Целые точки в областях

Пусть Ω – плоская область, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой. Обозначим через S площадь Ω, P – её периметр и N – число точек целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$, лежащих внутри Ω. Для выпуклой области известно неравенство Ярника

$$|S-N|<P+1$$

и его уточнение

$$S-\frac{P}{2}<N\le S+\frac{P}{2}+1.$$

Следующее утверждение показывает, что требование выпуклости можно отбросить, ослабив формулировку.

Теорема. Справедливо неравенство

$$|S-N|<4(P+1)$$

Доказательство. Пусть N_1 – число квадратов вида $[a,a+1)\times(b,b+1]$ $(a,b\in\mathbb{Z})$, лежащих внутри Ω, и N_2 – число квадратов, имеющих с Ω хотя бы одну общую точку. Тогда

$$N_1\le S,\ N\le N_2$$

и, значит, $|S-N|\le M=N_2-N_1$, где M – число квадратов, через которые проходит граница Ω. В каждом из таких квадратов выберем точку $A_k\,(0\le k\le M)$ на границе Ω (нумерация точек – в порядке их следования по границе). Среди любых пяти квадратов, через которые проходит граница Ω, всегда можно выбрать два, замыкания которых не имеют общих точек. Поэтому при любом k длина отрезка границы между точками A_k и A_{k+4} удовлетворяет неравенству $l(A_k,A_{k+4})>1$. Отсюда

$$P\ge l(A_0,A_4)+l(A_4,A_8)+\ldots+$$

$$+l\left(A_{4[M/4]-4},A_{4[M/4]}\right)>[M/4]>M/4-1.$$

Значит,

$$M<4(P+1)\ \text{и}\ |S-N|<4(P+1).$$

Задача для исследования. Выясните, можно ли уточнить константу в доказанной теореме.

Публикацию подготовил Устинов Алексей Владимирович.