МОЖНО ЛИ ПОСТРОИТЬ ТРЕУГОЛЬНИК ПО ОСНОВАНИЯМ БИССЕКТРИС?

А. В. Устинов

1. Список Верника

В работе «Лёгкое решение очень трудной геометрической задачи» (см. [4], а также изложение на английском языке [7]) Л. Эйлер поставил вопрос о возможности восстановления треугольника по ортоцентру, центру масс, центрам вписанной и описанной окружностей. Эйлер доказал, что если любые две из четырех данных точек совпадают, то треугольник правильный и совпадают все четыре точки. В этом случае треугольник восстановить нельзя: его стороны могут иметь произвольную длину. Если же данные точки не совпадают, то треугольник по ним определяется однозначно. Тот замечательный факт, что ортоцентр, центр масс и центр описанной окружности лежат на одной прямой (известной сейчас как прямая Эйлера), оказался побочным результатом, которому автор, по-видимому, не придал особого значения.

Позднее оказалось, что много интересных и содержательных задач возникает, если расширить список точек, по которым нужно восстанавливать треугольник. В соответствии с современной традицией здесь предполагается, что построения проводятся с

Работа выполнена при поддержке фонда «Династия».

помощью циркуля и линейки. В статье Эйлера никаких предположений об инструментах построения не делалось, вопрос заключался лишь в однозначности определения вершин треугольника. В современной традиции треугольник может однозначно определяться, но быть при этом непостроимым, аналогично тому как не всегда решается задача о трисекции угла. В статье [9] было предложено рассмотреть задачу о восстановлении треугольника по трем точкам из следующих 16 (конечно же, многие подобные задачи рассматривались задолго до появления статьи [9]):

A, B, C, O — вершины треугольника и центр описанной окружности;

M_a, M_b, M_c, G — середины сторон треугольника и центр масс;

H_a, H_b, H_c, H — основания высот треугольника и ортоцентр;

T_a, T_b, T_c, I — основания биссектрис треугольника и центр вписанной окружности.

При таком подходе возникает 139 принципиально различных задач (например, из трёх вариантов A, B, G; B, C, G; A, C, G естественно оставить только один), перечисленных в таблице 1.

В некоторых тройках положение одной точки определяется по положению двух других. Например, таким свойством обладает тройка A, B, M_c. Такие случаи помечены буквой **R** (redundant), задача о восстановлении треугольника для них не имеет однозначного решения. В некоторых тройках присутствует более слабая зависимость. Например, точки A, B, O не могут располагаться произвольно (точка O должна лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AB). В зависимости от их взаимного расположения задача либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений. Такие тройки помечены буквой **L** (locus–dependent). Разрешимые задачи имеют статус **S** (solvable), неразрешимые — **U** (unsolvable). Пустое место означает, что ответ на сегодняшний день не известен.

1.	A, B, O	**L**	36.	A, M_b, T_c	**S**	71.	O, G, H	**R**	106.	M_a, H_b, T_c	**U**
2.	A, B, M_a	**S**	37.	A, M_b, I	**S**	72.	O, G, T_a	**U**	107.	M_a, H_b, I	**U**
3.	A, B, M_c	**R**	38.	A, G, H_a	**L**	73.	O, G, I	**U**	108.	M_a, H, T_a	**U**
4.	A, B, G	**S**	39.	A, G, H_b	**S**	74.	O, H_a, H_b	**U**	109.	M_a, H, T_b	**U**
5.	A, B, H_a	**L**	40.	A, G, H	**S**	75.	O, H_a, H	**S**	110.	M_a, H, I	**U**
6.	A, B, H_c	**L**	41.	A, G, T_a	**S**	76.	O, H_a, T_a	**S**	111.	M_a, T_a, T_b	**U**
7.	A, B, H	**S**	42.	A, G, T_b	**U**	77.	O, H_a, T_b		112.	M_a, T_a, I	**S**
8.	A, B, T_a	**S**	43.	A, G, I	**S**	78.	O, H_a, I		113.	M_a, T_b, T_c	
9.	A, B, T_c	**L**	44.	A, H_a, H_b	**S**	79.	O, H, T_a	**U**	114.	M_a, T_b, I	**U**
10.	A, B, I	**S**	45.	A, H_a, H	**L**	80.	O, H, I	**U**	115.	G, H_a, H_b	**U**
11.	A, O, M_a	**S**	46.	A, H_a, T_a	**L**	81.	O, T_a, T_b	***U***	116.	G, H_a, H	**S**
12.	A, O, M_b	**L**	47.	A, H_a, T_b	**S**	82.	O, T_a, I	**S**	117.	G, H_a, T_a	**S**
13.	A, O, G	**S**	48.	A, H_a, I	**S**	83.	M_a, M_b, M_c	**S**	118.	G, H_a, T_b	
14.	A, O, H_a	**S**	49.	A, H_b, H_c	**S**	84.	M_a, M_b, G	**S**	119.	G, H_a, I	
15.	A, O, H_b	**S**	50.	A, H_b, H	**L**	85.	M_a, M_b, H_a	**S**	120.	G, H, T_a	**U**
16.	A, O, H	**S**	51.	A, H_b, T_a	**S**	86.	M_a, M_b, H_c	**S**	121.	G, H, I	**U**
17.	A, O, T_a	**S**	52.	A, H_b, T_b	**L**	87.	M_a, M_b, H	**S**	122.	G, T_a, T_b	***U***
18.	A, O, T_b	**S**	53.	A, H_b, T_c	**S**	88.	M_a, T_b, T_a	**U**	123.	G, T_a, I	
19.	A, O, I	**S**	54.	A, H_b, I	**S**	89.	M_a, M_b, T_c	**U**	124.	H_a, H_b, H_c	**S**
20.	A, M_a, M_b	**S**	55.	A, H, T_a	**S**	90.	M_a, M_b, I	**U**	125.	H_a, H_b, H	**S**
21.	A, M_a, G	**R**	56.	A, H, T_b	**U**	91.	M_a, G, H_a	**L**	126.	H_a, H_b, T_a	**S**
22.	A, M_a, H_a	**L**	57.	A, H, I	**S**	92.	M_a, G, H_b	**S**	127.	H_a, H_b, T_c	
23.	A, M_a, H_b	**S**	58.	A, T_a, T_b	**S**	93.	M_a, G, H	**S**	128.	H_a, H_b, I	
24.	A, M_a, H	**S**	59.	A, T_a, I	**L**	94.	M_a, G, T_a	**S**	129.	H_a, H, T_a	**L**
25.	A, M_a, T_a	**S**	60.	A, T_b, T_c	**S**	95.	M_a, G, T_b	**U**	130.	H_a, H, T_b	**U**
26.	A, M_a, T_b	**U**	61.	A, T_b, I	**S**	96.	M_a, G, I	**S**	131.	H_a, H, I	**S**
27.	A, M_a, I	**S**	62.	O, M_a, M_b	**S**	97.	M_a, H_a, H_b	**S**	132.	H_a, T_a, T_b	
28.	A, M_b, M_c	**S**	63.	O, M_a, G	**S**	98.	M_a, H_a, L	**L**	133.	H_a, T_a, I	**S**
29.	A, M_b, G	**S**	64.	O, M_a, H_a	**L**	99.	M_a, H_a, T_a	**L**	134.	H_a, T_b, T_c	
30.	A, M_b, H_a	**L**	65.	O, M_a, H_b	**S**	100.	M_a, H_a, T_b	**U**	135.	H_a, T_b, I	
31.	A, M_b, H_b	**L**	66.	O, M_a, H	**S**	101.	M_a, H_a, I	**S**	136.	H, T_a, T_b	***U***
32.	A, M_b, H_c	**L**	67.	O, M_a, T_a	**L**	102.	M_a, H_b, H_c	**L**	137.	H, T_a, I	
33.	A, M_b, H	**S**	68.	O, M_a, T_b	**U**	103.	M_a, H_b, H	**S**	138.	T_a, T_b, T_c	**U**
34.	A, M_b, T_a	**S**	69.	O, M_a, I	**S**	104.	M_a, H_b, T_a	**S**	139.	T_a, T_b, I	**S**
35.	A, M_b, T_b	**L**	70.	O, G, H_a	**S**	105.	M_a, H_b, T_b	**S**			

Таблица 1. Список Верника.

Данные в таблице приводятся по статье [5], с учётом решений задач 81, 122 и 136, приведённых ниже.

Неразрешимость тех или иных задач обычно сводится к следующему утверждению (см. [3, гл. 3]). Напомним, что когда речь идёт о построении числа, подразумевается, что нужно построить отрезок, длина которого равна этому числу.

Теорема 1. *Пусть дан отрезок длины* 1. *Тогда если кубическое уравнение с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, то ни один из его корней не может быть построен с помощью циркуля и линейки.*

Например, задача о построении треугольника по точкам O, G, I, как показано Эйлером в [4], в общем случае сводится к построению корней кубического уравнения. Можно так подобрать исходные данные, что соответствующее им уравнение не будет иметь рациональных корней. Значит, по теореме 1, такая задача (вместе с эквивалентными задачами, см. номера 73, 80 и 121 в приведенной таблице) неразрешима.

2. О построении треугольника по основаниям биссектрис

В статьях [9, 6] оставалась нерешённой задача о возможности построения треугольника по основаниям биссектрис (задача 138). Далее приводится решение, первоначально опубликованное в [8].

Теорема 2. *В общем случае восстановление треугольника по основаниям биссектрис (внутренних или внешних углов) с помощью циркуля и линейки невозможно.*

Замечание. В статье [10] было доказано, что задача может быть решена с помощью дополнительного инструмента, позволяющего строить гиперболы. В некоторых частных случаях, например, для равнобедренных треугольников, задача допускает решение в рамках стандартного подхода.

Для анализа задачи удобней перейти к барицентрическим координатам (см. [2, § 11]). Барицентрическими координатами точки M относительно треугольника ABC называется набор масс $(\mu_a : \mu_b : \mu_c)$, которые нужно поместить в вершины A, B, C, чтобы центр масс полученной системы точек совпал с точкой M:

$$M = \frac{\mu_a A + \mu_b B + \mu_c C}{\mu_a + \mu_b + \mu_c}.$$

Координаты $(\mu_a : \mu_b : \mu_c)$ определены с точностью до мультипликативной константы, поэтому они записываются аналогично проективным координатам.

Лемма 1. *Пусть* $(x : y : z)$ *— барицентрические координаты точки* I *относительно треугольника* $T_aT_bT_c$. *Тогда*

$$A = (-x : y : z), \quad B = (x : -y : z), \quad C = (x : y : -z).$$

Доказательство. Из свойств биссектрисы следует, что точка I относительно треугольника ABC имеет барицентрические координаты $(a : b : c) = (2a : 2b : 2c)$. Перегруппировав массы (см. рис. 1), получаем, что относительно треугольника $T_aT_bT_c$ точка I имеет координаты $(b + c : a + c : a + b)$.

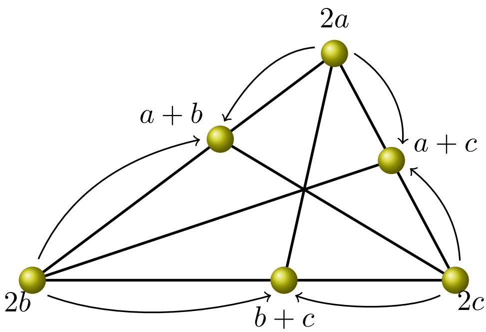

Рис. 1

С другой стороны, точку A относительно треугольника ABC можно задать координатами $(2a : 0 : 0) = (2a : b-b : c-c)$. После перегруппировки масс (см. рис. 2) получаем, что относительно треугольника $T_aT_bT_c$ точка A имеет координаты $(-b-c : a+c : a+b) = (-x : y : z)$.

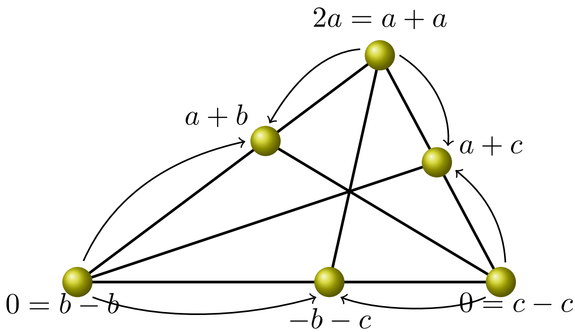

Рис. 2

Для точек B и C утверждение леммы проверяется аналогично. $\square$

Задача 1. *Докажите, что утверждение леммы 1 остаётся справедливым, если центр вписанной окружности I заменить на любой из центров вневписанных окружностей I_a, I_b или I_c.*

Лемма 2. *Пусть $Q = (x : y : z)$ — барицентрические координаты точки Q относительно треугольника $T_aT_bT_c$ со сторонами $u = |T_bT_c|$, $v = |T_aT_c|$, $w = |T_aT_b|$. Если точка T_a лежит на биссектрисе угла T_bQT_c (или смежного с ним угла), то*

$$x(w^2y^2 - v^2z^2) + yz((u^2 + w^2 - v^2)y - (u^2 + v^2 - w^2)z) = 0.$$

Доказательство. (См. [10].) Точка T_a лежит на биссектрисе угла T_bQT_c (или смежного с ним угла) тогда и только тогда, когда $\cos\angle T_aQT_b = \pm\cos\angle T_aQT_c$, то есть $\cos^2\angle T_aQT_b = \cos^2\angle T_aQT_c$.

В терминах расстояний это равенство означает, что

$$(|QT_a|^4 - |QT_b|^2|QT_c|^2)(|QT_b|^2 - |QT_c|^2) - \\ -2|QT_a|^2(v^2|QT_b|^2 - w^2|QT_c|^2) - 2(v^2 - w^2)|QT_b|^2|QT_c|^2 + \\ +v^4|QT_b|^2 - w^4|QT_c|^2 = 0. \tag{1}$$

Если две точки P_1, P_2 относительно треугольника XYZ со сторонами $u = |YZ|$, $v = |XZ|$, $w = |XY|$ имеют соответственно координаты

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \quad (x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1),$$

то расстояние между этими точками $d = |P_1P_2|$ можно найти по формуле (см. [2, § 11])

$$-d^2 = (x_1-x_2)(y_1-y_2)w^2+(x_1-x_2)(z_1-z_2)v^2+(y_1-y_2)(z_1-z_2)u^2.$$

Применяя её к точкам $Q = (x : y : z) = \left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$ и $T_a = (1 : 0 : 0)$, приходим к равенству

$$|QT_a|^2 = \frac{w^2y^2 + (v^2 + w^2 - u^2)yz + v^2z^2}{(x + y + z)^2}.$$

Если аналогичным образом выразить $|QT_b|^2$, $|QT_c|^2$ и результат подставить в (1), то после сокращения на сомножитель

$$\frac{-(u + v + w)(-u + v + w)(u - v + w)(u + v - w)}{(x + y + z)^4}x \neq 0$$

получится нужное равенство. □

Доказательство теоремы 2. Согласно леммам 1 и 2 числа x, y, z должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} -x(w^2y^2 - v^2z^2) + yz((w^2 + u^2 - v^2)y - (u^2 + v^2 - w^2)z) &=0, \\ -y(u^2z^2 - w^2x^2) + xz((u^2 + v^2 - w^2)z - (v^2 + w^2 - u^2)x) &=0, \\ -z(v^2x^2 - u^2y^2) + xy((v^2 + w^2 - u^2)x - (w^2 + u^2 - v^2)y) &=0. \end{aligned}$$

Третье уравнение является следствием первых двух, поскольку в рассматриваемой задаче $xyz \neq 0$. Исключая переменную z из первых двух уравнений, можно получить однородное уравнение четвертой степени относительно неизвестных x и y. Это уже позволяет предположить, что задача не может быть решена с помощью циркуля и линейки (действительно, в общем случае группа Галуа этого уравнения равна S_4).

Однако при дополнительном условии $w^2 = u^2 - uv + v^2$, которое выполняется в треугольниках с $\angle T_c = 60^\circ$, старший коэффициент зануляется и уравнение становится кубическим. Переходя к переменной t, которая определяется равенством $bx = tay$, получаем равенство

$$3(u-v)vt^3 - (u^2-4uv+v^2)t^2 + (u^2-4uv+v^2)t + 3u(u-v) = 0. \quad (2)$$

Подбором можно найти значения $u = 8$, $v = 7$, $w = \sqrt{57}$ ($\angle T_c = 60^\circ$), которым соответствует уравнение

$$7t^3 + 37t^2 - 37t + 8 = 0,$$

не имеющее рациональных корней. Значит, по теореме 1, нельзя построить отрезки x, y, z, точку I и сам треугольник ABC. В явном виде треугольник $T_aT_bT_c$ можно нарисовать, выбрав точки $T_a = (7, 0)$, $T_b = (4, 4\sqrt{3})$, $T_c = (0, 0)$. Трём корням уравнения (2) соответствуют три конфигурации, представленные в таблице 2 (здесь и далее численные значения приводятся с точностью до одной сотой). $\square$

t	$0.54\ldots$	$0.33\ldots$	$-6.17\ldots$
A	$(-0.38, 6.83)$	$(1.31, 6.97)$	$(5.83, 0.75)$
B	$(1.46, -25.77)$	$(5.53, 29.39)$	$(7.66, 0.99)$
C	$(8.50, 7.02)$	$(6.65, 6.88)$	$(6.34, -0.96)$
I_*	$I = (3.69, 3.05)$	$I_b = (3.79, 3.92)$	$I_a = (3.79, 3.92)$

Таблица 2.

Задача 2. *Докажите, что при $w^2 = u^2 + uv + v^2$ уравнение, которому удовлетворяет переменная t также становится кубическим. Найдите треугольник $T_aT_bT_c$ с углом $120°$ при вершине T_c, для которого задача построения треугольника ABC с помощью циркуля и линейки также неразрешима.*

3. Решение задач 81, 136 и 122 из списка Верника

Ниже приводятся решения задач 81, 136 и 122, которые, по-видимому, найдены впервые.

Теорема 3. *В общем случае восстановление треугольника по основаниям двух биссектрис и центру описанной окружности с помощью циркуля и линейки невозможно.*

Доказательство. Докажем, что треугольник ABC нельзя построить, если треугольник OT_aT_b — равносторонний. Будем считать, что $|OT_a| = |OT_b| = |T_aT_b| = 1$. Из равенств

$$|CT_a| = \frac{ab}{b+c}, \quad |CT_b| = \frac{ab}{a+c}$$

вытекают формулы

$$|OT_a|^2 = R^2 - \frac{a^2bc}{b+c}, \qquad |OT_b|^2 = R^2 - \frac{ab^2c}{a+c}.$$

Из них следует, что равенство $|OT_a| = |OT_b|$ возможно только при $a = b$. Для равнобедренного треугольника ($a = b$) формулы для расстояний между данными точками упрощаются:

$$1 = |T_aT_b| = \frac{ac}{a+c},$$

$$1 = |OT_a| = |OT_b| = R^2 - \frac{a^3c}{a+c}.$$

Выражая R через стороны треугольника и исключая неизвестную c, получаем, что число a является корнем уравнения

$$a^3 - 6a^2 + 9a - 3 = 0. \tag{3}$$

Это уравнение не имеет рациональных корней, и по теореме 1 отрезок длины a, а вместе с ним и треугольник ABC нельзя построить циркулем и линейкой.

Трём корням уравнения (3) соответствуют три конфигурации, представленные в следующей таблице (соответствующие им треугольники изображены на рис. 3).

$a_1 = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{9} = 0.46$	$a_2 = 2 - 2\cos\frac{4\pi}{9} = 1.65$	$a_3 = 2 - 2\cos\frac{8\pi}{9} = 3.87$
$c_1 = 1 + 2\cos\frac{8\pi}{9} = -0.87$	$c_2 = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{9} = 2.53$	$c_3 = 1 + 2\cos\frac{4\pi}{9} = 1.34$
$R_1 = 2\sin\frac{\pi}{9}$	$R_2 = 2\sin\frac{2\pi}{9}$	$R_3 = 2\sin\frac{4\pi}{9}$
$\alpha = \beta = \frac{\pi}{9},\ \gamma = \frac{7\pi}{9}$	$\alpha = \beta = \frac{2\pi}{9},\ \gamma = \frac{5\pi}{9}$	$\alpha = \beta = \frac{4\pi}{9},\ \gamma = \frac{\pi}{9}$

Таблица 3.

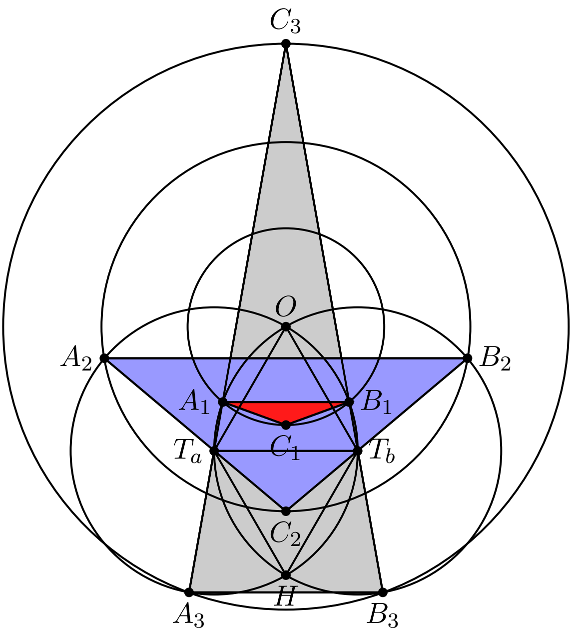

Рис. 3

В явном виде корни уравнения (3) могут быть найдены с помощью тригонометрических замен (методом Виета), см., например, [1, зад. 9.25–26]. Отрицательность величины c_1 означает, что вместо биссектрис внутренних углов нужно рассматривать биссектрисы внешних углов треугольника (прямые A_3C_3 и B_3C_3 на рис. 3). $\square$

Ключом к решению задачи 136 служит та же идея использования правильного треугольника.

Теорема 4. *В общем случае восстановление треугольника по основаниям двух биссектрис и ортоцентру с помощью циркуля и линейки невозможно.*

Доказательство. Снова докажем, что треугольник ABC нельзя построить, если треугольник HT_aT_b — равносторонний, и $|HT_a| = |HT_b| = |T_aT_b| = 1$. Из соотношений $|CH| = 2R|\cos\gamma|$, $|CT_a| = \frac{ab}{b+c}$, $|CT_b| = \frac{ab}{a+c}$ выводятся формулы

$$|HT_a|^2 =4R^2\cos^2\gamma + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - \frac{2ab^2|\cos\gamma|}{b+c},$$

$$|HT_b|^2 =4R^2\cos^2\gamma + \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 - \frac{2a^2b|\cos\gamma|}{a+c}.$$

Из них следует, что равенство $|HT_a| = |HT_b|$ возможно только при $a = b$. Для равнобедренного треугольника ($a = b$) получаем соотношения

$$1 = |T_aT_b| =\frac{ac}{a+c},$$

$$1 = |HT_a|^2 = |HT_b|^2 = \left(\frac{ac}{a+c}\right)^2 + \frac{(ac)^2}{4a^2-c^2} - \frac{c^3}{a+c}.$$

Исключая неизвестную c, находим, что число a является корнем уравнения (3). (В частности, треугольник HT_aT_b является равносторонним тогда и только тогда, когда треугольник OT_aT_b —

равносторонний.) Отсюда, как и при доказательстве теоремы 3 следует, что построение треугольника ABC невозможно. Три возможные конфигурации описываются в той же таблице 3 и также изображены на рис. 3. $\square$

Теорема 5. *В общем случае восстановление треугольника по основаниям двух биссектрис и центру масс с помощью циркуля и линейки невозможно.*

Доказательство снова будет строиться исходя из того, что треугольник GT_aT_b — правильный. Однако основная трудность здесь заключается в обосновании равнобедренности треугольника ABC.

Лемма 3. *Если GT_aT_b — правильный треугольник, то треугольник ABC — равнобедренный ($a = b$).*

Доказательство. (Вычисления проведены в программе Mathematica.) Предположим, что ABC не является равнобедренным ($a > b$). Выразим стороны данного треугольника через a, b, c:

$$|GT_a|^2 = \frac{4(bm_b^2 + cm_c^2)}{9(b+c)} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$
$$|GT_b|^2 = \frac{4(am_a^2 + cm_c^2)}{9(a+c)} - \frac{ab^2c}{(a+c)^2},$$
$$|T_aT_b|^2 =$$
$$= \frac{abc\left(a(b^2+c^2-a^2) + b(a^2+c^2-b^2) - c(a^2+b^2-c^2) + 3abc\right)}{(a+c)^2(b+c)^2}.$$

Переходя в равенствах

$$|GT_a|^2 = |GT_b|^2, \qquad |GT_a|^2 + |GT_b|^2 = 2|T_aT_b|^2$$

к переменным $u = a - b > 0$, $v = a + b > 0$ (для простоты считаем, что $c = 1$), получаем соотношения

$$u^4(v+2) + u^2(-2v^3 + 24v + 20) + \\ +(v^5 - 2v^4 - 8v^3 - 4v^2 - 16v - 16) = 0,$$

$$u^6 - u^4(v^2 + 92v + 120) + u^2(-v^4 + 96v^3 + 192v^2 + 232v + 192) + \\ +(v+2)^3(v^3 - 10v^2 + 8v - 8) = 0.$$

Исключая из них неизвестную v, находим уравнение для u:

$$(u^3 + 3u^2 - 3)(u^3 - 3u^2 + 3) = 0.$$

Первый сомножитель на отрезке $[0, 1]$ не имеет корней, а второй — имеет единственный корень $u_0 = 2\cos\frac{\pi}{9} - 1$. Исключая неизвестную u, можно получить уравнение для v:

$$(v+1)^3(v+2)(4v^3 + 2v^2 - 3v + 24)(v^3 - 3v^2 - 6v - 1) = 0.$$

Здесь положительный корень имеет только последний сомножитель $v^3 - 3v^2 - 6v - 1 = 0$. Это число $v_0 = 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + 1$. Проверка показывает, что (u_0, v_0) — постороннее решение ($|GT_a| \neq |GT_b|$). Значит, предположение, что $a \neq b$ неверно, и треугольник ABC должен быть равнобедренным. $\square$

Доказательство теоремы 5. Как уже было сказано раньше, будем рассматривать случай, когда GT_aT_b — правильный треугольник (со стороной 1). Согласно лемме 3, треугольник ABC — равнобедренный ($a = b$). В этом случае

$$1 = |T_aT_b| = \frac{ac}{a+c},$$

$$1 = |GT_a| = |GT_b| = \left(\frac{a^2}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 - \frac{4ah^2}{3(a+c)},$$

где $h = \sqrt{a^2 - c^2/4}$ — длина высоты, опущенной на основание треугольника ABC. Исключая переменную c, приходим к уравнению

$$a^3 - 8a^2 + 15a - 9 = 0, \tag{4}$$

не имеющему рациональных корней. По теореме 1 отрезок длины a, а вместе с ним и треугольник ABC нельзя построить циркулем и линейкой. Проверка показывает, что треугольник с нужными свойствами действительно существует. Уравнение (4) имеет единственный действительный корень

$$a = \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{19}}{3}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arch}\left(\frac{187}{38\sqrt{19}}\right)\right) = 5.61\ldots,$$

для которого получается треугольник с основанием $c = 1.21\ldots$. $\square$

Задача 3. *В каких случаях из равнобедренности треугольника GT_aT_b следует равнобедренность треугольника ABC?*

Задача 4. *Исследуйте нерешённые задачи из списка Верника.*

Список литературы

[1] Алфутова Н. Б., Устинов А. В. *Алгебра и теория чисел. Сборник задач.* — М., МЦНМО, 2009.

[2] Балк М. Б., Болтянский В. Г. *Геометрия масс.* (Библиотечка «Квант», вып. 61.) Изд-во «Наука», Москва, 1987.

[3] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. — М.: МЦНМО, 2001.

[4] Euler L. Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum. — *Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, **11** (1767) 103-123.

[5] Marinković V., Janičić P. Towards Understanding Triangle Construction Problems. — *Intelligent Computer Mathematics*, **7362** (2012), 127–142.

[6] Meyers L. F. Update on William Wernick's “Triangle Constructions with Three Located Points” — *Math. Mag.*, **69** (1996), 46–49.

[7] Sandifer E. How Euler Did It. The Euler line. — *MAA Online*. 2009. `http://www.maa.org/editorial/euler/HEDI%2063%20Euler%20line.pdf`

[8] Ustinov A. V. On the Construction of a Triangle from the Feet of Its Angle Bisectors. — *Forum Geometricorum*, **9** (2009), 279–280.

[9] Wernick W. Triangle Constructions with Three Located Points. — *Math. Mag.*, **55** (1982), 227–230.

[10] Yiu P. Conic construction of a triangle from the feet of its angle bisectors. — *J. Geom. Graph.*, **12** (2008), 171–182.

Алексей Устинов, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН.

E-mail address: `ustinov@iam.khv.ru`