Школа имени А. Н. Колмогорова

Н. Б. Алфутова, Ю. Е. Егоров, А. В. Устинов

18×18

Вступительные задачи ФМШ при МГУ

Издание второе, исправленное и дополненное

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 51(07)
ББК 22.1
А53

Алфутова Н. Б. и др.

А53 18 × 18. Вступительные задачи ФМШ при МГУ / Алфутова Н. Б., Егоров Ю. Е., Устинов А. В. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2014. — 216 с.

ISBN 978-5-4439-0326-2

Сборник состоит из задач по математике, которые в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в 10 и 11 классы школы им. А. Н. Колмогорова. Приводятся задачи разного уровня сложности по алгебре, геометрии и теории чисел.

Первое издание книги вышло в 2006 г.

ББК 22.1

Авторы задач:
Абраров Д. Л., Алфутова Н. Б., Вавилов В. В., Виноградов О. П., Гашков С. Б., Дубровский В. Н., Егоров А. А., Егоров Ю. Е., Земляков А. Н., Колмогоров А. Н., Колосов В. А., Макаров А. В., Рождественский В. В, Русаков А. А., Сергеев И. Н., Скопенков А. Б., Смуров М. В., Соловьёв Ю. П., Устинов А. В.

Набор:
Коровин И. Н., Лебедева Н. А., Устинов А. В., Егоров Ю. Е.

ISBN 978-5-4439-0326-2

К читателю

> Что было, то и будет; и что делалось, то и будет делаться, и нет ничего нового под солнцем.
>
> Бывает нечто, о чём говорят: «смотри, вот это новое»; но это было уже в веках, бывших прежде нас.
>
> *Книга Екклесиаста*

К школьникам, поступающим в школу-интернат имени А. Н. Колмогорова (полное название — Специализированный учебно-научный центр Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова), предъявляются два основных требования. Во-первых, необходимо владеть знаниями, предусмотренными школьной программой. Во-вторых, нужно уметь решать нестандартные задачи. Здесь можно взять изобретательностью, упорством или знанием.

Откроем нашим читателям главный секрет. Идей и трюков, которые используются при составлении новых задач, конечное число (хотя довольно большое). За время существования школы было проведено огромное количество письменных и устных вступительных экзаменов. Все возможные идеи так или иначе уже были использованы, и придумать что-то принципиально новое очень сложно. Например, одну из самых красивых геометрических задач в этой книге (см. № 14.3) можно найти в «Книге лемм» Архимеда. Она предлагалась в 1970 году, и сейчас уже вряд ли кто-то сможет сказать, была ли она придумана заново или же позаимствована у классика.

Здесь мы постарались объединить наиболее интересные и полезные задачи, предлагавшиеся на экзаменах в разные годы. Они позволят вам повторить школьную программу и познакомиться с новыми приёмами, которые в неё слегка не вписываются. У вас появятся знания и опыт, которые на 90 % обеспечат вам успех на вступительном экзамене. Не пугайтесь, если условие сначала покажется сложным. Задача могла предлагаться на заочном туре, когда над ней можно было думать больше месяца или даже предложить знакомому математику.

Этот сборник выходит в год 50-летнего юбилея школы Колмогорова. Можно сказать, что в представленных задачах просматривается математическая история интерната, сменившего название, но сохранившего свою творческую и научную суть. Наши многочисленные выпускники ностальгически улыбнутся, увидев знакомые задания, которые кому-то, возможно, решили судьбу поступления, а кому-то «просто» принесли радость открытия. Книга не случайно составлена в формате 18 × 18 (18 глав по 18 задач). До 1988 года школа им. А. Н. Колмогорова называлась физико-математической школой-интернатом № 18 при МГУ. Название книги — наша дань прежнему имени, уходящему в прошлое.

Отметим некоторые книги, которые будут полезны, если вы захотите познакомиться с теорией в большем объёме, а также лучше овладеть техникой решения нестандартных задач:

Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел: Сборник задач. — М.: МЦНМО, 2009.

Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1. — М., 2010. — (Библиотечка «Квант»; Вып. 117).

Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 2. — М., 2011. — (Библиотечка «Квант»; Вып. 119).

Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре. — М.: Просвещение, 2013.

Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические олимпиады. — Киров: АСА, 1994.

Уфнаровский В. А. Математический аквариум. — М.: Изд-во МЦНМО, 2014.

Другие ссылки на полезную литературу вы найдёте в конце каждой главы. В основном это статьи из журнала «Квант», которые доступны по адресу: `kvant.mccme.ru`.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность преподавателям школы А. А. Егорову, В. В. Вавилову, О. Е. Долгалевой, В. Н. Дубровскому, Д. В. Алексееву и И. Ю. Селивановой за предоставленные материалы и помощь при составлении этого сборника.

Алфутова Н. Б. (alpha@desc.ru)
Егоров Ю. Е. (egorov.yu@gmail.com)
Устинов А. В. (ustinov@iam.khv.ru)

Основные обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ — факториал числа n.

Символом $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ обозначается число, десятичная запись которого в i-м разряде имеет цифру a_i. Иначе говоря,

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0.$$

$\overrightarrow{AB}$ — вектор с началом в точке A и концом в точке B.

Для треугольника ABC будем использовать следующие обозначения: α, β, γ — углы этого треугольника; a, b, c — лежащие напротив них стороны; p — полупериметр; S — площадь; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно; h_a, m_a, l_a — длины высоты, медианы и биссектрисы соответственно, проведённых из вершины A к стороне a.

Тема 1

Делимость
Деление с остатком
Простые и составные числа
Решение уравнений в целых числах

Теория

1°. Пусть a — целое число, b — натуральное. Существует единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = b \cdot q + r$ и $0 \leqslant r < b$. Числа q и r называются соответственно (*неполным*) *частным* и *остатком* при делении a на b.

2°. Числа a и b называются *сравнимыми* по модулю m, если они дают одинаковые остатки при делении на m. Записывается это в виде: $a \equiv b \pmod{m}$. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то:

а) $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;

б) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

3°. Натуральное число $p > 1$, которое имеет ровно два натуральных делителя (1 и p), называется *простым*. Натуральные числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются *составными*. По соглашению, число 1 не относят ни к простым, ни к составным числам.

4°. Натуральные числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

Если числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно взаимно просты, то делимость на их произведение эквивалентна делимости на каждое из чисел m_i.

5°. Основная теорема арифметики. Любое натуральное число представимо в виде произведения простых сомножителей. Такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей.

Задачи

1.1 (*1967*). Найдите все целые числа a, для которых число $\frac{a^2+1}{a+2}$ будет целым.

1.2 (*1968*). Пусть x и y — целые числа такие, что $3x+7y$ делится на 19. Докажите, что $43x+75y$ тоже делится на 19.

1.3 (*1969*). Найдите все числа, которые оканчиваются цифрами ...1969 и уменьшаются в целое число раз после вычёркивания этих цифр.

1.4 (*1970*). Найдите все простые числа p и q, для которых верно равенство $p^2-2q^2=1$.

1.5 (*1980*). Докажите, что для чётных натуральных чисел n число n^3+20n делится на 48.

1.6 (*1988*). Решите в целых числах уравнение

$$2xy+3y^2=24.$$

1.7 (*1993*). а) Докажите, что сумма квадратов десяти последовательных натуральных чисел никогда не является полным квадратом.

б) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых является полным квадратом.

1.8 (*1994*). Докажите, что число $3^{54}-3^{27}\cdot 2^{12}+2^{24}$ является составным.

1.9 (*1995*). Найдите все пары (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2+y^2=x^3$.

1.10 (*1995*). Найдите наибольшее натуральное число n такое, что $1995!$ делится на 10^n.

1.11 (*1996*). Найдите все натуральные числа n и m такие, что

$$1!+2!+\ldots+n!=m^2.$$

1.12 (*1996*). Докажите, что не существует таких целых чисел n и m, что

$$m^3+6m^2+5m=27n^3+9n^2+9n+1.$$

1.13 (*1996*). Докажите, что не существует простого числа p такого, что $n!+1<p\leqslant n!+n$ $(n\geqslant 2)$.

1.14 (*1996*). Найдите наименьшее простое число, являющееся делителем числа $3^{11}+5^{13}$.

1.15 (*1997*). Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x^2-xy-2x+3y=11.$$

1.16 (*1997*). Найдите два двузначных числа, если известно, что сумма остальных двузначных чисел в 50 раз больше одного из этих двух чисел.

1.17 (*1998*). При каких натуральных n число $n^2+17n-2$ делится а) на 11; б) на 121?

1.18 (*1999*). Найдите наибольшую степень двойки, на которую при любом нечётном a делится число $a^{12}-a^8-a^4+1$.

Ответы и решения

1.1. $\dfrac{a^2+1}{a+2}=a-2+\dfrac{5}{a+2}$, значит, $a+2$ — делитель пяти. Поэтому возможны четыре варианта: $a+2=\pm5, \pm1$, т. е. $a=3$, $a=-7$, $a=-1$ или $a=-3$.

Ответ. $a=3$, $a=-7$, $a=-1$, $a=-3$.

1.2. *Указание.* Преобразуем выражение:

$$43x+75y=76x-33x+152y-77y=19(4x+8y)-11(3x+7y).$$

1.3. Запишем искомое число A в виде $A=B\cdot10^4+1969$. По условию задачи должно выполняться равенство

$$B\cdot10^4+1969=k\cdot B,$$

где $k\in\mathbb{N}$. Значит, $1969=(k-10^4)B$ и B является делителем числа $1969=11\cdot179$. Следовательно, существуют четыре возможных варианта выбора B: $B=1, 11, 179, 1969$.

Ответ. 11 969, 111 969, 1 791 969, 19 691 969.

1.4. Перепишем уравнение в виде

$$q^2=\frac{(p-1)(p+1)}{2}.$$

Заметим, что p — непременно нечётное число. Отсюда q — чётное. Значит, $q=2$ (2 — единственное чётное простое число) и $p=3$.

Ответ. $p=3$, $q=2$.

1.5. Поскольку $48=2^4\cdot 3$, достаточно показать, что $n(n^2+20)$ делится на 3 и на 2^4. Если $n=3k$, то первый множитель делится на 3. Если же $n=3k+1$ или $n=3k+2$, то второй множитель равен соответственно $(3k+1)^2+20=9k^2+6k+21$ или $(3k+2)^2+20=9k^2+12k+24$ и, значит, делится на 3.

Пусть $n=2l$, где l чётно. Тогда первый множитель делится на 4 и второй делится на 4. Доказана делимость на 2^4. Если же $n=2s$, где s нечётно ($s=2t+1$), то второй множитель делится на 2^3, так как

$$(4t+2)^2+20=16t^2+16t+24,$$

а первый делится на 2.

1.6. Преобразуем уравнение к виду $2xy=3(8-y^2)$. Левая часть — число чётное, откуда следует, что y также чётно. Пусть $y=2z$. Тогда $xz=3(2-z^2)$ или $x=\dfrac{6}{z}-3z$. Чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы z было делителем 6. Значит, z — одно из чисел ±1, ±2, ±3 или ±6.

Ответ. $(3; 2)$, $(-3; -2)$, $(-3; 4)$, $(3; -4)$, $(-7; 6)$, $(7; -6)$, $(-17; 12)$, $(17; -12)$.

1.7. а) Пусть сумма квадратов

$$(n-4)^2+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+ \\ +(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+5)^2$$

является полным квадратом. Тогда, раскрыв скобки, находим, что число

$$10n^2+10n+85=5(2n^2+2n+17)$$

является полным квадратом. Таким образом, число $2n^2+2n+17$ должно делиться на 5. Если $n=5k$, то $50k^2+10k+17$ не делится на 5. В случаях $n=5k-2$, $n=5k-1$, $n=5k+1$ или $n=5k+2$ значение $2n^2+2n+17$ равно $50k^2-30k+21$,

$50k^2 - 10k + 17$, $50k^2 + 30k + 21$ и $50k^2 + 50k + 29$ соответственно. Легко видеть, что эти числа также не делятся на 5 ни при каком натуральном k.

б) Сумма квадратов одиннадцати чисел

$$(n-5)^2 + (n-4)^2 + (n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + \\ + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2$$

равна $11(n^2 + 10)$. При $n = 23$ это число равно $11 \cdot 539 = 77^2$. Таким образом, сумма квадратов чисел 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 и 28 равна квадрату числа 77.

Ответ. б) 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

1.8.

$$3^{54} - 3^{27} \cdot 2^{12} + 2^{24} = \\ = (3^{27})^2 + 2 \cdot 3^{27} \cdot 2^{12} + (2^{12})^2 - 3^{27} \cdot 2^{12} - 2 \cdot 3^{27} \cdot 2^{12} = \\ = (3^{27} + 2^{12})^2 - 3 \cdot 3^{27} \cdot 2^{12} = (3^{27} + 2^{12})^2 - 3^{28} \cdot 2^{12} = \\ = ((3^{27} + 2^{12}) - 3^{14} \cdot 2^6)((3^{27} + 2^{12}) + 3^{14} \cdot 2^6).$$

1.9. Из уравнения $y^2 = x^2(x-1)$ следует, что x^2 является делителем y^2, значит, $y = kx$ ($k \in \mathbb{N}$) и $k^2x^2 = x^2(x-1)$. Но $x \neq 0$, поэтому $x - 1 = k^2$ и $x = k^2 + 1$. Следовательно, решениями уравнения являются пары $(x, y) = (k^2 + 1, (k^2 + 1)k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Ответ. $(x, y) = (k^2 + 1, (k^2 + 1)k)$, $k \in \mathbb{N}$.

1.10. *Указание.* Подсчитайте количество пятёрок в разложении 1995! на простые множители (не забудьте, что в числе 25 — две пятёрки, в 125 — три и т. д.).

Ответ. $n = 496$.

1.11. Если $n = 1, 2, 3, 4$, то левая часть уравнения равна 1, 3, 9 и 33 соответственно (откуда и следует ответ). Если $n \geqslant 5$, то число слева заканчивается на 3 и поэтому не может быть полным квадратом.

Ответ. $n = 1$, $m = 1$ и $n = 3$, $m = 3$.

1.12. В равенстве

$$m(m+1)(m+2) + 3m(m+1) = 3(9n^3 + 3n^2 + 3n) + 1$$

левая часть делится на 3, а правая — нет.

1.13. *Указание.* Любое число вида $n! + k$ для $1 < k \leqslant n$ делится на k.

1.14. Каждое из слагаемых нечётно, следовательно, сумма делится на 2.

Ответ. 2.

1.15. Преобразуем данное уравнение:

$$x^2 - 3x + 3y - xy + x - 3 = 11 - 3,$$
$$x(x-3) - y(x-3) + (x-3) = 8,$$
$$(x-3)(x-y+1) = 8.$$

Число x — натуральное, а $x - 3$ является делителем 8, поэтому

$$x - 3 \in \{-2; -1; 1; 2; 4; 8\}.$$

Значение y находится из соотношения

$$x - y + 1 = \frac{8}{x-3}.$$

Подходят те решения, для которых y — натуральное.

Ответ. $(x; y) \in \{(1; 6); (2; 11); (5; 2); (7; 6); (11; 11)\}$.

1.16. Найдём сумму всех двузначных чисел как сумму арифметической прогрессии с разностью 1, первый член которой равен 10. Получим, что она равна 4905. Если x и y — искомые двузначные числа, то по условию задачи

$$4905 - x - y = 50x, \quad \text{то есть} \quad 51x = 4905 - y.$$

Учитывая неравенства $10 \leqslant y \leqslant 99$, получаем, что число $51x$ попадает в промежуток от 4806 до 4895. В этом промежутке на 51 делится только одно число — это число $4845 = 51 \cdot 95$. Следовательно, $x = 95$, откуда $y = 60$.

Ответ. $x = 95$, $y = 60$.

1.17. а) Заметим, что

$$n^2 + 17n - 2 = n^2 + 6n + 9 + 11n - 11 = (n+3)^2 + 11(n-1).$$

Число $11(n-1)$ делится на 11 при любом натуральном n. Чтобы вся сумма делилась на 11, необходимо и достаточно, чтобы на 11 делилось $(n+3)^2$. Это выполняется, если $n + 3 = 11k$, где k — произвольное целое число. Коль скоро n должно быть натуральным, получаем, что условию задачи удовлетворяют числа вида $n = 11k - 3$, где k — произвольное натуральное число.

б) Если число $n^2 + 17n - 2$ делится на 121, то оно делится и на 11. Тогда согласно пункту а) число n имеет вид $n = 11k - 3$. Следовательно,

$$n^2 + 17n - 2 = (n+3)^2 + 11(n-1) = 121k^2 + 121k - 44.$$

Отсюда видно, что число $n^2 + 17n - 2$ не делится на 121 ни при каком натуральном n.

Ответ. а) $n = 11k - 3$, где k — натуральное число; б) ни при каком натуральном n.

1.18. Представим исходное число в виде

$$(a^4+1)(a^2+1)^2(a-1)^2(a+1)^2.$$

При $a = 2k + 1$ числа $a^4 + 1$ и $a^2 + 1$ делятся только на первую степень числа 2, так как

$$a^4 + 1 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 2,$$
$$a^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2.$$

Поскольку одно из чисел k или $k+1$ обязательно чётное, то произведение

$$(a-1)(a+1) = 2^2 \cdot k(k+1)$$

всегда делится на 2^3, но не всегда на 2^4 (например, при $k = 1$). Поэтому максимальная степень двойки, на которую делится исходное число, равна 9.

Ответ. 9.

Решите сами

1 (*1969*). Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - 6xy + 5y^2 = 11.$$

2 (*1998*). Найдите наименьшее из натуральных чисел, которые при делении на 2 дают в остатке 1, при делении на 3 дают в остатке 2, при делении на 4 дают в остатке 3, при делении на 5 дают в остатке 4.

3 (*1999*). Последняя цифра натурального числа a, кратного 3, равна 8. Докажите, что число $a^2-6a-216$ делится на 1800.

4 (*1999*). Дано простое число $p>5$. Решите в натуральных числах уравнение $x^2=y^2+20p$.

5 (*2000*). Найдите все пары натуральных чисел, для которых их произведение втрое больше их суммы.

6 (*2000*). Может ли сумма трёх последовательных квадратов целых чисел быть равной сумме кубов двух последовательных целых чисел?

7 (*2002*). Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x^6=56+y^3.$$

Литература по теме

[1] *Егоров А.* Сравнения по модулю и арифметика остатков // Квант. 1970. № 5. С. 27—33.

[2] *Булавко И.* Делимость чисел // Квант. 1974. № 9. С. 70—73.

[3] *Ионин Ю., Плоткин А.* Выбор модуля // Квант. 1984. № 6. С. 28—30.

[4] *Егоров А.* Деление с остатком и сравнения по модулю // Квант. 1991. № 6. С. 36—39.

Тема 2

Десятичная запись числа и признаки делимости

Теория

1°. Признаки делимости. Число, записанное в десятичной системе счисления, делится на 2 (на 5) тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2 (на 5). Аналогично, число делится на 4 (на 25) тогда и только тогда, когда число, состоящее из двух его последних цифр, делится на 4 (на 25).

Число, записанное в десятичной системе счисления, делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9). Число $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма его цифр

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n$$

делится на 11.

2°. Квадраты целых чисел при делении на $m = 4$ могут давать только остатки 0 и 1, а при делении на $m = 5$ — остатки 0, 1 и 4. Аналогичные утверждения можно сформулировать для других модулей m и других степеней целых чисел. Можно, например, рассматривать и остатки от деления на $m = 10$, которые совпадают с последней цифрой числа (для квадратов они равны 0, 1, 4, 5, 6 и 9).

Задачи

2.1 (*1967*). Шестизначный номер автобусного билета называется счастливым, если сумма его первых трёх цифр равна сумме трёх последних цифр. Докажите, что сумма всех счастливых номеров делится на 13. (Номер автобусного билета может начинаться с произвольного числа нулей.)

2.2 (*1969*). В каком году родились люди, которым в 1969 году исполнилось столько лет, какова сумма цифр их года рождения?

Оглавление

Об авторах

Алфутова Н. Б. — выпускница ФМШ № 18 и мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова, преподаватель школы им. А. Н. Колмогорова, кандидат физико-математических наук, в настоящее время — директор Центра дополнительного образования детей «Дистантное обучение» (`www.desc.ru`).

Егоров Ю. Е. — выпускник мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики школы им. А. Н. Колмогорова (`internat.msu.ru`), лауреат Премии фонда «Династия» в номинации «Наставник будущих учёных».

Устинов А. В. — преподаватель (а также выпускник) школы им. А. Н. Колмогорова и мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова, доктор физико-математических наук, в настоящее время — заведующий отделом теоретической и прикладной математики Хабаровского отделения Института прикладной математики ДВО РАН (`iam.khv.ru`).

Надежда Борисовна Алфутова
Юрий Евгеньевич Егоров
Алексей Владимирович Устинов

18 × 18
Вступительные задачи ФМШ при МГУ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 20.11.2013 г. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 13,5.
Тираж 2000. Заказ .

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.