Устинов Алексей Владимирович
Кандидат физико-математический наук, заведующий отделом ТПМ Хабаровского отделения Института прикладной математики ДВО РАН

Можно ли построить треугольник по основаниям биссектрис?

Эта статья адресована, в первую очередь, учителю математики. Она содержит *новый* научный результат и знакомит читателя с возможными направлениями будущих самостоятельных исследований. Для понимания основных используемых в статье идей и методов требуются терпение и достаточно сложные вычисления. Основной метод исследования рассматриваемых задач состоит в привлечении алгебраических соображений при решении геометрических задач.

1. Список Верника

В работе «Лёгкое решение очень трудной геометрической задачи» (см. [4], а также изложение на английском языке [7]) Л. Эйлер поставил вопрос о возможности восстановления треугольника по четырём замечательным точкам: ортоцентру, центру масс (точка пересечения медиан), центрам вписанной и описанной окружностей. Эйлер доказал, что если любые две из четырёх данных точек совпадают, то треугольник правильный и совпадают все четыре точки. В этом случае треугольник однозначно восстановить нельзя: его стороны могут иметь произвольную длину. Тот замечательный факт, что ортоцентр, центр масс и центр описанной окружности лежат на одной прямой (известной сейчас как прямая Эйлера), оказался у Эйлера побочным результатом, которому автор, по-видимому, не придал особого значения.

Позднее оказалось, что много интересных и содержательных задач возникает, если расширить список точек, по которым нужно восстанавливать треугольник. (В соответствии с современной традицией здесь предполагается, что построения проводятся с помощью циркуля и линейки. В статье Эйлера никаких предположений об инструментах построения не делалось, вопрос заключался лишь в однозначности определения вершин треугольника. В современной традиции треугольник может однозначно определяться, но быть при этом непостроимым, аналогично тому, как не всегда решается задача о делении угла на три равные части.) В статье [9] было предложено рассмотреть задачу о восстановлении треугольника по трём точкам из следующих 16 (естественно, многие подобные задачи рассматривались задолго до появления статьи [9]):

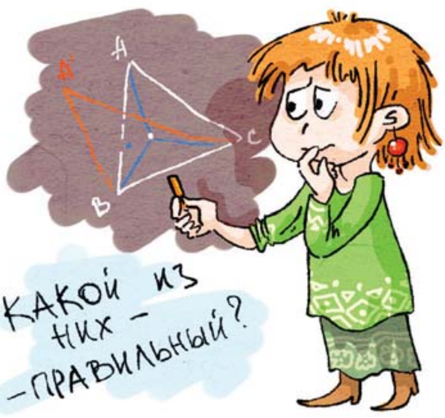
A, B, C, O – вершины треугольника и центр описанной окружности*;*

M_a, M_b, M_c, G – середины сторон треугольника и центр масс;

H_a, H_b, H_c, H – основания высот треугольника и ортоцентр;

T_a, T_b, T_c, I – основания биссектрис треугольника и центр вписанной окружности.

При таком подходе возникает 139 принципиально различных задач (например, из трёх вариантов (*A, B, G*), (*B, C, G*), (*A, C, G*) естественно оставить только один), перечисленных в таблице 1.



В некоторых тройках положение одной точки определяется по положению двух других. Например, таким свойством обладает тройка *A*, *B*, M_c. Такие случаи помечены буквой R (*redundant*), задача о восстановлении треугольника для них не имеет однозначного решения. В некоторых тройках присутствует более слабая зависимость. Например, точки *A, B, O* не могут располагаться произвольно (точка *O* должна лежать на серединном перпендикуляре к отрезку *AB,* и задача либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений. Такие тройки помечены буквой L (*locus-dependent*). Разрешимые задачи имеют обозначение S (solvable), неразрешимые – U (unsolvable); при этом разрешимость означает возможность построения треугольника по исходным данным. Пустое место в таблице означает, что ответ на сегодняшний день не известен (данные приводятся по статье [5], с учётом решения задач 81,122 и 136, приведённого ниже).

Неразрешимость тех или иных задач обычно сводится к следующему утверждению (см. [3, гл. 3]).

Теорема 1. *Пусть дан отрезок длины 1. Тогда, если кубическое уравнение с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, то ни один из его корней (точнее, отрезок такой длины) не может быть построен с помощью циркуля и линейки.*

Таблица 1

1.	A, B, O	**L**	36.	A, M_b, T_c	**S**	71.	O, G, H	**R**	106.	M_a, H_b, T_c	**U**
2.	A, B, M_a	**S**	37.	A, M_b, I	**S**	72.	$O\ G, T_a$	**U**	107.	M_a, H_b, I	**U**
3.	A, B, M_c	**R**	38.	A, G, H_a	**L**	73.	O, G, I	**U**	108.	M_a, H, T_a	**U**
4.	A, B, G	**S**	39.	A, G, H_b	**S**	74.	O, H_a, H_b	**U**	109.	M_a, H, T_b	**U**
5.	A, B, H_a	**L**	40.	A, G, H	**S**	75.	O, H_a, H	**S**	110.	M_a, H, I	**U**
6.	A, B, H_c	**L**	41.	$A\ G, T_a$	**S**	76.	O, H_a, T_a	**S**	111.	M_a, T_a, T_b	**U**
7.	A, B, H	**S**	42.	A, G, T_b	**U**	77.	O, H_a, T_b		112.	M_a, T_a, I	**S**
8.	A, B, T_a	**S**	43.	$A\ G, I$	**S**	78.	O, H_a, I		113.	M_a, T_b, T_c	
9.	A, B, T_c	**L**	44.	A, H_a, H_b	**S**	79.	O, H, T_a	**U**	114.	M_a, T_b, I	**U**
10.	A, B, I	**S**	45.	A, H_a, H	**L**	80.	O, H, I	**U**	115.	G, H, H_b	**U**
11.	A, O, M_a	**S**	46.	A, H_a, T_a	**L**	81.	O, T_a, T_b	**U**	116.	G, H_a, H	**S**
12.	A, O, M_b	**L**	47.	A, H_a, T_b	**S**	82.	O, T_a, I	**S**	117.	G, H_a, T_a	**S**
13.	A, O, G	**S**	48.	A, H_a, I	**S**	83.	M_a, M_b, M_c	**S**	118.	G, H_a, T_b	
14.	A, O, H_a	**S**	49.	$A\ H_b, H_c$	**S**	84.	M_a, M_b, G	**S**	119.	G, H_a, I	
15.	A, O, H_b	**S**	50.	A, H_b, H	**L**	85.	M_a, M_b, H_a	**S**	120.	G, H, T_a	**U**
16.	A, O, H	**S**	51.	A, H_b, T_a	**S**	86.	M_a, M_b, H_c	**S**	121.	G, H, I	**U**
17.	A, O, T_a	**S**	52.	A, H_b, T_b	**L**	87.	M_a, M_b, H	**S**	122.	G, T_a, T_b	**U**
18.	A, O, T_b	**S**	53.	A, H_b, T_c	**S**	88.	M_a, T_b, T_a	**U**	123.	G, T_a, I	
19.	A, O, I	**S**	54.	A, H_b, I	**S**	89.	M_a, M_b, T_c	**U**	124.	H_a, H_b, H_c	**S**
20.	A, M_a, M_b	**S**	55.	A, H, T_a	**S**	90.	M_a, M_b, I	**U**	125.	H_a, H_b, H	**S**
21.	A, M_a, G	**R**	56.	A, H, T_b	**U**	91.	M_a, G, H_a	**L**	126.	H_a, H_b, T_a	**S**
22.	A, M_a, H_a	**L**	57.	A, H, I	**S**	92.	M_a, G, H_b	**S**	127.	H_a, H_b, T_c	
23.	A, M_a, H_b	**S**	58.	A, T_a, T_b	**S**	93.	M_a, G, H	**S**	128.	H_a, H_b, I	
24.	A, M_a, H	**S**	59.	A, T_a, I	**L**	94.	M_a, G, T_a	**S**	129.	H_a, H, T_a	**L**
25.	A, M_a, T_a	**S**	60.	A, T_b, T_c	**S**	95.	M_a, G, T_b	**U**	130.	H_a, H, T_b	**U**
26.	A, M_a, T_b	**U**	61.	A, T_b, I	**S**	96.	M_a, G, I	**S**	131.	H_a, H, I	**S**
27.	A, M_a, I	**S**	62.	O, M_a, M_b	**S**	97.	M_a, H_a, H_b	**S**	132.	H_a, T_a, T_b	
28.	A, M_b, M_c	**S**	63.	O, M_a, G	**S**	98.	M_a, H_a, L	**L**	133.	H_a, T_a, I	**S**
29.	A, M_b, G	**S**	64.	O, M_a, H_a	**L**	99.	M_a, H_a, T_a	**L**	134.	H_a, T_b, T_c	
30.	A, M_b, H_a	**L**	65.	O, M_a, H_b	**S**	100.	M_a, H_a, T_b	**U**	135.	H_a, T_b, I	
31.	A, M_b, H_b	**L**	66.	O, M_a, H	**S**	101.	M_a, H_a, I	**S**	136.	H, T_a, T_b	**U**
32.	A, M_b, H_c	**L**	67.	O, M_a, T_a	**L**	102.	M_a, H_b, H_c	**L**	137.	H, T_a, I	
33.	A, M_b, H	**S**	68.	O, M_a, T_b	**U**	103.	M_a, H_b, H	**S**	138.	T_a, T_b, T_c	**U**
34.	A, M_b, T_a	**S**	69.	O, M_a, I	**S**	104.	M_a, H_b, T_a	**S**	139.	T_a, T_b, I	**S**
35.	A, M_b, T_b	**L**	70.	O, G, H_a	**S**	105.	M_a, H_b, T_b	**S**			

Например, задача о построении треугольника по точкам *O, G, I*, как показано Эйлером [4], в общем случае сводится к построению корней кубического уравнения. Можно подобрать исходные данные так, что получающееся уравнение не будет иметь рациональных корней. Значит, по теореме 1, такая задача (вместе с эквивалентными задачами, см. номера 73, 80 и 121 в приведённой таблице) неразрешима.

2. О построении треугольника по основаниям биссектрис

В статьях [9, 6] оставалась нерешённой задача о возможности построения треугольника по основаниям его биссектрис (задача 138); далее приводится решение, первоначально опубликованное в [8].

Теорема 2. *В общем случае восстановление треугольника по основаниям биссектрис (внутренних или внешних углов) с помощью циркуля и линейки невозможно.*

Замечание. В статье [10] было доказано, что задача может быть решена с помощью дополнительного инструмента, позволяющего строить гиперболы. В некоторых частных случаях, например, для равнобедренных треугольников, задача допускает решение в рамках стандартного подхода.

Для решения задачи удобней перейти к барицентрическим координатам (см. [2, § 11]). Барицентрическими координатами точки M относительно треугольника ABC называется набор масс $(\mu_a : \mu_b : \mu_c)$, которые нужно поместить в вершины A, B, C, чтобы центр масс полученной системы точек совпадал с точкой M:

$$M = \frac{\mu_a A + \mu_b B + \mu_c C}{\mu_a + \mu_b + \mu_c}.$$

Координаты $(\mu_a : \mu_b : \mu_c)$ определены с точностью до множителя (мультипликативной константы), поэтому они записываются таким необычным (проективным) способом.

Лемма 1. *Пусть $(x : y : z)$ – барицентрические координаты точки I относительно треугольника $T_aT_bT_c$. Тогда*

$$A = (-x : y : z),\ B = (x : -y : z),$$

$$C = (x : y : -z).$$

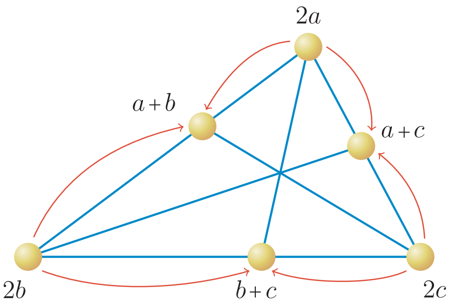


Рис. 1

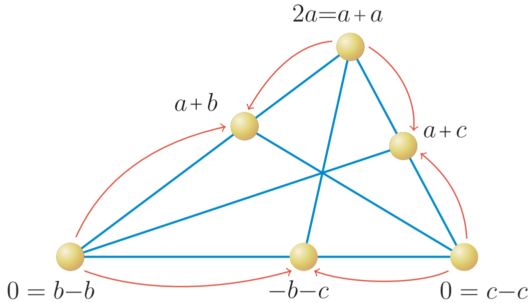


Рис. 2

Доказательство. Из свойств биссектрисы следует, что точка I относительно треугольника ABC имеет барицентрические координаты

$$(a : b : c) = (2a : 2b : 2c).$$

Перегруппировав массы, получаем, что относительно треугольника $T_aT_bT_c$ точка I имеет координаты

$$(b + c : a + c : a + b).$$

С другой стороны, точку A относительно треугольника ABC можно задать координатами

$$(2a : 0 : 0) = (2a : b - b : c - c).$$

После перегруппировки масс получаем, что относительно треугольника $T_aT_bT_c$ точка A имеет координаты

$$(-b - c : a + c : a + b) = (-x : y : z).$$

Для точек B и C утверждение леммы проверяется аналогично.

Задача 1. *Докажите, что утверждение леммы 1 остаётся справедливым, если центр вписанной окружности I заменить на любой из центров вневписанных окружностей I_a, I_b или I_c.*

Лемма 2. *Пусть $Q = (x : y : z)$ – барицентрические координаты точки Q относительно треугольника $T_aT_bT_c$ со сторонами $u = |T_bT_c|$, $v = |T_aT_c|$, $w = |T_aT_b|$. Если точка T_a лежит на биссектрисе угла T_bQT_c (или смежного с ним угла), то*

$$x(w^2y^2 - v^2z^2) + yz((w^2 + u^2 - v^2)y - \\ -(u^2 + v^2 - w^2)z = 0.$$

Доказательство. (См. [10].) Точка T_a лежит на биссектрисе угла T_bQT_c (или смежного с ним угла) тогда и только тогда, когда $\cos\angle T_aQT_b = \pm\cos\angle T_aQT_c$, то есть

$$\cos^2\angle T_aQT_b = \cos\angle T_aQT_c.$$

В терминах расстояний это равенство означает, что

$$\left(\left|QT_a\right|^4 - \left|QT_b\right|^2\left|QT_c\right|^2\right)\left(\left|QT_b\right|^2 - \left|QT_c\right|^2\right) - 2\left|QT_a\right|^2\left(v^2\left|QT_b\right|^2 - w^2\left|QT_c\right|^2\right) - \\ -2\left(v^2 - w^2\right)\left|QT_b\right|^2\left|QT_c\right|^2 + v^4\left|QT_b\right|^2 - w^4\left|QT_c\right|^2 = 0. \qquad (1)$$

Тогда по формуле расстояний в барицентрических координатах (см. [2, § 11]) для точек

$$Q = (x : y : z) = \left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$$

и $T_a = (1 : 0 : 0)$

$$\left|QT_a\right|^2 = \frac{w^2y^2 + \left(v^2 + w^2 - u^2\right)yz + u^2z^2}{(x+y+z)^2}.$$

Если аналогичным образом выразить $\left|QT_b\right|^2$, $\left|QT_c\right|^2$ и результат подставить в (1), то после сокращения на ненулевой сомножитель

$$\frac{-(u+v+w)(-u+v+w)(u-v+w)(u+v-w)}{(x+y+z)^4}x$$

получится нужное равенство.

Доказательство теоремы 2. Согласно леммам 1 и 2 числа x, y, z должны удовлетворять уравнениям

$$-x\left(w^2y^2 - v^2z^2\right) + yz\left(\left(w^2 + u^2 - v^2\right)y - \left(u^2 + v^2 - w^2\right)z\right) = 0,$$

$$-y\left(u^2z^2 - w^2x^2\right) + xz\left(\left(u^2 + v^2 - w^2\right)z - \left(v^2 + w^2 - u^2\right)x\right) = 0,$$

$$-z\left(v^2x^2 - u^2y^2\right) + xy\left(\left(v^2 + w^2 - u^2\right)x - \left(w^2 + u^2 - v^2\right)y\right) = 0.$$

Третье уравнение является следствием первых двух, поскольку здесь $x,\ y,\ z \neq 0$. Исключая переменную z из первых двух уравнений, можно получить однородное уравнение четвёртой степени относительно неизвестных x и y. Это уже позволяет предположить, что задача не может быть решена с помощью циркуля и линейки (что и может быть доказано).

Однако при дополнительном условии $w^2 = u^2 - uv + v^2$, которое выполняется в треугольниках с $\angle T_c = 60^\circ$, старший коэффициент зануляется и уравнение становится кубическим. Переходя к переменной t, которая определяется равенством $bx = tay$, получаем равенство

$$\begin{aligned}&3(u-v)vt^3 - \left(u^2 - 4uv + v^2\right)t^2 + \\ &+\left(u^2 - 4uv + v^2\right)t + 3u(u-v) = 0.\end{aligned} \qquad (2)$$

Подбором можно найти значения $u = 8,\ v = 7,\ w = \sqrt{57}\left(\angle T_c = 60^\circ\right)$, для которых соответствующее уравнение не имеет рациональных корней. Значит, по теореме 1 нельзя построить отрезки с длинами x, y, z, точку I и сам треугольник ABC. В явном виде треугольник $T_aT_bT_c$ можно построить, выбрав точки

$$T_a = (7,0),\ T_b = \left(4, 4\sqrt{3}\right),\ T_c = (0,0).$$

Трём корням уравнения (2) соответствуют три конфигурации, представленные в таблице 2.

Таблица 2

t	0,5492...	0,3370...	–6,1721...
A B C	(–0,3891, 6,8375) (1,4670, –25,7766) (8,5071, 7,0213)	(1,3112, 6,9711) (5,5301, 29,3999) (6,6557, 6,8857)	(5,8348, 0,7573) (7,6694, 0,9954) (6,3481, –0,9692)
I_*	$I = (3{,}6999,\ 3{,}0537)$	$I_b = (3{,}7956,\ 3{,}9267)$	$I_a = (3{,}7956,\ 3{,}9267)$

Задача 2. *Докажите, что при $w^2 = u^2 + uv = v^2$ уравнение, которому удовлетворяет переменная t, также становится кубическим. Найдите треугольник $T_aT_bT_c$ с углом 120° при вершине C_c, для которого задача построения треугольника ABC с помощью циркуля и линейки также неразрешима.*

3. Решение задач 81, 136 и 122 из списка Верника

Ниже приводятся решения задач 81, 136 и 122, которые, по-видимому, публикуются впервые.

Теорема 3. *В общем случае восстановление треугольника по основаниям двух биссектрис* *и центру описанной окружности с помощью циркуля и линейки невозможно.*

Доказательство. Докажем, что треугольник ABC нельзя построить, если треугольник OT_aT_b – равносторонний. Будем считать, что

$$|OT_a| = |OT_b| = |T_aT_b| = 1.$$

Из равенств $|CT_a| = \dfrac{ab}{b+c}$, $|CT_b| = \dfrac{ab}{a+c}$ вытекают формулы:

$$|OT_a|^2 = R^2 - \frac{a^2bc}{b+c},$$

$$|OT_b|^2 = R^2 - \frac{ab^2c}{a+c}.$$

Из них следует, что равенство $|OT_a| = |OT_b|$ возможно только при $a = b$. Для равнобедренного треугольника ($a = b$) формулы для расстояний между данными точками упрощаются:

$$1 = |T_aT_b| = \frac{ac}{a+c},$$

$$1 = |OT_a| = |OT_b| = R^2 - \frac{a^3c}{a+c}.$$

Выражая R через стороны треугольника и исключая неизвестную c, получаем, что число a является корнем уравнения

$$a^3 - 6a^2 + 9a - 3 = 0.$$

Оно не имеет рациональных корней, и по теореме 1 отрезок длины a, а вместе с ним и треугольник ABC, нельзя построить циркулем и линейкой.

В явном виде корни уравнения (3) находятся с помощью тригонометрических замен (методом Виета), см., например, [1, зад. 9.25 – 26]. Трём корням соответствуют три конфигурации, представленные в следующей таблице. Отрицательность величины c_1 означает, что вместо биссектрис внутренних углов нужно рассматривать биссектрисы внешних углов треугольника (прямые A_3C_3 и B_3C_3 на рис. 3).

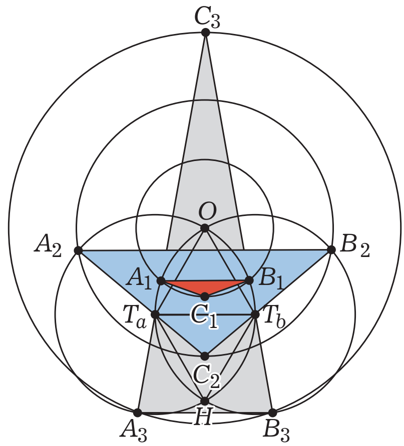


Рис. 3

Таблица 3

$a_1 = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{9} = 0,46...$	$a_2 = 2 - 2\cos\frac{4\pi}{9} = 1,65...$	$a_3 = 2 - 2\cos\frac{8\pi}{9} = 3,87...$
$c_1 = 1 + 2\cos\frac{8\pi}{9} = -0,87...$	$c_2 = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{9} = 2,53...$	$c_3 = 1 + 2\cos\frac{4\pi}{9} = 1,34...$
$R_1 = 2\sin\frac{\pi}{9}$	$R_2 = 2\sin\frac{2\pi}{9}$	$R_3 = 2\sin\frac{4\pi}{9}$
$\alpha = \beta = \frac{\pi}{9}, \gamma = \frac{7\pi}{9}$	$\alpha = \beta = \frac{2\pi}{9}, \gamma = \frac{5\pi}{9}$	$\alpha = \beta = \frac{4\pi}{9}, \gamma = \frac{\pi}{9}$

Ключом к решению задачи 136 служит та же идея использования правильного треугольника.

Теорема 4. *В общем случае восстановление треугольника по основаниям двух биссектрис и ортоцентру с помощью циркуля и линейки невозможно.*

Доказательство. Снова докажем, что треугольник ABC нельзя построить, если треугольник HT_aT_b – равносторонний. Будем также предполагать, что $|HT_a| = |HT_b| = |T_aT_b| = 1$. Из равенств

$$|CH| = 2R|\cos\gamma|,\ |CT_a| = \frac{ab}{b+c},\ |CT_b| = \frac{ab}{a+c}$$

выводятся формулы

$$|HT_a|^2 = 4R^2\cos^2\gamma + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - \frac{2ab^2|\cos\gamma|}{b+c},$$

$$|HT_b|^2 = 4R^2\cos^2\gamma + \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 - \frac{2a^2b|\cos\gamma|}{a+c}.$$

Из них следует, что равенство $|HT_a| = |HT_b|$ возможно только при $a = b$. Для равнобедренного треугольника ($a = b$) находим соотношения:

$$1 = |T_aT_b| = \frac{ac}{a+c},$$

$$1 = |HT_a| = |HT_b| = \left(\frac{ac}{a+c}\right)^2 + \frac{(ac)^2}{4a^2-c^2} - \frac{c^3}{a+c}.$$

Исключая неизвестную c, получаем, что число a является корнем уравнения (3). (В частности, треугольник HT_aT_b является равносторонним тогда и только тогда, когда треугольник HT_aT_b – равносторонний.) Отсюда, как и при доказательстве теоремы 3, следует, что построение треугольника ABC невозможно. Три возможные конфигурации также описаны в таблице 3.

Теорема 5. *В общем случае восстановление треугольника по основаниям двух биссектрис и центру масс с помощью циркуля и линейки невозможно.*

Доказательство снова будет строиться исходя из того, что GT_aT_b – правильный треугольник. Однако, основная трудность здесь заключается в том, чтобы доказать, что треугольник ABC – равнобедренный.

Лемма 3. Если GT_aT_b – правильный треугольник, то треугольник ABC – равнобедренный ($a = b$).

Доказательство. Предположим, что ABC не является равнобедренным ($a > b$). Выражаем стороны данного треугольника через a, b, c *(мы это предоставляем читателю)*:

$$|GT_a|^2 = \frac{4\left(bm_b^2 + cm_c^2\right)}{9(b+c)} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2},\quad |GT_b|^2 = \frac{4\left(am_a^2 + cm_c^2\right)}{9(a+c)} - \frac{ab^2c}{(a+c)^2},$$

$$|T_aT_b|^2 = \frac{abc}{(a+c)^2(b+c)^2}\left(a\left(b^2+c^2-a^2\right) + b\left(a^2+c^2-b^2\right) - c\left(a^2+b^2-c^2\right) + 3abc\right).$$

Переходя в равенствах

$$|GT_a|^2 = |GT_b|^2,$$

$$|GT_a|^2 = |GT_b|^2 = 2|T_aT_b|^2$$

к переменным $u = a - b > 0$, $v = a + b > 0$ (для простоты считаем, что $c = 1$), получаем соотношения

$$u^4(v+2) + u^2\left(-2v^3 + 24v + 20\right) + \left(v^5 - 2v^4 - 8v^3 - 4v^2 - 16v - 16\right) = 0,$$

$$u^6 - u^4\left(v^2 + 92v + 120\right) + u^2\left(-v^4 + 96v^3 + 192v^2 + 232v + 192\right) +$$

$$+(v+2)^3\left(v^3 - 10v^2 + 8v - 8\right) = 0.$$

Исключая из них неизвестную v, получаем уравнение для u:

$$\left(u^3 + 3u^2 - 3\right)\left(u^3 - 3u^2 + 3\right) = 0,$$

которое имеет на отрезке [0;1] единственный корень $u_0 = 2\cos\frac{\pi}{9} - 1$ (для него $u^3 + 3u^2 - 3 = 0$). Исключая неизвестную u, можно получить уравнение для v:

$$(v+1)^3(v+2)\left(4v^3 + 2v^2 - 3v + 24\right)\left(v^3 - 2v^2 - 6v - 1\right) = 0,$$

которое имеет единственный положительный корень $v_0 = 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + 1$ (для него $v^3 - 3v^2 - 6v - 1 = 0$). Проверка показывает, что (u_0, v_0) – постороннее решение $|GT_a| \neq |GT_b|$. Значит, предположение, что $a \neq b$, неверно, и треугольник ABC должен быть равнобедренным.

Доказательство теоремы 5. Как уже было сказано раньше, будем рассматривать случай, когда GT_aT_b – правильный треугольник (со стороной 1). Согласно лемме 3, треугольник ABC – равнобедренный ($a = b$). В этом случае

$$1 = |T_aT_b| = \frac{ac}{a+c},$$

$$1 = |GT_a| = |GT_b| = \left(\frac{a^2}{a+c}\right) + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 - \frac{4ah^2}{3(a+c)},$$

где $h = \sqrt{a^2 - c^2/4}$ – длина высоты, опущенной на основание треугольника ABC. Исключая переменную c, приходим к уравнению

$$a^3 - 8a^2 + 15a - 9 = 0, \qquad (4)$$

не имеющему рациональных корней. По теореме 1, отрезок длины a, а вместе с ним и треугольник ABC, нельзя построить циркулем и линейкой. Проверка показывает, что треугольник с нужными свойствами действительно существует. Уравнение (4) имеет единственный действительный корень

$$a = \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{19}}{3}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arch}\left(\frac{187}{38\sqrt{19}}\right)\right) = 5{,}613\ldots,$$

для которого получается треугольник с основанием $c = 1{,}2167\ldots$

Задача 3. *Исследуйте нерешённые задачи из списка Верника.*

Литература

1. *Алфутова Н.Б., Устинов А.В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач. – М., МЦНМО, 2009.
2. *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс. – М.: Наука, 1987.
3. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика. – М.: МЦМНО, 2001.

4. *Euler L.* Solutio facilis problematum quorumdam geometrieorum difficillimorum, – Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, 11, (1767), 103 – 123,

5. *Marinkovic V., Janičic P.* Towards Understanding Triangle Construction Problems, – Intelligent Computer Mathematics, 7362 (2012), 127 – 142,

6. *Meyers L. F.* Update on William Werniek's «Triangle Constructions with Three Located Points» – Math. Mag., 69 (1996), 46 – 49.

7. *Sandifer E.* How Euler Did It. The Euler line. – *MAA* Online. 2009.

8. *Ustinov A. V.* On the Construction of a Triangle from the Feet of Its Angle Bisectors. – Forum Geometrieorum, 2009, 9, 279 – 280.

9. *Wernick W.* Triangle Constructions with Three Located Points. – Math. Mag., 55 (1982), 227 – 230.

10. *Yiu P.* Conic construction of a triangle from the feet of its angle bisectors. – J. Geom. Graph., 12 (2008), 171 – 182.

Работа выполнена при поддержке фонда «Династия».

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Любезный лорд

В один из приездов Нильса Бора в Кембридж в честь него был дан «чай», а один из гостей посвятил ему шуточное стихотворение, в котором был такой фрагмент о Резерфорде:

… Британский сей любезный лорд
Был прежде просто Резерфорд.
На ферме некогда родясь,
С землёй он не утратил связь.
Могучий бас его, поверь,
Был слышен сквозь двойную дверь,
А сам, коль приходил он в гнев,
Пред ним щенком казался лев.
К тому ж он в ход пускать привык
Весьма доходчивый язык.