

Сопротивление между узлами решетки

Д. Баранов

М. Скопенков

А. Устинов

Данная подборка задач составлена по мотивам проекта «Случайные блуждания и электрические цепи» XXII Летней конференции Турнира городов и задачи 14.12 из задачника «Математического Просвещения» (вып. 14, с. 274).

1. Предположим, что имеется граф Γ , у которого сопротивление каждого ребра равно 1. Возьмем в графе Γ два смежных ребра AB и AC . Эти рёбра назовем *эквивалентными*, если существует перестановка вершин графа, переводящая вершины, соединенные ребром, в вершины, соединенные ребром, при которой A переходит в A , а B — в C . Вершину графа назовем *центром симметрии* графа Γ , если все рёбра, содержащие ее, эквивалентны. Граф Γ называется *правильным*, если все его вершины — центры симметрии графа.

(А) (А. Ходулёв) Пусть правильный граф содержит n вершин, A и B — соседние вершины степеней a и b , соответственно. Докажите, что сопротивление между ними равно

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

(В) Если же взять 2-мерную целочисленную решетку, то $1/n$ в последней формуле нужно заменить нулем.

(С) Приведите пример бесконечного правильного графа, для которого формула из пункта (А) (с заменой $1/n$ нулем) не дает правильного ответа.

(D) Докажите, что существует такая функция $f(m, n): \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(0, 0) = 1$, $f(0, 1) = -1$,

$$f(m, n) = \frac{1}{4} (f(m-1, n) + f(m+1, n) + f(m, n-1) + f(m, n+1))$$

для каждой пары $(m, n) \neq (0, 0), (0, 1)$, и $f(m, n)$ стремится к 0 при стремлении $r(m, n) := \sqrt{m^2 + n^2}$ к бесконечности.

2. К двум соседним вершинам проволочного (А) икосаэдра; (В) додекаэдра; (С) правильного графа, полученного из центрально-симметричного многогранника с n вершинами; подвели напряжение так, что по

соединяющему их ребру потек ток I . Какой при этом будет течь ток по диаметрально противоположному ребру?

3. (А) Из резисторов спаяна цепь. Может ли сопротивление между какими-то двумя ее клеммами увеличиться, если припаять еще один?

(В) Электрическая цепь спаяна из нескольких резисторов и одной батарейки. В цепи выбрали две клеммы с потенциалами A и B , отличные от полюсов батарейки, и объединили (закоротили) их в одну клемму. Докажите, что потенциал новой клеммы в полученной цепи будет заключен между величинами A и B .

4. (А) Из металлической сетки вырезано кольцо с внутренним радиусом rn и внешним — Rn (центры обоих кругов — в начале координат). Сопротивление каждого ребра равно 1. Если некоторое ребро разрезано, то сопротивление оставшегося куска пропорционально его длине. Докажите, что сопротивление кольца равно

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

(В) Докажите аналогичную формулу для сопротивления между и центром и границей круга радиуса R , вырезанного из металлической сетки: $\frac{1}{2\pi} \ln R + O(1)$.

Авторы благодарны И.В. Богданову, А.Я. Канелю, М.В. Прасолову и Г.Р. Челнокову за полезные обсуждения.

Дмитрий Баранов, мехмат МГУ

E-mail:dimbaranov@mail.ru

Михаил Скопенков, ИППИ РАН

E-mail:skopenkov@rambler.ru

Алексей Устинов, ХО ИПМ ДВО РАН

E-mail:ustinov.alexey@gmail.com