Две сложные задачи на метод спуска

Задача 1. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для каждой из которых

$$a^2+b^2+1 \vdots ab.$$

Решение. Пусть (a,b) – одно из решений и

$$a^2+b^2+1=nab \quad (n\ge 1). \qquad (1)$$

Если предположить, что $a=b$, то сразу получается, что $a=b=1$ и $n=3$. Если же $a>b$, то равенство (1) можно рассматривать как квадратное уравнение относительно a. Поскольку мы знаем, что это уравнение имеет один целый корень $a=a_1$, то и второй корень этого уравнения $a_2=nb-a_1=$ $=\dfrac{b^2+1}{a_1}$ также будет целым числом. Кроме того, из неравенства $a_1\ge b+1$ следует, что

$$a_2=\frac{b^2+1}{a_1}\le b<a_1.$$

Таким образом, из одного решения (a_1, b) мы можем перейти к другому (a_2, b) с меньшей суммой. Этот процесс может закончиться, если только $a=b$. Поэтому $n=3$ и мы имеем дело с уравнением

$$a^2+b^2+1=3ab.$$

Спуск $(a,b)\to(b, nb-a)=(b,3b-a)$ обязательно приводит к паре $(1,1)$, поэтому все решения могут быть получены из пары $(a,b)=(1,1)$ с помощью рекуррентных соотношений

$$b_{k+1}=a_k,\ a_{k+1}=3b_k-a_k.$$

Следовательно, мы имеем дело с последовательностью

$$(1,1), (2,1), (5,2), (13,5),$$
$$(34,13),\dots,(F_{2k+1}, F_{2k-1}),\dots,$$

где F_k – числа Фибоначчи, определяемые начальными условиями $F_0=0,\ F_1=1$ и рекуррентным соотношением $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$.

Задача 2. (IMO, 1988.6) Для некоторых целых неотрицательных a и b число

$$m=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

оказалось целым. Докажите, что m – полный квадрат.

Решение. Будем считать, что $a\ge b\ge 0$. Если $b=0$, то $m=a^2$ и ут-

верждение задачи очевидно. Если же $b>0$, то перейдём к квадратному уравнению относительно *a*:

$$a^2+b^2=m(ab+1).$$

Один из его корней $(a=a_1)$ – целое число. По теореме Виета второй корень $a_2=mb-a_1=\dfrac{b^2-m}{a_1}<a_1$ также будет целым числом. Кроме того,

$$m=\frac{a^2+b^2}{ab+1}>\frac{a-1}{b},$$

значит,

$$m\geq\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b}$$

и $a_2=mb-a_1\geq 0$. Таким образом, по паре (a_1, b) построена другая пара решений (a_2, b) с меньшей суммой. Значит, в конце концов мы дойдём до пары, в которой одна из переменных равна нулю.

Задачи для исследования

Задача 3. Изучите множества пар натуральных чисел (a, b), для которых

$$a^2+b^2+m \,\vdots\, ab,$$

где $m= \;=-1, \pm 2, \ldots$ – некоторое целое число.

Задача 4. Пусть a, b – натуральные и для данного числа $n\geq 2$ оказалось, что

$$m=\frac{a^2+b^2}{ab+n} -$$

целое число. Что можно сказать о числе m?

Материал для публикации подготовил А.В. Устинов.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Практика подсказала ответ

– Папа, а ты знаешь, что происходит с телом, погружённым в воду?

– Известное дело, стоит только телу погрузиться в воду, именно в этот момент его обязательно просят к телефону...