Случайные блуждания и электрические цепи

М. Скопенков* В. Смыкалов А. Устинов*

1. Основные понятия

В данной статье мы докажем следующую знаменитую теорему.

Теорема Пойа. (a) *Если человек случайным образом перемещается по* 2*-мерной решетке, то он вернется в начальную точку с вероятностью* 1.
(b) *Если же он перемещается по* 3*-мерной решетке, то вероятность его возврата в начальную точку строго меньше* 1.

Предлагаемый подход к доказательству основан на физической интерпретации, использующей электрические цепи. Наше изложение следует книге [7], с небольшими упрощениями. Для понимания статьи специальных знаний не требуется, все необходимые определения будут даны.

1.1. Вероятностные определения

Для начала введем некоторые обозначения и заодно дадим определения необходимых понятий теории вероятности.

Предположим, что у некоторого эксперимента имеется n *равновероятных* исходов, и событие X происходит ровно в m из них. Тогда *вероятностью* события X называется число $P_1(X) := m/n$.

Например, вероятность выпадения орла при бросании монеты — $1/2$; вероятность выпадения 6 очков на кубике — $1/6$.

Теперь предположим, что событие X зависит от последовательности нескольких *независимых* таких экспериментов. Последовательность из T экспериментов имеет n^T возможных исходов. Предположим, что событие X происходит ровно при m_T исходов из них. Тогда *вероятностью* события X называется число $P_T(X) := m_T/n^T$.

Например, есть ровно 4 возможных исхода при бросании монеты 2 раза:

1-й бросок	орел	орел	решка	решка
2-й бросок	орел	решка	орел	решка

*Частично поддержаны фондом «Династия».

Пусть событие X состоит в появлении решки хотя бы один раз. Событие X происходит в 3 случаях из 4 возможных. Поэтому вероятность события X есть $P_2(X) = 3/4$.

Вероятность получения более 10 очков при бросании двух кубиков — $1/12$, так как это событие происходит в ровно 3 случаях ($5+6$, $6+5$ или $6+6$) из 36 возможных.

Наконец, пусть событие X зависит от бесконечной последовательности таких экспериментов. Мы будем называть число $P(X)$ *вероятностью* события X, если вероятности $P_T(X)$ стремятся к числу $P(X)$ при стремлении T к бесконечности[1].

Например, вероятность выпадения решки хотя бы один раз в бесконечной серии бросков составляет $P(X) = 1$, так как $P_T(X) = 1 - 1/2^T$ стремится к 1 при стремлении T к бесконечности.

Мы готовы объяснить формулировку теоремы Пойа. Двумерная решетка — это бесконечная клетчатая плоскость, причем человек движется по сторонам клеток. Каждый раз, оказываясь на «перекрестке», он выбирает одно из четырех направлений дальнейшего движения с равной вероятностью, независимо от своих предыдущих выборов. Теорема Пойа утверждает, что вероятность когда-нибудь вернуться в начальную точку равна $P(X) = 1$.

Рассмотрим «игрушечный» пример, на котором мы увидим многие важные идеи доказательства теоремы Пойа.

Пример 1. Пьяница ходит по отрезку улицы, состоящему из 5 кварталов. Начав свой путь на границе кварталов в точке x, он с вероятностью $1/2$ перемещается на один квартал влево и с вероятностью $1/2$ — на один квартал вправо. Подойдя к границе кварталов, он опять выбирает направление движения случайным образом. Если он оказывается в точке 5 (его дом) или в точке 0 (бар), то он прекращает движение: см. рисунок 1.

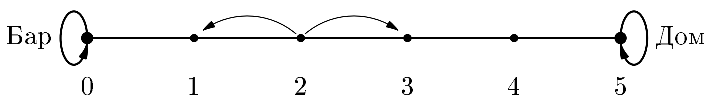


Рис. 1. Случайное движение по улице; см. пример 1

Задача 1. Напишите компьютерную программу, моделирующую движение этого пьяницы. Запустите ее много раз и определите процент числа случаев, в которых он приходит домой. Вы можете использовать этот способ для угадывания ответов в последующих задачах.

[1] Формально это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число T_0 такое, что для каждого $T > T_0$ выполнено $|P(X) - P_T(X)| < \varepsilon$.

Задача 2. Пусть $P_T(x)$ — вероятность того, что пьяница, начавший свое движение в точке x и сделавший не более T ходов, оказался дома. Заполните таблицу 1 десятичными дробями с точностью до сотых.

Табл. 1. Вероятности $P_T(x)$ для малых T

T \ x	0	1	2	3	4	5
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	1.00
2						
3						
4						

Найдем вероятность $P(x)$ того, что пьяница когда-нибудь дойдет до дома.

Прежде всего отметим, что для каждого x указанная вероятность $P(x)$ существует, поскольку последовательность $P_T(x)$ из задачи 2 возрастает и ограничена сверху числом 1.

Заметим, что из точки $x \neq 0, 5$ первым ходом пьяница попадет в одну и точек $x-1$ или $x+1$ с равной вероятностью. Поэтому

$$P_T(x) = \frac{1}{2}P_{T-1}(x-1) + \frac{1}{2}P_{T-1}(x+1).$$

Переходя к пределу при T, стремящемся к бесконечности, получим при каждом $x \neq 0,\ 5$ равенство

$$P(x) = \frac{1}{2}P(x-1) + \frac{1}{2}P(x+1). \tag{1}$$

Поскольку при достижении точек 0 или 5 перемещения заканчиваются, получаем равенство

$$P(0) = 0 \qquad P(1) = 1. \tag{2}$$

Из двух установленных свойств (1) и (2) вытекает, что $P(x)$ представляет собой арифметическую прогрессию: $P(x) = x/5$.

Задача 3. Петя и Паша играют на монетки. Всего у них есть 5 монеток. В каждом раунде Петя выигрывает у Паши одну монетку с вероятностью 1/2 и проигрывает с вероятностью 1/2. Они играют до тех пор, пока у Пети не станет 0 монеток (он проиграл) или 5 (он выиграл все монеты Паши). Найдите вероятность $P(x)$ того, что Петя выиграет, начав игру с x монетками.

Задача 4. Предположим, нашего «путешественника» сносит в одну сторону; точнее, пусть он каждый раз перемещается вправо с вероятностью

p и влево с вероятностью $q = 1 - p$. Найдите вероятности $P(x)$ попадания домой в этом случае.

Задача 5. Предположим, что вы играете на деньги. Сначала у вас 20 монет, а у вашего соперника — 50 монет. В каждой игре вы выигрываете одну монету с вероятностью 0.45 и проигрываете с вероятностью 0.55. Игра продолжается до тех пор, пока у кого-либо не закончатся деньги. Найдите вероятность своего разорения с точностью до первой цифры после запятой, отличной от 9.

1.2. Физические определения

Для исследования случайного блуждания оказывается полезной физическая интерпретация, использующая электрические цепи. Поскольку мы собираемся применять электрические цепи для доказательства математического результата, то нам понадобится их формальное аксиоматическое определение[2)].

Определение. *Электрическая цепь* — это связный конечный граф, у которого каждому ребру xy приписано положительное вещественное число, называемое его *проводимостью*[3)] $C(xy)$, и задано два непересекающихся выделенных множества вершин (P и N). Считается, что вершины из множества N соединены с отрицательным полюсом батарейки и землей, а вершины из множества P — с положительным; см. рисунок 2.

Потенциалы вершин $v(x)$ определяются следующими аксиомами:

1. *Граничное условие*. Если $x \in N$, то $v(x) = 0$. Если $x \in P$, то $v(x) = 1$.

2. *Правило Кирхгофа*. Если $x \notin P \cup N$, то $\sum_{xy} C(xy)\,(v(x) - v(y)) = 0$, где суммирование ведется по всем ребрам xy, содержащим вершину x.

Замечание. Мы допускаем графы с кратными ребрами. Если граф имеет несколько ребер между вершинами x и y, то xy будет обозначать любое из них (путаницы из-за этого не возникнет).

Пример 2. Пять одинаковых резисторов соединены последовательно и подключены к батарейке в 1 вольт как показано на рисунке 2.

Найдем потенциалы $v(x)$ в точках $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. То, что резисторы одинаковы, означает, что все рёбра имеют равные проводимости. Тогда из аксиомы 2 получаем, что $v(x)$ — арифметическая прогрессия. Аксиома 1

[2)] Есть и другие подходы к аксиоматическому построению теории электрических цепей; см., например, [3].

[3)] Величина, обратная проводимости, называется *сопротивлением*.

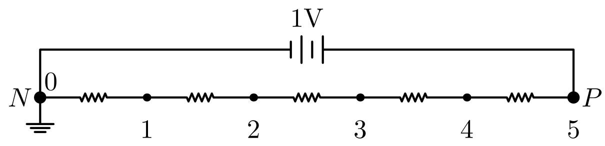


Рис. 2. Электрическая цепь; см. пример 2.

определяет начальный и конечный член этой прогрессии, поэтому $v(x) = x/5$.

Мы видим, что найденное значение совпадает с полученным раньше выражением для вероятности попадания домой, $v(x) = P(x)$. Это проявление общей закономерности, которую мы проиллюстрируем на более сложном примере.

Пример 3. Рассмотрим город, схема которого приведена на рисунке 3 слева. Отрезки обозначают улицы. Пути отхода помечены буквой E, а буквой P помечены точки, занятые полицией. Из точки $x = (a, b)$ пьяница перемещается в каждую из точек $(a + 1, b)$, $(a - 1, b)$, $(a, b + 1)$, $(a, b - 1)$ с вероятностью $1/4$. Если он достигает одной из точек E или P, то его передвижения заканчиваются.

Найдем вероятность $P(x)$ того, что начав свой путь в точке x, пьяница не попадет в руки полиции.

Рассмотрим электрическую цепь на рисунке 3 справа, состоящую из единичных резисторов. Так же, как и в примере 1, мы видим, что функция $P(x)$ удовлетворяет аксиомам 1–2 из определения электрической цепи.

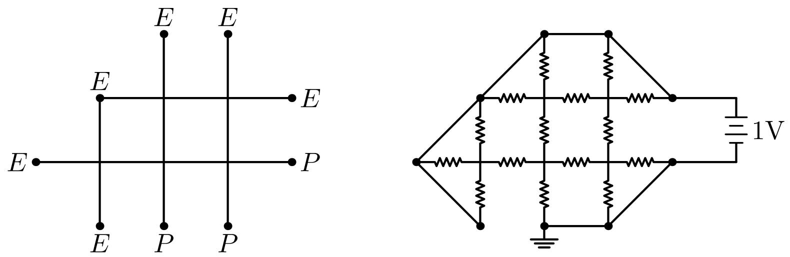


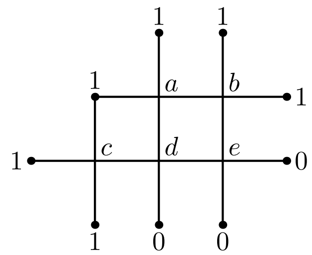
Рис. 3. Случайное движение по городу и электрическая цепь; см. пример 3

Обозначим вероятности $P(x)$ через a, b, c, d, и e; см. рисунок 4 слева. Тогда аксиомы 1–2 примут вид:

$$a = (b + d + 2)/4;$$
$$b = (a + c + 2)/4;$$
$$c = (d + 3)/4;$$

$$d = (a + c + e)/4;$$
$$e = (b + d)/4.$$

Решая эту систему, находим искомые вероятности $P(x)$. На рисунке 4 справа значения вероятностей приведены с точностью до тысячных.



		1	1	
	1	.823	.787	1
1	.876	.506	.323	0
	1	0	0	

Рис. 4. Вероятности $P(x)$ для примера 3

Итак, для этого примера найденные вероятности опять совпадают с потенциалами в соответствующей электрической цепи. Наша ближайшая цель — доказать, что так будет всегда.

2. Основные теоремы для электрических цепей

2.1. Теорема единственности

Определение. Функция $v(x)$ на вершинах электрической цепи называется *гармонической*, если она удовлетворяет аксиоме 2, но не обязательно аксиоме 1. Вершины, принадлежащие одному из множеств N и P называются *граничными*, а остальные — *внутренними.*

Установим несколько важных свойств гармонических функций.

Принцип суперпозиции. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ — гармонические, то при любых $a, b \in \mathbb{R}$ функция $au(x) + bv(x)$ — гармоническая.*

Доказательство. Для любой внутренней вершины x

$$\sum_{xy} c(xy)\,(au(x) + bv(x) - au(y) - bv(y)) =$$
$$= a\sum_{xy} c(xy)\,(u(x) - u(y)) + b\sum_{xy} c(xy)\,(v(x) - v(y)) = 0,$$

где суммирование ведется по всем ребрам xy, выходящим из x. Значит, $au(x) + bv(x)$ — гармоническая функция.

Принцип максимума. *Гармоническая функция на конечной электрической цепи принимает свое наибольшее и наименьшее значение на граничных вершинах.*

Доказательство. Пусть $v(x)$ — гармоническая функция, которая принимает наибольшее значение в некоторой вершине x. Докажем, что если x — внутренняя вершина, то в ее соседях наша функция принимает такие же значения. Так как $v(x)$ — наибольшее значение, то для каждой соседней вершины y выполнено неравенство $v(x) - v(y) \geqslant 0$. Следовательно, $\sum_{xy} c(xy)(v(x) - v(y)) \geqslant 0$. По аксиоме 2 последнее неравенство обращается в равенство. Значит, $v(y) = v(x)$ для всех y.

Так как электрическая цепь — связный граф, то существует путь, соединяющий вершину x с одной из граничных вершин. По доказанному значения нашей функции во всех вершинах пути одинаковы. Значит, в одной из граничных вершин также принимается наибольшее значение функции $v(x)$, что и требовалось. Доказательство для наименьшего значения аналогично.

Теорема единственности. *В конечной электрической цепи не может быть двух различных расстановок потенциалов, удовлетворяющих обеим аксиомам* 1–2.

Доказательство. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — две расстановки потенциалов. Рассмотрим гармоническую функцию $u(x)-v(x)$. Она принимает значение 0 на всех граничных вершинах. По принципу максимума она равна 0 и во всех внутренних вершинах. Следовательно, $u(x)$ и $v(x)$ совпадают.

Теперь мы можем доказать закономерность, замеченную в примерах 1 и 3:

Физическая интерпретация вероятности достижения. *Для любой конечной электрической цепи потенциал $v(x)$ вершины x равен вероятности $P(x)$ того, что случайное блуждание, начавшееся из вершины x, достигнет множества P раньше, чем множества N.*

Доказательство. Действительно, вероятность $P(x)$ удовлетворяет обеим аксиомам 1–2. Потенциал $v(x)$ также удовлетворяет этим аксиомам. По теореме единственности $v(x) = P(x)$ при всех x.

2.2. Теорема существования

Естественный вопрос: а как *найти* потенциал $v(x)$ в произвольной электрической цепи? Да и в любой ли электрической цепи потенциал $v(x)$, удовлетворяющий нашим аксиомам, вообще существует?

Ответ на эти вопросы оказывается на удивление трудным. Конечно, потенциалы в вершинах можно найти, решая систему линейных уравнений, как мы делали в примере 3. Но на практике это оказывается слишком трудоемко. Поэтому мы приведем два способа нахождения *приближенного* значения потенциалов с любой точностью. Для каждого способа мы «заодно» получим доказательство существования потенциала, удовлетворяющего нашим аксиомам.

Возможно, читатель спросит: а зачем вообще доказывать существование потенциала? Соберем настоящую электрическую цепь, какие-то потенциалы у ее вершин ведь *должны быть*! А из физики известно, что они удовлетворяют нашим аксиомам — вот и получается существование потенциала.

Однако это обоснование не выдерживает критики даже с точки зрения физики. Пусть мы собрали электрическую цепь. В первый момент, когда мы только ее замкнули, потенциалы еще не удовлетворяют нашим аксиомам. Эти аксиомы описывают *установившееся* потенциалы, которые появляются в цепи через большой отрезок времени. Но где гарантия, что с течением времени потенциалы будут стремиться к каким-то конечным значениям? Эта проблема возникает на практике: если цепь состоит из сверхпроводников (то есть ребер с нулевым сопротивлением), то никакого установившегося состояния нет: ток в цепи будет расти, пока проводник не выйдет из сверхпроводящего состояния. Для существования потенциала принципиально важна положительность сопротивлений.

Перейдем к обещанным способам нахождения потенциала.

Первый способ использует случайные блуждания. Он называется *методом Монте-Карло*, так как случайные блуждания связаны с вероятностями, а в Монте-Карло находятся известные игорные дома, азартные игры в которых тоже связаны с вероятностями. Мы моделируем много случайных блужданий из точки x и находим долю путей, закончившихся в точках множества P. Полученная оценка будет приближением для «настоящей» вероятности $P(x)$. Этот яркий и простой метод позволяет найти потенциал $v(x) = P(x)$, хотя он и не очень эффективен. Эта идея также позволяет доказать существование потенциала:

Теорема существования. *В любой конечной электрической цепи существует расстановка потенциалов, удовлетворяющая аксиомам* 1–2.

Первое доказательство теоремы существования. Рассмотрим случайное блуждание по электрической цепи. Пусть $P_T(x)$ — вероятность того, что, стартуя из вершины x и делая T шагов, мы достигнем положительного полюса батарейки раньше, чем отрицательного. Ясно, что при фиксированном x последовательность $P_T(x)$ возрастает и ограничена, значит, имеет предел $P(x)$. Функция $P(x)$ удовлетворяет аксиомам 1–2.

Теперь сделаем некоторое отступление: опишем более эффективный на практике *метод релаксаций* (для доказательства теоремы Пойа эти результаты не понадобятся). Напомним, что мы ищем функцию с заданными значениями на границе, у которой значение в любой внутренней вершине равно взвешенному среднему арифметическому значений в соседних вершинах. Начнем с функции, которая равна 1 в вершинах множества P, и 0 — во всех остальных вершинах. Она имеет нужные нам граничные значения. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку. Значение функции в ней не будет, вообще говоря, равно среднему арифметическому значений в соседних точках. Тогда попробуем «подогнать»: положим новое значение функции в этой точке равным среднему арифметическому значений в соседних точках. Теперь будем по очереди брать остальные внутренние точки и делать с ними ту же операцию. Когда мы пройдем по всем внутренним точкам, функция не будет удовлетворять аксиоме 2, так как после изменения значения функции в одной точке мы могли изменить значения в соседних с ней точках, нарушив равенство. Тем не менее, полученная функция будет «лучше» удовлетворять аксиоме 2, чем та функция, с которой мы начали. Повторяя этот процесс (проходя каждый раз по всем внутренним точкам) мы будем получать приближения к решению лучше и лучше.

Сходимость метода релаксации. *В каком бы порядке мы не проходили по внутренним вершинам* (*так, чтобы в каждой из них оказаться сколь угодно много раз*), *получаемые нами функции стремятся к функции, удовлетворяющей аксиомам* 1–2*. В частности, функция, удовлетворяющая аксиомам* 1–2, *существует.*

Доказательство (и заодно второе доказательство теоремы существования). Разобьем доказательство на несколько шагов.

Лемма 1. *Значение функции в каждой вершине* (*за исключением вершин множества P*) *на каждом шаге процесса не превосходит взвешенного среднего арифметического соседей.*

Доказательство. Индукция по номеру шага. Изначально это условие выполняется. В тот момент, когда мы делаем очередной шаг, значение в соответствующей вершине не уменьшается (по предположению индукции). Значит, взвешенное среднее у соседей этой вершины тоже не уменьшается. Поскольку ни на какие другие вершины это не влияет, индукционный переход доказан. Заодно мы доказали, что последовательность значений в каждой вершине не убывает. □

Лемма 2. *Значения функции неотрицательны и не превосходят* 1.

Доказательство. Пусть это не так. Рассмотрим первый шаг, когда появилось значение, большее единицы. Получим, что число, большее 1, равняется взвешенному среднему чисел, не больших 1, — противоречие. Аналогично получаем, что все значения неотрицательны. □

Лемма 3. *В каждой вершине x последовательность получаемых значений функции имеет некоторый предел $u(x)$.*

Доказательство. Действительно, по леммам 1 и 2, эта последовательность не убывает и ограничена сверху числом 1. □

Лемма 4. *Полученная в пределе функция $u(x)$ удовлетворяет аксиомам* 1–2.

Доказательство. Функция $u(x)$, полученная в пределе, удовлетворяет аксиоме 1, потому что функции на каждом шаге удовлетворяют этой аксиоме. Проверим аксиому 2. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме 3, начиная с некоторого шага n нашего процесса, значение очередной функции в каждой вершине x будет отличаться от $u(x)$ не более, чем на ε. Возьмем произвольную внутреннюю вершину x. Рассмотрим первый момент после n-го шага, когда обновляется значение функции в вершине x.

Пусть значения функции сразу после обновления равны $u(x) - \varepsilon(x)$, где $0 \leqslant \varepsilon(x) \leqslant \varepsilon$. Поскольку после обновления значение в вершине x равно взвешенному среднему значений в соседних вершинах, то

$$\sum_{xy} c(xy)(u(x) - \varepsilon(x) - u(y) + \varepsilon(y)) = 0.$$

Перенося слагаемые, содержащие функцию $\varepsilon(x)$, в правую часть, получаем

$$\sum_{xy} c(xy)(u(x) - u(y)) = \sum_{xy} c(xy)(\varepsilon(y) - \varepsilon(x)).$$

Поскольку $0 \leqslant \varepsilon(x) \leqslant \varepsilon$, то

$$\left|\sum_{xy} c(xy)(u(x) - u(y))\right| \leqslant \varepsilon \sum_{xy} c(xy).$$

Но число ε можно выбрать сколь угодно малым, значит

$$\sum_{xy} c(xy)(u(x) - u(y)) = 0.$$

Аксиома 2 выполнена. □

Итак, мы показали, что получаемые нами функции стремятся к функции, удовлетворяющей аксиомам 1–2. Сходимость метода релаксации доказана.

Задача 6* (альтернатива Фредгольма). Пусть имеется система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n, \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных. Докажите, что всегда выполняется одна из следующих возможностей:

(1) для любых $b_1, \ldots, b_n$ система имеет ровно одно решение (в частности, при $b_1 = \ldots = b_n = 0$ существует только нулевое решение);

(2) для некоторых $b_1, \ldots, b_n$ система неразрешима, а для некоторых (в том числе нулевых) имеет бесконечно много решений.

Исходя из этого утверждения, получите еще одно доказательства теоремы существования.

2.3. Проводимость цепи и ее вероятностный смысл

Из всех физических величин, связанных с электрической цепью, до сих пор нас интересовали только потенциалы вершин. Для доказательства теоремы Пойа нам потребуется еще несколько понятий, которые также имеют вероятностный смысл.

Число $i(xy) := C(xy)\,(v(x) - v(y))$ называется *током*, идущим по ребру xy. Число $i(x) := \sum_{xy} i(xy)$ называется *током*, втекающим в цепь через вершину x. Так, $i(x) = 0$ для каждой вершины $x \notin P \cup N$ по аксиоме 2. Число $C := \sum_{x\in P} i(x) = -\sum_{x\in N} i(x)$ называется *эффективной проводимостью* цепи между множествами P и N, или просто *проводимостью цепи*.

Например, для электрической цепи на рисунке 2 через каждое ребро идет один и тот же ток $i(x, x+1) = v(x+1) - v(x) = (x+1)/5 - x/5 = 1/5$. Проводимость этой цепи равна $C = i(0, 1) = 1/5$.

Для практических вычислений сопротивления оказывается полезной следующая теорема:

Теорема об электрических преобразованиях. *Следующие преобразования сохраняют эффективную проводимость цепи:*
(A) *замена двух последовательно соединенных резисторов проводимости C_1 и C_2 на один резистор проводимости $1 \Big/ \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)$; см. рисунок 5 слева;*
(B) *замена двух параллельно соединенных резисторов проводимости C_1 и C_2 на один резистор с проводимостью $C_1 + C_2$; см. рисунок 5 в центре;*
(C) *объединение двух вершин с одинаковыми потенциалами в одну новую вершину.*

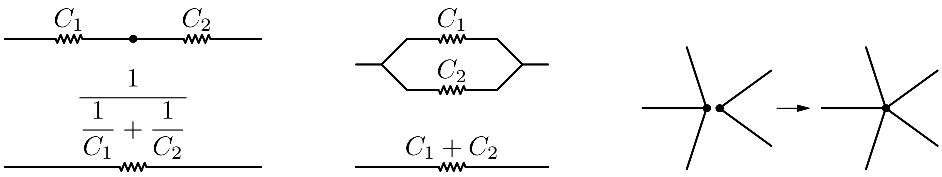


Рис. 5. Последовательное, параллельное соединение и объединение вершин цепи; см. теорему об электрических преобразованиях

Доказательство. (A) Докажем, что при нашем преобразовании потенциалы вершин не меняются (за исключением общей вершины для двух рассматриваемых резисторов, которая исчезает). Действительно, пусть вершины 1, 2, 3 с потенциалами v_1, v_2, v_3 соединены двумя последовательными резисторами проводимости C_1 и C_2. Заменим C_1 и C_2 на один резистор проводимости $\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ между 1 и 3. Умышленно оставим в каждой вершине прежнее значение потенциала.

Проверим аксиомы 1–2 для выбранных нами значений. Ясно, что аксиома 1 по прежнему выполнена. Также ясно, что аксиома 2 для каждой из вершин, кроме 1 и 3, тоже выполнена, поскольку наше преобразование их не затрагивает. Найдем токи, втекающие в вершину 3. В исходной цепи ток из 2 в 3 равен $C_2(v_2-v_3)$. В новой цепи ток из 1 в 3 равен $\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}(v_1-v_3)$. Но по аксиоме 2 для вершины 2 исходной цепи получаем $C_1(v_1-v_2)=C_2(v_2-v_3)$, откуда $C_1(v_1-v_3)=(C_1+C_2)(v_2-v_3)$, значит, $\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}(v_1-v_3)=C_2(v_2-v_3)$. Мы видим, что токи, втекающие в вершину 3, не изменились. Значит, аксиома 2 для вершины 3 по-прежнему выполнена. Аналогично для вершины 1.

Итак, выбранные нами умышленно значения потенциала удовлетворяют аксиомам 1–2 после преобразования. По теореме единственности это и есть потенциал в новой цепи. Раз потенциалы вершин не изменились, то не изменились ни токи через ребра, ни проводимость цепи.

(B) Аналогично предыдущему пункту, докажем, что если в вершинах новой электрической цепи сохранить старые значения потенциала, то аксиомы 1–2 останутся выполнены. Пусть вершины 1, 2 с потенциалами v_1, v_2 соединены параллельными резисторами проводимости C_1 и C_2. До преобразования ток из вершины 1 в вершину 2 равен $C_1(v_2-v_1)+C_2(v_2-v_1)$. Это равняется $(C_1+C_2)(v_2-v_1)$, току между вершинами 1 и 2 в после преобразования, при сохранении прежних значений потенциалов. Значит, аксиомы 1–2 останутся выполнены, и проводимость цепи не изменится.

(C) Пусть потенциалы вершин 1 и 2 равны. Объединим эти две вершины, не меняя потенциала.

Очевидно, аксиома 1 по-прежнему выполняется. Для новой вершины, полученной объединением вершин 1 и 2, аксиома 2 выполняется, так как получается сложением аксиом 2 для вершин 1 и 2 исходной цепи. Остальные вершины наше преобразование не затрагивает, поэтому для них аксиома 2 также остается справедливой. Поскольку потенциалы вершин не изменились, то не изменились ни токи через рёбра, ни проводимость цепи.

Выясним теперь вероятностный смысл проводимости:

Физическая интерпретация вероятности возврата. *Пусть в электрической цепи множество N состоит из одной вершины (которую мы также обозначим через N), а проводимости всех ребер равны 1. Тогда вероятность того, что случайное блуждание по этой цепи, стартующее из вершины N, достигнет множества P раньше первого возврата в вершину N, равна*

$$C/\deg N,$$

где C — проводимость цепи между N и P, а $\deg N$ — число ребер, выходящих из вершины N.

Доказательство. Пусть рёбра из вершины N ведут в вершины с номерами $1, 2, \ldots, k = \deg N$. Обозначим через $v_1, v_2, \ldots, v_k$ их потенциалы. Согласно физической интерпретации вероятности достижения, потенциал v_i равен вероятности достижения множества P из вершины i раньше первого возврата в N.

Вероятности сделать первый шаг в любую из вершин $1, 2, \ldots, k$ одинаковы и равны $\frac{1}{k}$. Значит, вероятность достижения множества P, стартуя из N, до первого возврата в N равна

$$\frac{1}{k}v_1 + \frac{1}{k}v_2 + \ldots + \frac{1}{k}v_k = \frac{-i(N)}{k} = \frac{C}{k} = \frac{C}{\deg N}\,.$$

Задача 7. Паук перемещается случайным образом по ребрам

(A) куба; (B) октаэдра; (C) додекаэдра; (D) икосаэдра.

Если он начинает движение в точке a, то какова вероятность того, что он достигнет противоположной вершины h быстрее, чем вернется в начальную вершину a; см. рисунок 6 слева?

Задача 8. Найдите эффективную проводимость между противоположными вершинами

(A) куба; (B) октаэдра; (C) додекаэдра; (D) икосаэдра

с ребрами единичной проводимости; см. рисунок 6 справа.

Задача 9. Пьяный турист выходит из отеля H и перемещается случайным образом по улицам Парижа, схема центра которого приведена на

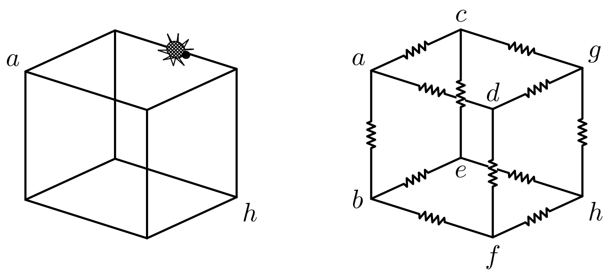


Рис. 6. Случайное блуждание по кубу и электрическая цепь; см. задачи 7(А) и 8(А)

рисунке 7. Найдите вероятность того, что он дойдет до Триумфальной арки T до того, как доберется до окраины города.

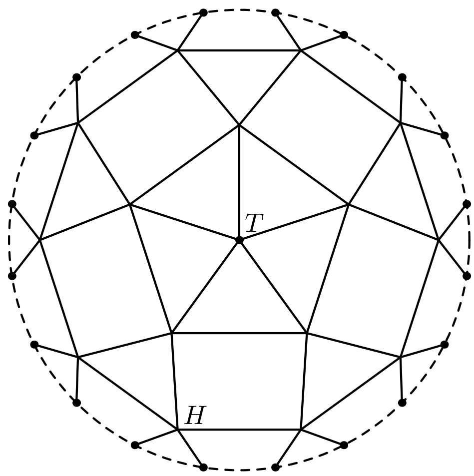


Рис. 7. Туристическая карта Парижа; см. задачу 9

2.4. Принцип монотонности и тепловая мощность

Видно, что понятие проводимости цепи очень близко к вероятности возврата, о которой идет речь в теореме Пойа. Нам потребуется следующее свойство проводимости, которое кажется вполне естественным, но которое при этом довольно трудно доказать.

Принцип монотонности. *Если в цепи проводимость одного из ребер увеличить, то ее эффективная проводимость не уменьшится.*

Доказательство использует понятие тепловой мощности (см. также [2]). *Тепловой мощностью* цепи называется величина

$$Q := \sum_{xy} C(xy)\,(v(x) - v(y))^2\,,$$

где суммирование ведется по всем ребрам цепи.

Пусть внутренние вершины имеют номера $1, \ldots, k$, а граничные — $k+1, \ldots, n$. Пусть $v(x)$ — произвольная функция на вершинах конечной электрической цепи, удовлетворяющая аксиоме 1. Обозначим $v_1 = v(1), \ldots, v_k = v(k)$. Рассмотрим тепловую мощность $Q(v_1, \ldots, v_k)$ как функцию от переменных $v_1, \ldots, v_k$.

Принцип достижения наименьшего значения. *Функция*

$$Q(v_1, \ldots, v_k)$$

достигает своего наименьшего значения.

Доказательство. Обозначим $Y := Q(0, \ldots, 0)$. Докажем, что если хотя бы одно из чисел $v_1, \ldots, v_k$ превышает по модулю число $X := n\sqrt{Y/\min c(xy)}$, то $|Q(v_1, \ldots, v_k)| > Y$. Пусть, скажем, $|v_1| > X$. Возьмем кратчайший путь, соединяющий вершину 1 с одной из вершин множества N. В этом пути не более n ребер, поэтому найдется ребро xy, на котором $|v(x) - v(y)| > \sqrt{Y/\min c(xy)}$. На этом ребре выражение $c(xy)(v(x) - v(y))^2$ уже превышает Y. Поскольку все слагаемые в сумме $\sum_{xy} c_{xy}(v(x) - v(y))^2$ неотрицательны, получаем требуемое неравенство.

Ограничим область определения функции $Q(v_1, \ldots, v_k)$ на множество $[-X; X]^k$. Так как рассматриваемое множество компактно, а функция $Q(v_1, \ldots, v_k)$ непрерывна, то она принимает на нем наименьшее значение. Это наименьшее значение заведомо не больше $Y = Q(0, \ldots, 0)$, поэтому оно не больше значений функции $Q(v_1, \ldots, v_k)$ вне множества $[-X; X]^k$. Значит, найденное значение — наименьшее на *всем* пространстве $\mathbb{R}^k$.

Вариационный принцип. *Функция $Q(v_1, \ldots, v_k)$ принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда функция $v(x)$ — гармоническая.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную внутреннюю вершину x. Пусть, без ограничения общности, она имеет номер 1. Рассмотрим $Q(v_1, \ldots, v_k)$ как квадратный трехчлен относительно v_1. Старший коэффициент положителен, а значит наименьшее значение принимается при $v_1 = \sum_{xy} c(xy)v(y)/\sum_{xy} c(xy)$, где суммирование производится по всем ребрам xy, выходящим из x. Значит, наименьшее значение принимается в точности, когда выполняется аксиома 2 для вершины x.

Закон сохранения энергии. *Минимальное значение тепловой мощности $Q(v_1, \ldots, v_k)$ численно равно эффективной проводимости цепи.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{xy} c(xy)(v(x) - v(y))^2 = \\ = \sum_{xy}(v(x)c(xy)(v(x) - v(y)) + v(y)c(xy)(v(y) - v(x))) = \\ = \sum_{x=1}^{n} \left(v(x) \sum_{xy} c(xy)(v(x) - v(y)) \right).$$

Значение $v(x) \sum_{xy} c_{xy}(v(x) - v(y))$ равно нулю для всех внутренних вершин по аксиоме 2 и для всех вершин множества N. Следовательно:

$$Q(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{x \in P} \sum_{xy} c_{xy}(1 - v(y)) = C.$$

Доказательство принципа монотонности. Пусть C — проводимость исходной цепи, а C' — проводимость цепи после увеличения проводимости одного из ребер. Обозначим через $v_1, \ldots, v_k$ потенциалы вершин в исходной цепи, а через $v'_1, \ldots, v'_k$ — в новой. Обозначим через $Q(v_1, \ldots, v_k)$ тепловую мощность исходной цепи, а $Q'(v_1, \ldots, v_k)$ — новой. Будем рассматривать их как функции от переменных $v_1, \ldots, v_k$. Тогда, согласно закону сохранения энергии и вариационному принципу, получаем:

$$C = Q(v_1, \ldots, v_k) \leqslant Q(v'_1, \ldots, v'_k) \leqslant Q'(v'_1, \ldots, v'_k) = C'.$$

Аналогично доказывается, что если в цепи одну проводимость уменьшить, то эффективная проводимость не увеличится.

В качестве следствия принципа монотонности получаем:

Принцип разрезания и склейки. *Разрезание каких-либо ребер цепи может только уменьшить эффективную проводимость между данными*

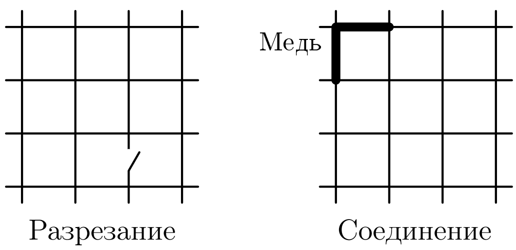


Рис. 8. Разрезание ребер и соединение вершин цепи; см. принцип разрезания и склейки

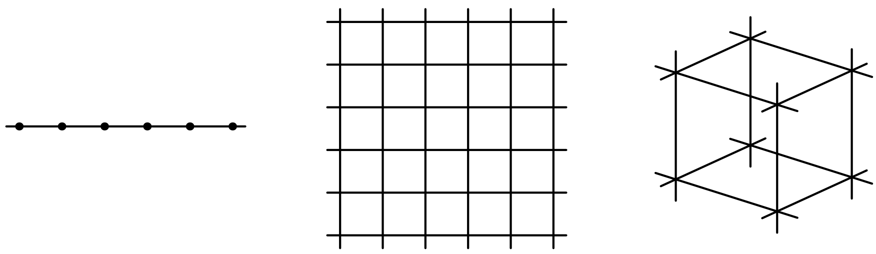
вершинами; см. рисунок 8 слева. Объединение каких-либо вершин в одну вершину может только увеличить эффективную проводимость между данными вершинами; см. рисунок 8 справа.

3. Доказательство теоремы Пойа

3.1. Одномерное блуждание

Чтобы пояснить нашу основную идею, докажем сначала одномерный аналог теоремы Пойа.

Теорема Пойа. (с) *При случайном блуждании по 1-мерной решетке вероятность когда-нибудь вернуться в начальную точку равна 1; см. рисунок 9.*



1-мерная решетка   2-мерная решетка   3-мерная решетка

Рис. 9. Одномерная, двумерная и трехмерная решетки

Доказательство. Пусть P — вероятность когда-нибудь вернуться в начальную точку. Обозначим P_n вероятность вернуться в начальную точку до попадания в n или $-n$. Предположим, что все эти вероятности существуют. Тогда $P_n \leqslant P \leqslant 1$ для любого n.

Сейчас мы докажем, что $P_n = 1 - 1/n$. После первого «хода» человек попадает в одну из точек 1 и -1 с вероятностью $1/2$. Если он оказался в точке 1, то из примера 1 получаем, что вероятность вернуться в начало до попадания в точку n равна $1 - 1/n$. Если он оказался в точке -1, рассуждаем аналогично. Значит, $P_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$. (Еще можно было заметить, что $P_n = 1 - C_n$, где $C_n = 1/n$ — проводимость цепи из n последовательно соединенных ребер единичной проводимости.)

Так как $1 - 1/n \leqslant P \leqslant 1$ для каждого n, то P равно 1.

3.2. Двумерное блуждание

Лемма о проводимости квадрата. *Проводимость C_n между центром и границей квадратной решетки размером $2n \times 2n$ с единичными* *проводимостями ребер (см. рисунок 10) удовлетворяет неравенству*

$$C_n \leqslant \frac{4}{\ln n} \qquad (n \geqslant 2). \tag{3}$$

В частности, C_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

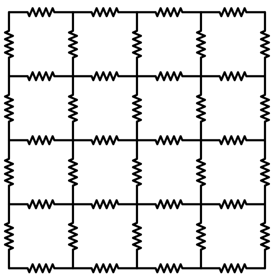


Рис. 10. *Квадратная решетка* 4×4

Доказательство. Применим принцип разрезания и склейки: объединим вместе точки, расположенные на квадратах, как показано на рисунке 11 сверху. Полученная цепь эквивалентна цепи на рисунке 11 в центре. Применим теорему об электрических преобразованиях. Так как можно заменить n параллельных резисторов проводимости 1 на один резистор проводимости n, то цепь эквивалентна цепи на рисунке 11 снизу. Проводимость этой цепи равна

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8k-4}\right)^{-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k}\right)^{-1} \leqslant \frac{4}{\ln n}\,.$$

Это число стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Так как проводимость C_n старой цепи не больше, то C_n тоже стремится к нулю.

Задача 10*. Докажите, что оценка, полученная в лемме о проводимости квадрата, является правильной по порядку. Проверьте, что при $n \geqslant 2$ проводимость квадрата $2n \times 2n$ удовлетворяет неравенству $C_n \geqslant \dfrac{1}{2\ln n}$.

Доказательство теоремы Пойа (а). Пусть P — вероятность того, что при случайном блуждании по 2-мерной решетке мы когда-нибудь вернемся в начальную точку. Обозначим за P_n вероятность того, что случайное блуждание вернется в начальную точку до достижения граничных точек квадрата $2n \times 2n$ с центром в начальной точке. Если вероятность P существует, то $P_n \leqslant P \leqslant 1$ для каждого n. Из физической интерпретации вероятности возврата получаем, что $P_n = 1 - C_n/4$, где C_n — эффективная проводимость между центром и границей квадрата $2n \times 2n$. По доказанной

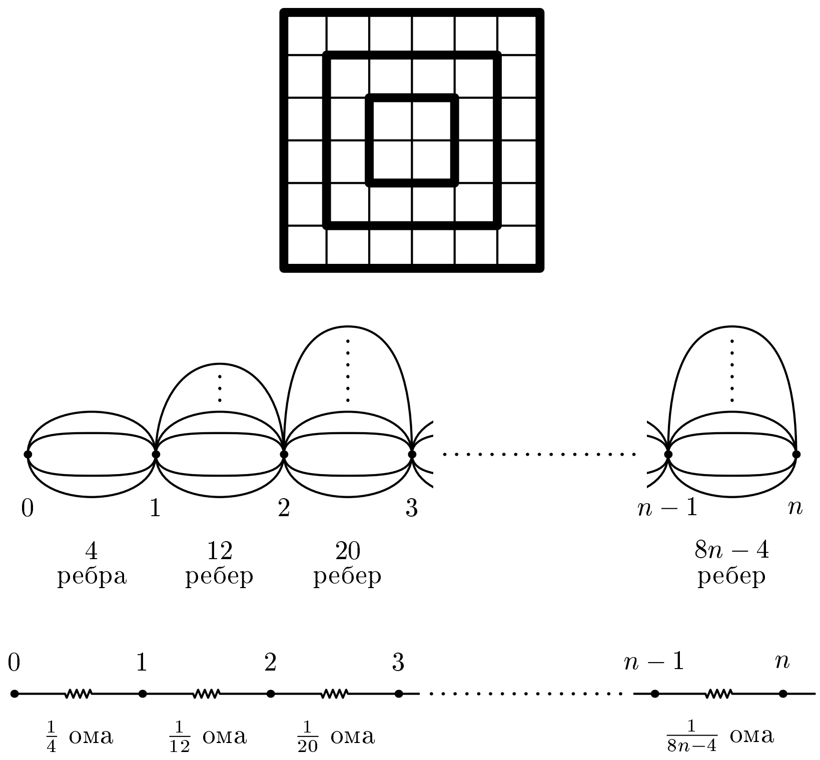


Рис. 11. Объединение в квадратной цепи и эквивалентная цепь

лемме проводимость C_n стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Поэтому $P_n \to 1$ при $n \to \infty$, значит, вероятность P существует и равна 1.

Наш метод позволяет установить и более тонкие результаты:

Теорема Пойа для «дырявой решетки». *Пусть из* 2*-мерной решетки выбросили произвольное множество ребер. Тогда по-прежнему с вероятностью* 1 *случайное блуждание возвращается в начальную точку* (*это утверждение задачи* 12 *из* 14*-го выпуска «Математического Просвещения», с.* 274).

Доказательство. Действительно, рассмотрим часть полученной «дырявой решетки», лежащую в квадрате $2n \times 2n$. По принципу разрезания и склейки при выбрасывании ребер проводимость может только уменьшиться. Значит, проводимость C'_n нашей части квадрата не превосходит проводимости C_n всего квадрата. По лемме о проводимости квадрата $C_n \to 0$ при $n \to \infty$, значит, и $C'_n \to 0$ (в частности, мы не исключаем случай $C'_n = 0$). Для доказательства нашего утверждения остается повторить рассуждение из доказательства теоремы Пойа (а).

3.3. Трехмерное блуждание

При доказательстве теоремы Пойа в двух измерениях мы склеивали вершины электрической цепи, чтобы оценить вероятность возврата снизу. В трехмерном случае нам нужно оценить вероятность возврата сверху, поэтому мы, наоборот, будем выбрасывать некоторые рёбра из нашей цепи. При этом будем стремиться получить такую цепь, для которой проводимость легко посчитать. Для этого идеально подходят деревья.

Прежде чем привести доказательство, предоставим читателю возможность придумать его самому, решив следующую серию задач.

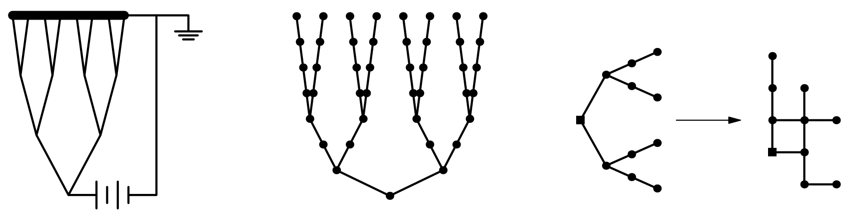


Рис. 12. (Слева) бинарное дерево глубины 3; (в центре) модифицированное бинарное дерево глубины 3; (справа) разрешенные пересечения ребер в этом дереве; см. задачи 11, 12 и 14

Задача 11. Найдите сопротивление бинарного дерева глубины (A) 3; (B) 2010, составленного из единичных резисторов (см. рис. 12 слева).

Задача 12. Найдите сопротивление *модифицированного* бинарного и троичного деревьев глубины 2010, в которых каждый резистор на k-м уровне заменяется на 2^k последовательно соединенных единичных резисторов (см. рис. 12 в центре).

Задача 13. Какие из деревьев, упомянутых (A) в задаче 11; (B) в задаче 12 можно вырезать из трехмерной решетки?

Задача 14. А если разрешаются пересечения (см. рис. 12 справа) ребер на равном расстоянии от корня?

Лемма о проводимости дерева. *Проводимость модифицированного троичного дерева любой глубины больше* 1.

Доказательство. Потенциалы в точках, расположенных на одинаковом расстоянии от корня дерева, равны из симметрии. Объединим такие

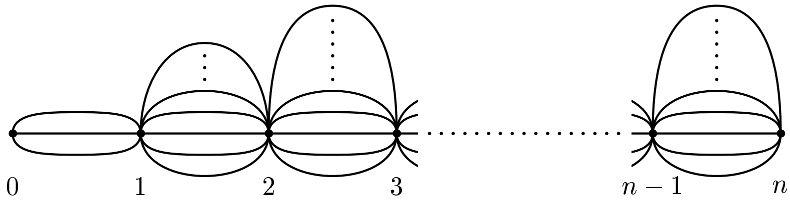


Рис. 13. Подсчет проводимости дерева; см. доказательство леммы о проводимости дерева

точки. Получим цепь, изображенную на рисунке 13. Проводимость цепи не изменилась, и она равна

$$\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\dots+\frac{2^{n-1}}{3^n}} = \frac{1}{1-\frac{2^n}{3^n}} > 1.$$

Лемма о вырезании дерева. *Из трехмерной решетки можно вырезать модифицированное троичное дерево любой глубины, в котором некоторые вершины, расположенные на одинаковом расстоянии от корня, склеены.*

Доказательство проводится индукцией по глубине дерева, см. рисунок 14.

Доказательство теоремы Пойа (в). Докажем, что вероятность возврата в начальную точку не превосходит 5/6. Для любого $n = 2^i - 1$ рассмотрим множество вершин (x, y, z), где $|x| + |y| + |z| \leqslant n$. Пусть C_i — проводимость между началом координат и границей такой фигуры. По лемме о вырезании дерева из такой части решетки можно вырезать модифицированное троичное дерево глубины i с пересечениями ребер на равном расстоянии от корня. Легко заметить, что проводимость дерева с такими пересечениями равна проводимости такого же дерева без пересечений. По лемме о проводимости дерева проводимости модифицированных троичных деревьев больше 1. Поэтому и проводимости вырезаемых деревьев с пересечениями больше 1. По принципу монотонности получаем $C_i > 1$. Значит, ток, втекающий в цепь, не меньше 1. Следовательно, потенциалы в вершинах, соседних с началом координат, не больше $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Они равны вероятности возврата в начало координат раньше попадания на границу рассматриваемого множества. Переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем требуемое.

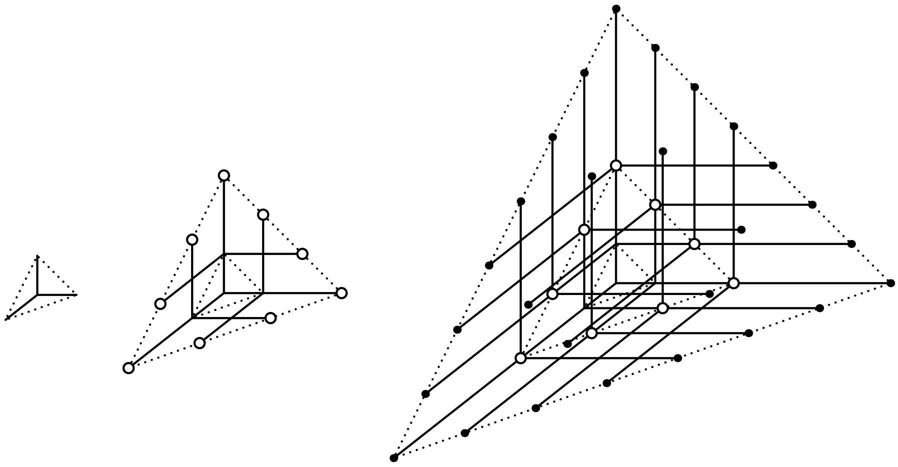


Рис. 14. Вырезание модифицированного троичного дерева со склеенными вершинами из трехмерной решетки

Благодарности

Авторы благодарны Д. В. Баранову, И. В. Богданову, А. Я. Канелю, М. В. Прасолову, Д. С. Челкаку и Г. Р. Челнокову за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Д. Баранов, М. Скопенков, А. Устинов. *Сопротивление между узлами решетки* // Математическое Просвещение. Сер. 3, вып. 15. 2011. С. 198–199.

[2] О. Ляшко. *Почему не уменьшится сопротивление* // Квант, №1. 1985. С. 10–15.

[3] М. Скопенков, М. Прасолов, С. Дориченко. *Разрезания металлического прямоугольника* // Квант, №3. 2011. С. 10–16. Доступно также: `http://arxiv.org/abs/1011.3180`

[4] Е. Соколов. *И снова задачи на сопротивление* // Квант, №3. 2011. С. 43–46.

[5] D. Chelkak, S. Smirnov. *Discrete complex analysis on isoradial graphs* // Adv. Math. Vol. 228. 2011. P. 1590–1630. Доступно также: `http://arxiv.org/abs/0810.2188v2`.

[6] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy. *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik* // Math. Ann., Bd. 100. 1928, S. 32–74. Рус. пер.: УМН. Вып 8. 1941, С. 125–160. Доступно также:

http://www.stanford.edu/class/cme324/classics/courant-friedrichs-lewy.pdf

[7] P.G. Doyle, J.L. Snell. *Random walks and electrical networks*. Mathematical Association of America, 1984. Доступно также: http://arxiv.org/abs/math.PR/0001057

[8] F. Spitzer *Principles of Random Walks*. New York: Van Nostrand, 1964. Рус. пер.: Спицер Ф. *Принципы случайного блуждания*. М.: Мир, 1969.

М. Скопенков, ИППИ РАН, KAUST
Email: skopenkov@rambler.ru
В. Смыкалов, мат.-мех. ф-т СПбГУ
Email: vladimir.smykalov@gmail.com
А. Устинов, ХО ИПМ ДВО РАН
Email: ustinov.alexey@gmail.com