\boldsymbol{Z}^3$.

6. а) Докажите, что для каждого натурального числа n существует окружность, проходящая ровно через n узлов разбиения плоскости на правильные: а) треугольники; б) шестиугольники.

7 (см. [2]). Докажите, что если по крайней мере одна координата центра окружности иррациональна, то на самой окружности найдется не более двух точек с рациональными координатами.

8 (см. [2]). Докажите следующие утверждения.

а) Существуют окружности с центром в узле решетки $\boldsymbol{Z}^2$, на которых нет ни одной рациональной точки.

б) Существуют окружности, которые содержат ровно одну рациональную точку.

в) Существуют окружности, которые содержат ровно две рациональные точки.

г) Если окружность с центром в начале координат (0; 0) содержит по меньшей мере одну рациональную точку, то на такой окружности лежат бесконечно много рациональных точек плоскости.

9. На листе клетчатой бумаги с клетками размером 1×1 нарисована окружность радиуса R с центром в узле клетки. Докажите, что если на ней лежат ровно 1988 узлов сетки, то либо R, либо $R\sqrt{2}$ – целое число.

10. Докажите, что для любого четного n существует окружность с центром в точке (1/3; 0), которая проходит ровно через n узлов решетки $\boldsymbol{Z}^2$.

Список литературы

[1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия.* – М.: Наука, 1981.

[2] Серпинский В. *Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики.* – М.: Просвещение, 1961.

[3] Штейнгауз Г. *Сто задач.* – М.: Наука, 1976.