Полуправильные многоугольники на решетках

В.ВАВИЛОВ, А.УСТИНОВ

ОДНИМ ИЗ ВАЖНЫХ ОБЪЕКТОВ, КОТОРЫЙ ВОЗникает в различных задачах алгебры, теории чисел и анализа, является ортогональная *целочисленная решетка* $\mathbb{Z}^2$. Она состоит из всех точек плоскости Oxy, у которых обе координаты – целые числа. Точки решетки можно рассматривать как узлы клетчатой бумаги, размер клеточки которой равен единице.

Если все вершины многоугольника лежат в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$, то говорят, что он *расположен* на этой решетке.

О том, что ни один правильный многоугольник, за исключением квадрата, нельзя расположить на клетчатой бумаге так, что все его вершины являются ее узлами (т.е. имеют целые координаты), уже рассказывалось в журнале «Квант» [1] (см. также задачу 3 из Упражнений).

В данной статье изучается аналогичный вопрос о так называемых *полуправильных* многоугольниках – равноугольных и равносторонних. *Равноугольным* (*равносторонним*) многоугольником называется многоугольник, у которого внутренние углы (все стороны) равны, но стороны (внутренние углы) могут и отличаться друг от друга; пересечение этих множеств составляет множество правильных многоугольников. Подчеркнем, что в этих определениях ничего не говорится о выпуклости многоугольников. Примерами равноугольных многоугольников, расположенных на решетке, служат квадрат и восьмиугольник (рис. 1). Частными случаями равносторонних являются многоугольники, ограниченные замкнутыми ломаными с единичными длинами звеньев и прямыми углами между звеньями.

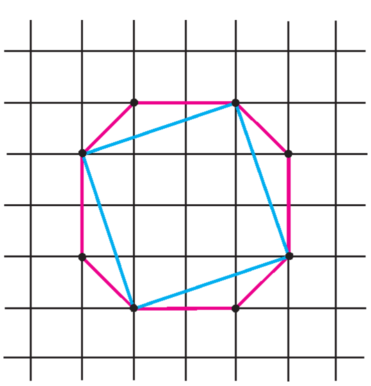

Рис. 1

[1] *Егоров А. «Решетки и правильные многоугольники» («Квант» №12 за 1974 г.).*

Правильный треугольник

Прежде чем решать задачу о полуправильных многоугольниках на решетке, рассмотрим более простой вопрос: можно ли расположить на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ правильный треугольник?

Отрицательный ответ на этот вопрос, по-видимому, впервые был дан Е. Лукасом в 1878 году. Мы приведем два доказательства этого важного результата. В основе первого (принадлежащего Лукасу) лежат элементарные сведения из теории делимости чисел. Второе доказательство будет основано на иррациональности чисел вида $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n}$.

Теорема 1. *Правильный треугольник нельзя расположить на целочисленной решетке* $\mathbb{Z}^2$.

Доказательство I. Предположим, что существуют правильные треугольники, которые можно расположить на решетке $\mathbb{Z}^2$.

Будем считать, что среди таких треугольников мы выбрали наименьший и что начало координат находится в одной из его вершин, а две другие вершины имеют координаты (a, b) и (c, d). Тогда четыре целых числа a, b, c, d не имеют общих делителей, отличных от ±1 (взаимно просты). В противном случае можно перейти к треугольнику меньшего размера $(0,\ 0)$, $(a/k,\ b/k)$, $(c/k,\ d/k)$, где k – общий делитель всех четырех чисел (рис.2).

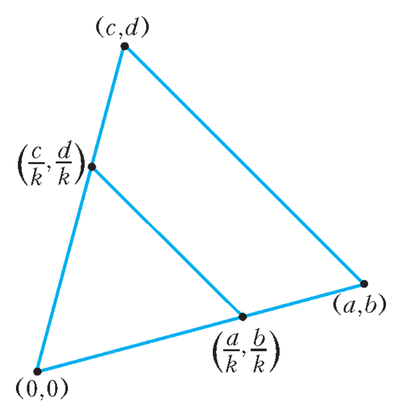

Рис. 2

Запишем равенство сторон треугольника в координатах:

$$a^2+b^2=c^2+d^2=(a-c)^2+(b-d)^2.$$

Отсюда заключаем, что

$$a^2+b^2=c^2+d^2=2(ac+bd).$$

Следовательно,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4(ac + bd),$$

т.е. сумма квадратов четырех чисел делится на 4.

Квадраты целых чисел при делении на 4 дают остатки только 0 или 1. Поэтому или все четыре числа a, b, c, d четные, или все – нечетные. Первое невозможно потому, что эти числа, по нашему выбору, взаимно просты. Второе же невозможно потому, что тогда не выполняется соотношение

$$a^2 + b^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2,$$

ибо его левая часть не делится на 4, а правая – делится.

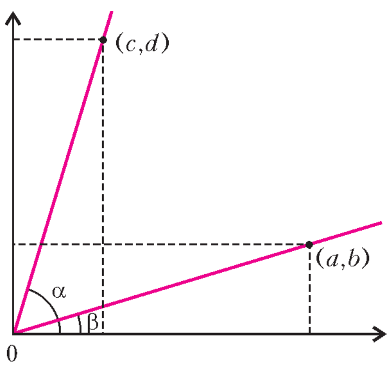

Рис. 3

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Доказательство II. Отметим, что если два луча с началами в начале координат проходят через узлы (a, b) и (c, d) решетки $\mathbb{Z}^2$ (рис.3), то тангенс угла θ между этими лучами является числом рациональным или не определен, так как

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\dfrac{d}{c} - \dfrac{b}{a}}{1 + \dfrac{bd}{ac}} = \frac{ad - bc}{ac + bd}.$$

Значит, если предположить, что существует равносторонний треугольник с вершинами в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$, то два луча с началами в одной из его вершин и содержащие стороны треугольника, образуют угол в $60°$. Но $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ – иррациональное число, и, следовательно, расположить на решетке $\mathbb{Z}^2$ равносторонний треугольник нельзя.

Равносторонние многоугольники

Теорема 2. (Д.Болл.) *а) На целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ нельзя расположить ни одного равностороннего многоугольника с нечетным числом сторон.*

б) На решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить равносторонний многоугольник с любым четным числом сторон.

Доказательство. а) Предположим противное, т.е. что равносторонний многоугольник с нечетным числом сторон n можно расположить на решетке $\mathbb{Z}^2$. Будем считать, что этот многоугольник имеет наименьшую возможную длины стороны. Пусть $\vec{v}_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) – векторы, направленные вдоль сторон многоугольника. Их сумма равна нулю и они имеют равные длины, значит,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \ldots = x_n^2 + y_n^2 = a^2,$$

где через a обозначена длина стороны многоугольника.

Возводя каждое из первых двух равенств в квадрат, а затем складывая полученные результаты (с учетом последующих n равенств), получаем соотношение

$$na^2 = -2\sum_{i \neq j}\left(x_i x_j + y_i y_j\right).$$

Так как a^2 – натуральное число (почему?) и n нечетно, то a^2 – четно.

Если a^2 делится на 4, то тогда все x_i и y_i являются четными числами, поскольку попарная сумма их квадратов делится на 4. Но этого быть не может, так как из векторов $\vec{v}_i/2$, которые в этом случае также имеют целочисленные координаты, можно составить равносторонний n-угольник (почему?). Он имеет сторону вдвое меньшую, чем исходный, а это невозможно.

Пусть теперь a^2 делится на 2, но не делится на 4. Но тогда все x_i и y_i – нечетные числа, так как все они удовлетворяют уравнению $x_i^2 + y_i^2 = a^2$. Таким образом, сумма

$$\sum_{i \neq j}\left(x_i x_j + y_i y_j\right)$$

является четным числом, и поэтому a^2 делится на 4, что, как мы уже знаем, невозможно.

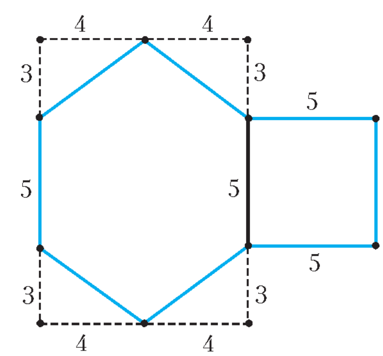

Рис. 4

б) Пристраивая к равностороннему шестиугольнику квадраты и шестиугольники (один шаг этого процесса показан на рисунке 4), убеждаемся, что вторая часть теоремы 2 действительно имеет место. Правда, при этом получаются невыпуклые равносторонние многоугольники с четным числом сторон. Однако предъявить выпуклый многоугольник также возможно (см. задачу 2 из Упражнений).

Равноугольные многоугольники

Для изучения класса равноугольных многоугольников нам понадобится следующее утверждение:

Числа $\operatorname{tg}(2\pi/n)$ при натуральных значениях n всегда являются иррациональными, за исключением случаев $n = 1, 2, 4, 8$.

Для его доказательства мы применим формулу

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{C_n^1 \operatorname{tg}\alpha - C_n^3 \operatorname{tg}^3\alpha + C_n^5 \operatorname{tg}^5\alpha - \ldots + (-1)^{(n-1)/2}\operatorname{tg}^n\alpha}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2\alpha + C_n^4 \operatorname{tg}^4\alpha - \ldots + (-1)^{(n-1)/2}\operatorname{tg}^{n-1}\alpha}, \quad (1)$$

где C_n^k – коэффициенты из формулы бинома Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Доказательство формулы (1) легко получить методом математической индукции, и мы предлагаем сделать это читателю самостоятельно.

Будем считать, что $n \ge 5$ и $n \ne 8$, так как случаи $n = 1, 2, 3, 4, 8$ ясны. Пусть $\alpha = 2\pi/n$. Тогда $\operatorname{tg} n\alpha = 0$ и по формуле (1) число $x = \operatorname{tg}(2\pi/n)$ является корнем уравнения с целыми коэффициентами

$$n - C_n^3 x^2 + C_n^5 x^4 - \ldots + (-1)^{(n-1)/2} x^{n-1} = 0 . \quad (2)$$

В этом уравнении старший коэффициент равен ± 1, следовательно, в множестве рациональных чисел оно может иметь только целые корни.[2] Поэтому если x – рациональное число, то оно может быть только целым.

Рассмотрим два случая: а) $n = mp$, где p – нечетное простое число; б) $n = 2^k$ и $k \ge 4$. Этими случаями исчерпываются все возможности.

а) Если $m = 1$, т.е. $n = p$, то из равенства (2) вытекает, что x^2 делит p и, следовательно, $x = \operatorname{tg}(2\pi/n) = \pm 1$. Но это невозможно для нечетного простого n.

Пусть теперь $n = mp$, где $m > 1$. Если число $\operatorname{tg}(2\pi/n)$ рационально, то, как видно из формулы (1), число $\operatorname{tg}(2\pi m/n) = \operatorname{tg}(2\pi/p)$ также было бы рационально, а этого, по доказанному выше, быть не может.

б) Пусть теперь $n = 2^k$ и $k \ge 4$. Так как $\operatorname{tg}(2\pi/16) = \sqrt{2} - 1$ – число иррациональное, то по формуле (1) все числа вида $\operatorname{tg}\left(2\pi/2^k\right)$ ($k \ge 4$) также иррациональны.

Утверждение доказано.

Теорема 3. (Д. Болл.) *Из всех возможных равноугольных многоугольников на решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить только прямоугольник и восьмиугольник.*

Доказательство. Будем считать, что $n \ge 4$, так как случай правильного треугольника уже рассматривался ранее. Тот факт, что квадрат и равноугольный восьмиугольник можно расположить на решетке, виден из рисунка 1. Пусть теперь $n > 4$ и равноугольный n-угольник можно разместить на решетке $\mathbb{Z}^2$. Тогда векторы, которые формируют его стороны, имеют целочисленные координаты (рис.5) и угол между любыми двумя соседними векторами равен $2\pi/n$.

[2] *Напомним, что если уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень p/q, то знаменатель q обязан делить старший коэффициент этого уравнения, а числитель p – свободный коэффициент.*

Будем считать точку O началом координат; тогда угол между лучами $[OP)$ и $[QO)$ равен $2\pi/n$, и $\operatorname{tg}(2\pi/n)$, как мы видели выше (указанные лучи проходят через узлы решетки), должен быть при $n > 4$ рациональным числом. А это, как установлено ранее, возможно только в том случае, когда $n = 8$.

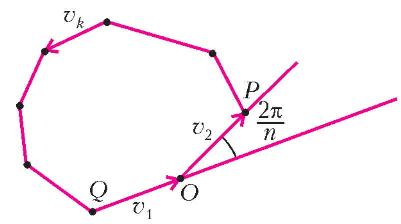

Рис. 5

Упражнения

1. На клетчатой бумаге проведена замкнутая ломаная с вершинами в узлах сетки, все звенья которой равны. Докажите, что число звеньев такой ломаной четно.

2. Докажите, что на решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить выпуклый равносторонний многоугольник с любым четным числом сторон.

3. Докажите, что единственным правильным многоугольником на плоскости, все вершины которого имеют рациональные координаты, является квадрат.

4. Докажите равенство (1) с помощью формулы Муавра $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos\alpha + i \sin\alpha)^n$.

5. а) Докажите, что если p и q – взаимно простые натуральные числа и $\cos(p\pi/q)$ – рациональное число, то число $\cos(\pi/q)$ также рационально.

б) Докажите, что число $\cos(p\pi/q)$ при взаимно простых p и q, $q > 3$, рационально тогда и только тогда, когда рационально число $\cos(\pi/q)$.

в) Пусть p и q взаимно просты, $q \ge 3$. Докажите, что числа $\sin(p\pi/q)$ иррациональны при $q \ne 6$.

Указание. Используйте то, что $2\cos n\alpha$ можно записать в виде $f_n(2\cos\alpha)$, где $f_n(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1.

6. Докажите, что на каждой из правильных плоских мозаик, т.е. покрытии плоскости при помощи правильных многоугольников (но, быть может, разных типов), можно расположить только такие правильные многоугольники, которые «видны невооруженным глазом». Мы здесь ограничиваемся только такой качественной характеристикой.

Примечание. Заметим, что различных таких мозаик (паркетов) ровно 11 и в таких покрытиях плоскости встречаются правильные треугольники, квадраты, шестиугольники, восьмиугольники и двенадцатиугольники.[3]

[3] *Колмогоров А. «Паркеты из правильных многоугольников» («Квант» №8 за 1986 г.).*