ЛЕТНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДНАЯ ШКОЛА СУНЦ МГУ 2005

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 51(07)
ББК 22.1
Л52

Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке АНО «Школа нового поколения»

Л52 **Летняя математическая олимпиадная школа СУНЦ МГУ 2005.** — М.: МЦНМО, 2006. — 92 с.

ISBN 978-5-94057-283-1

Книга является сборником материалов Летней математической олимпиадной школы СУНЦ МГУ, проведенной в июне 2005 года. В качестве материалов представлены подробные содержания лекций и полная задачная база, использованная на семинарских занятиях.

Для школьников, студентов, преподавателей и руководителей кружков, а также всех, кто испытывает удовольствие от красивых математических сюжетов и интересных задач.

ББК 22.1

ISBN 978-5-94057-283-1

© Кафедра математики СУНЦ МГУ, 2006.
© МЦНМО, 2006.

Вступление

1 Об ЛМОШ СУНЦ МГУ

Летняя школа — первая стадия трилогии, воплощение которой должно стать прочной системой эффективной подготовки школьников СУНЦ МГУ к олимпиадам. Три части этой подготовки —

- отбор школьников и получение ими начального запаса знаний и навыков (в Летней математической олимпиадной школе, впредь ЛМОШ);
- подготовка школьников в течение года (кружок собирается два раза в неделю, проводятся тренировочные олимпиады);
- участие школьников собственно в олимпиадах и турнирах (подробности на сайте кафедры математики СУНЦ МГУ).

ЛМОШ 2005 — вторая летняя олимпиадная математическая школа (первая состолась в 2004 году). Сроки проведения (с 13 по 23 июня) были обусловлены окончанием учебного года и проведением в других школах экзаменов у закончивших 9 класс.

ЛМОШ полностью проходит на базе СУНЦ МГУ: иногородние участники проживают в общежитии школы, занятия проходят в учебном корпусе, питание организовано в школьной столовой. Неотемлемой частью ЛМОШ являются насыщенная культурная программа (посещение театра, экскурсия на целый день), занятия спортом в свободное время (в том числе товарищеский футбольный матч учеников с преподавателями), а также прощальное чаепитие участников и преподавателей.

Для участия в ЛМОШ приглашаются учащиеся СУНЦ из числа закончивших 10 класс, наиболее зарекомендовавшие себя в занятиях кружка и выступлениях в различных олимпиадах и турнирах; девяти- и десятиклассники из числа сдававших вступительные экзамены в СУНЦ, имеющие наиболее значительные результаты выступления в олимпиадах. Кроме этого, приглашаются школьники, не принимавшие участие во вступительных экзаменах, но проявившие себя в олимпиадах или турнирах по математике и заинтересованные в продолжении обучения в СУНЦ МГУ. В конце Летней школы проводятся собеседования по математике и физике, по результатам которых школьник *может быть* зачислен в Школу Колмогорова.

Необходимо подчеркнуть уникальность контингента опытных педагогов, которые приняли участие в работе Летней школы в 2005 году. Хочется поблагодарить всех за самоотдачу и понадеятся, что в будущем этот коллектив будет только развиваться. Организационные моменты решались силами кафедры математики: воспитательной и организационной частями заведовал Пономарев А.А; по учебной (математической) части ответственным был Шарич В.З; общее кураторство над работой ЛМОШ осуществлялось директором СУНЦ МГУ Часовских А.А.

Особую благодарность мы хотим высказать спонсорам. Благодаря выделяемым средствам Летняя школа продолжает быть полностью бесплатной для участников, которые оплачивают только дорогу от места проживания до Москвы и обратно. Для многих талантливых детей финансовый вопрос — единственное препятстсвие на пути к достижению высоких результатов, и наши совместные старания позволяют этот вопрос приблизить к счастливому разрешению. В 2005 году спонсорскую поддержку оказали **Международ-**

ная Программа образования в области точных наук (ДДФ Фаундейшн) и **АНО “Школа нового поколения”**.

В качестве напутствия хочется несколько пояснить, что представляет собой данная книга и как ею лучше пользоваться. В появлении на свет данного сборника материалов так или иначе участвовали сами преподаватели. Некоторые смогли прислать по электронной почте конспекты своих занятий (за это им огромное спасибо); остальные оказывали консультационную помощь в написании соответствующих текстов. Что касается содержимого, здесь, во–первых, представлены многие важнейшие понятия, задачи, теоремы из нескольких разделов элементарной и олимпиадной математики. Во–вторых, краткие содержания обзорных лекций позволяют в некоторой степени проникнуться атмосферой современных достижений и открытых проблем в математике и педагогике и методов их решения. Наконец, это издание осуществляет важные функции освещения существования и систематизации материалов такого своеобразного и во многом оригинального явления, как Летняя олимпиадная школа СУНЦ МГУ. Основной недостаток этого сборника — отсутствие решений к задачам. Но учебный характер предложенных вниманию читателя конспектов делает данный изъян незаметным.

Мы надеемся, что каждый получит удовольствие и извлечет пользу от знакомства с данной книгой.

Руководители кружка
“ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА”
ассистент кафедры математики Шарич В.З.
ассистент кафедры математики Пономарев А.А.

2 Участники Летней математической олимпиадной школы

В 2005 году мы пригласили следующих наших учащихся, окончивших 10 класс:

1. Кубасов Роман
2. Казначеев Андрей
3. Майоров Денис
4. Гарин Павел
5. Климовский Арсений
6. Лупанов Антон
7. Мудрова Кристина
8. Уланов Максим
9. Щигорцов Игорь

Так как параллельно в СУНЦ МГУ проходила Летняя информатическая олимпиадная школа, то Климовский Арсений и Лупанов Антон присутствовали на занятиях только частично, а остальное время принимали участие в занятиях по информатике.

Также в ЛМОШ были школьники, не учившиеся до того момента в СУНЦ МГУ, но поступившие или поступавшие и имевшие заметные достижения на олимпиадах или продемонстрировавшие свои способности иным образом:

1. Михайлов Дмитрий
2. Ерпылев Алексей
3. Вылегжанин Евгений
4. Микушкин Марат
5. Янчиков Михаил
6. Бородинов Николай
7. Дорджиева Айса
8. Добровольский Анатолий
9. Крашенинникова Алина
10. Кулибаба Мария
11. Королькова Анна

По итогам собеседования Крашенинникова Алина была зачислена для обучения в 10 классе физико-математического отделения СУНЦ МГУ.

3 Преподаватели

Вавилов Валерий Васильевич,
выпускник Механико–математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (1968 г.), кандидат физико–математических наук (1978 год), доцент МГУ с 1987 года; в течение более чем 15 лет входил в состав предметного жюри Всесоюзной математической олимпиады школьников и являлся заместителем председателя методической комиссии Центрального олимпиадного оргкомитета Министерства образования, 5 лет являлся научным руководителем команды страны на Международных математических олимпиадах; в настоящее время доцент Кафедры математики СУНЦ МГУ.

Гашков Сергей Борисович,
выпускник Школы Колмогорова (1971 г.), профессор механико–математического факультета МГУ (кафедра Дискретной математики), доктор физико–математических наук, победитель международной математической олимпиады.

Герман Олег Николаевич,
выпускник Механико–математического факультета МГУ (2001 г.), ассистент Кафедры теории чисел Механико–математического факультета МГУ, кандидат физико–математических наук.

Дубровский Владимир Натанович,
выпускник Школы Колмогорова (1967 г.), доцент Кафедры математики СУНЦ МГУ. В школе–интернате имени А.Н.Колмогорова работает с 1969 года. Заместитель заведующего Кафедры математики. С 1980 года является членом редколлегии журнала «Квант», с 1990 по 1997 год — редак-

тор по математике журнала «Quantum». Председатель Фонда памяти А.Н.Землякова. Учредитель и член клуба ФМШ. Кандидат физико–математических наук.

Иванова Елена Юрьевна,
выпускница Школы Колмогорова (1985 г.), выпускница Механико–математического факультета МГУ (1990 г.), преподаватель Лицея “Вторая школа”.

Пономарев Алексей Александрович,
выпускник Школы Колмогорова (1998 г.), выпускник Механико–математического факультета МГУ (2003 г.), ассистент Кафедры математики СУНЦ МГУ.

Русаков Александр Александрович,
академик Академии информатизации образования Российской Федерации. Выпускник Механико-математического факультета МГУ; кандидат физико–математических наук; профессор ТПГУ; с.н.с. Института космических исследований РАН; более четверти века проработал в Школе Колмогорова, с 1982 по 1989 год Б.М. Ивлев и А.А. Русаков руководили кружком “Олимпиадные задачи”; доцент, заместитель заведующего кафедры математики СУНЦ МГУ.

Скопенков Аркадий Борисович,
выпускник Школы Колмогорова (1989 г.), выпускник Механико–математического факультета МГУ, доцент Кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета МГУ, доктор физико–математических наук, победитель международной математичекой олимпиады.

Спиридонов Сергей Викторович,
студент Механико–математического факультета МГУ, победитель международной математической олимпиады.

Устинов Алексей Владимирович,
выпускник Школы Колмогорова (1990 г.), доцент Кафедры теории чисел Механико–математического факультета МГУ, кандидат физико–математических наук.

Часовских Анатолий Александрович,
выпускник Механико–математического факультета МГУ (1982 г.), доцент Кафедры математической теории интеллектуальных систем Механико–математического факультета МГУ. Директор Специализированного учебно-научного центра МГУ им. М.В. Ломоносова. Кандидат физико–математических наук.

Чубариков Владимир Николаевич,
выпускник Школы Колмогорова (1969 г.), профессор механико–математического факультета МГУ (кафедра Математического анализа), доктор физико–математических наук, заместитель декана Механико–математического факультета МГУ.

Шарич Владимир Златкович,
выпускник Школы Колмогорова (2000 г.), выпускник Механико–математического факультета МГУ (2005 г.), ассистент Кафедры математики СУНЦ МГУ.

Шарыгин Георгий Игоревич,
выпускник Механико-математического факультета МГУ (1996 г.), сотрудник Института теоретической и экспериментальной физики, кандидат физико–математических наук, ассистент Кафедры математики СУНЦ МГУ.

Материалы учебных занятий

4 Расписание занятий

13	$9^{00} - 11^{00}$	$11^{00} - 14^{00}$	$15^{00} - 17^{00}$
	Заезд	ПИСЬМЕННАЯ ОЛИМПИАДА	Разбор задач
14	$9^{00} - 11^{00}$	$11^{00} - 14^{00}$	$15^{00} - 17^{00}$
	Спиридонов С.В. "Геометрические преобразования"	**Русаков А.А.** "Числа и многочлены"	**Шарич В.З.** "Выпуклость функций; неравенство Йенсена"
15	$9^{00} - 11^{00}$	$11^{00} - 14^{00}$	$15^{00} - 17^{00}$
	Чубариков В.Н. "Теория чисел"	**Дубровский В.Н.** "Комплексные числа и многочлены в геометрии"	**Шарыгин Г.И.** "Геометрические неравенства"
16	$9^{00} - 17^{00}$		
	Вавилов В.В., Устинов А.В., Герман О.Н. "Разные задачи — материалы жюри международных олимпиад"		
17	$9^{00} - 12^{00}$	$12^{00} - 14^{00}$	$15^{00} - 17^{00}$
	Устинов А.В. "Системы линейных уравнений"	**Герман О.Н.** "Цепные дроби — геометрический подход"	**Гашков С.Б.** "Комбинаторика"
	Посещение театра (**театр "Сфера" : "Дон Хуан"**)		
18	$10^{00} - 14^{00}$		$15^{30} - 20^{00}$
	Решение задач МАТЕМАТИЧЕСКОГО БОЯ		МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ
19	ВЫХОДНОЙ: поездка по чеховским местам. Музей–усадьба А.П. Чехова "Мелехово".		
20	$9^{00} - 14^{00}$		$15^{00} - 17^{00}$
	Часовских А.А. "Дискретная геометрия"	**Часовских А.А.** "Уравнения Пелля"	**Иванова Е.Ю.** "Математические игры"
21	$9^{00} - 11^{00}$	$11^{00} - 14^{00}$	$15^{00} - 17^{00}$
	Устинов А.В. "Производящие функции"	**Иванова Е.Ю.** "Математические игры"	**Скопенков А.Б.** "Непрерывность" (Математический семинар)
	(вечер) **Русаков А.А.** "ФМШ №18 — ещё одно открытие академика Колмогорова"		
22	$9^{00} - 14^{00}$		$15^{00} - 17^{00}$
	УСТНАЯ ОЛИМПИАДА		Разбор задач
23	$9^{00} - 11^{00}$	$11^{00} - 14^{00}$	$15^{00} - 17^{00}$
	МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРУСЕЛЬ	Подведение итогов	Отъезд

5 Проективные преобразования

Преподаватель: **Спиридонов Сергей Викторович**

Количество академических часов: **2**

Форма занятия: **лекционно–семинарская**

Определение. Пусть α_1 и α_2 — две плоскости в пространстве, l — прямая, не параллельная ни одной из этих плоскостей. *Параллельным проектированием* плоскости α_1 на плоскость α_2 относительно направления l называют отображение, которое точке A плоскости α_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой l_2, параллельной l и проходящей через A, с плоскостью α_2.

Определение. Пусть α_1 и α_2 — две плоскости в пространстве, O — точка, не лежащая ни на одной из этих плоскостей. *Центральным проектированием* плоскости α_1 на плоскость α_2 с центром O называют отображение, которое точке A_1 плоскости α_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой OA_1 с плоскостью α_2.

Определение. Прямую, на которой не определено центральное проектирование, называют *исключительной прямой* данной проекции.

Упражнение. Центральным проектированием можно перевести прямые в параллельные.

Упражнение. Центральным проектированием можно перевести четырёхугольник в параллелограмм.

1. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения прямых AB и CD, BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках M и N, прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках P и Q, соответственно. Тогда прямые PN, MQ и EF пересекаются в одной точке.

2. Теорема Паппа. Точки C и C' лежат на прямых AB и $A'B'$, соответственно. Тогда три точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой.

3. (а) Диагонали и боковые стороны трапеции пересекаются в точках P и Q, соответственно. Тогда прямая PQ пересекает основания трапеции в их серединах. **(б)** Даны две параллельные прямые и точки A, B на одной из них. Постройте одной линейкой середину отрезка AB.

Определение. Отображение плоскости α на плоскость β будем называть *проективным отображением*, если оно является композицией центральных проектирований и аффинных преобразований плоскости. Если $\alpha = \beta$, то отображение будем называть *проективным преобразованием.*

Упражнение. Проективным преобразованием можно перевести любой выпуклый четырехугольник в квадрат.

4. Теорема Дезарга. Прямые a, b, c пересекаются в одной точке O. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вершины A_1 и A_2 лежат на прямой a, B_1 и B_2 — на прямой b, C_1 и C_2 — на прямой c. A, B, C - точки пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2, A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

5. (а) Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее окружность в окружность, а данную точку (внутри окружности) — в центр образа.

(б) Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее окружность в окружность, а данную прямую (не пересекающую окружности) — в бесконечно удаленную.

(в) Прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения диагоналей.

6. Теорема Брианшона. $ABCDEF$ — описанный шестиугольник. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.

7. Теорема Паскаля. $ABCDEF$ — вписанный шестиугольник. Докажите, что точки пересечения прямых AE и BF, BD и CE и AD и CF лежат на одной прямой.

8. *Диаметром* окружности ω относительно прямой l, не пересекающей ω, назовём отрезок, соединяющий 2 точки касания касательных к ω, опущенных из какой-либо точки на l. Докажите, что все диаметры пересекутся в одной точке C.

Определение. Пусть дана единичная окружность ω с центром в точке O. *Полярой* точки A назовем прямую, перпендикулярную OA и содержащую образ A при инверсии относительно ω.

9. (а) Докажите, что если точка A лежит на поляре точки B, то точка B лежит на поляре точки A. **(б)** Докажите, что в задаче № 8 прямая l является полярой к точке C.

Определение. Введённое нами преобразование прямых в точки и наоборот называется *двойственным* отображением.

Упражнение. Если на множестве прямых и точек выполнено соотношение, выражающееся через свойства инцидентности (принадлежности точек прямым), то для двойственного множества данное соотношение так же выполнено.

Упражнение. Сформулируйте задачи, двойственные задачам №№ 4, 2, 6, 7.

10. Дана коника ω. O — произвольная точка плоскости. Проведены всевозможные хорды AB коники, проходящие через O. Для каждой хорды отмечена точка пересечения касательных к ω в её концах. Докажите, что ГМТ этих точек — прямая.

11. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. P — точка пересечения AB и CD, Q — точка пересечения прямых AD и BC, R — точка пересечения касательных к окружности в точках A и C, S — точка пересечения касательных в точках B и D. Докажите, что P, Q, R и S лежат на одной прямой.

6 Числа и многочлены

Преподаватель: **Русаков Александр Александрович**

Количество академических часов: **3**

Форма занятия: **лекционно-семинарская**

Кольцом многочленов $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ формально называется множество последовательностей $(a_0; a_1; a_2; \ldots; a_n; 0; 0; \ldots)$, где элементы $a_0; a_1; a_2 \ldots$ принадлежат некоторому (числовому) множеству $\mathbb{K}$, а на последовательностях определены операции сложения и умножения естественным образом:

$$\begin{aligned}
&a = (a_0; a_1; a_2; \ldots; a_n; 0; 0; \ldots)\\
&b = (b_0; b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; 0; \ldots)\\
&a + b = (a_0 + b_0; a_1 + b_1; \ldots)\\
&a \cdot b = (a_0b_0; a_0b_1 + a_1b_0; a_0b_2 + a_1b_1 + a_0b_2; \ldots)
\end{aligned}$$

По сути речь идет о выражениях вида

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

(x — переменная). Возможность производить арифметические действия над многочленами делает их очень похожими на числа, хотя некоторые аналогии проводить довольно сложно. Так, оказывается, что в силу функциональной аргументации вместо "степени" для числа n нужно рассматривать натуральный логарифм n, т.е. $\ln n$. Под *функциональной аргументацией* здесь мы подразумеваем следующее сходство между числами и многочленами:

(i) любое натуральное число n единственным образом (с точностью до перестановки множителей) раскладывается в произведение простых чисел $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$. При этом

$$\ln n = \alpha_1 \ln p_1 + \alpha_2 \ln p_2 + \ldots$$

(ii) любой многочлен $Q(x)$ степени > 1 единственным образом (с точностью до перестановки множителей) раскладывается в произведение неприводимых многочленов $Q(x) = q_1(x)^{\alpha_1} q_2(x)^{\alpha_2} \dots q_k(x)^{\alpha_k}$. При этом

$$\deg Q = \alpha_1 \deg q_1 + \alpha_2 \deg q_2 + \dots$$

Некоторые вопросы легче решаются для многочленов, нежели для чисел. Самый яркий пример — **Великая теорема Ферма**.

1. ВТФ для чисел. Не существуют натуральные числа a, b, c, n, $n > 2$, такие что $a^n + b^n = c^n$.

2. ВТФ для многочленов. Не существуют взаимно простые многочлены с действительными (комплексными) коэффициентами $f(x), g(x), h(x)$ положительной степени, такие что при некотором натуральном $n > 2$ справедливо $f(x)^n + g(x)^n = h(x)^n$.

ВТФ для многочленов можно доказать при помощи **теоремы Мейсона-Стотерса**: если f, g, h — взаимно простые многочлены, удовлетворяющие соотношению $f + g = h$, то

$$\max(\deg f, \deg g, \deg h) \leqslant n_0(fgh) - 1,$$

где $n_0(\cdot)$ — количество различных комплексных корней многочлена в скобках. Аналогичное утверждение для чисел неверно: не всегда $\max(|a|, |b|, |c|) \leqslant n_0(abc)$, где $n_0(x)$ — это число с теми же простыми делителями, что имеются у x, но свободное от квадратов. (Например, $n_0(14) = 14$, $n_0(18) = 6$.) Утверждение, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon)$, такая что

$$\max(|a|, |b|, |c|) \leqslant C(\varepsilon) n_0(abc)^{1+\varepsilon},$$

известное как **гипотеза** abc, еще не доказано, а было выдвинуто Массером и Остерле в 1986 году. Это утверждение является более сильным, чем Великая теорема Ферма, поскольку ВТФ следует из abc–гипотезы, но не наоборот.

6.1 Задачи

1. При каких $x \in \mathbb{N}$ значения многочлена $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ будут простыми числами?

Ответ: $x = 1$.

Дело в том, что $P(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

2. Решить неравенство

$$2005(x-1)^4 - \sqrt{1-(x-1)^2} + x^2 \leqslant 2(x-1).$$

Ответ: $x = 1$.

Идея решения. Перепишем неравенство в виде

$$\underbrace{2005(x-1)^4}_{a} + \underbrace{\left(1 - \sqrt{1-(x-1)^2}\right)}_{b} + \underbrace{(x-1)^2}_{c} \leqslant 0.$$

Сумма трех неотрицательных слагаемых a, b, c не превосходит нуля только в случае, когда все три равны нулю. ■

3. Дано число: $A = \left(\dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m$, m, n — натуральные, большие 1. Доказать, что $\exists k \in \mathbb{N}$: $A = \dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$.

Идея решения. Рассмотрим уравнение $x + {}^1\!/_x = n$, где $n \in \mathbb{N}$. Это уравнение является квадратным: $x^2 - nx + 1 = 0$. Его корни равны

$$x_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n^2-4}}{2}$$

и, так как $n > 1$, то $x_1 \geqslant 1 \geqslant x_2$.

Если число $x + {}^1\!/_x = n$ целое, то число $x^m + {}^1\!/_{x^m} = k$ — тоже целое. Докажем это индукцией по степени m. База индукции: $x + {}^1\!/_x = n$; $x^2 + {}^1\!/_{x^2} = n^2 - 2 \in \mathbb{Z}$. Переход индукции:

$$x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} = \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) \in \mathbb{Z}\,.$$

Так как $x_1 \geqslant 1$, то $x_1^m \geqslant 1$, а следовательно,

$$\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m = x_1^m = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

■

4. Найти длину периода дроби ${}^1\!/_{49}$.

Ответ: $n = 42$. **Идея решения.** Поскольку число ${}^1\!/_{49}$ рациональное, его разложение в десятичную дробь периодично. Натуральное число n является длиной периода числа $\alpha \in \mathbb{Q}$ в том и только в том случае, когда n — наименьшее число, такое что $10^k\,(10^n - 1)\,\alpha \in \mathbb{N}$ при некотором целом $k \geqslant 0$. Так как 49 и 10 взаимно простые, нужно найти $\min(n \in \mathbb{N}\colon 10^n - 1 \,\vdots\, 49)$.

По теореме Ферма имеем, что $10^6 - 1 \,\vdots\, 7$. Перебором убеждаемся, что 6 — наименьшая степень числа 10, сравнимая с $1 \pmod 7$. Следовательно, если $10^n - 1 = 9 \cdot \underbrace{11..11}_{n} \,\vdots\, 7$, то $n \,\vdots\, 6$. (Из этого, в частности, следует, что длина периода дроби ${}^1\!/_7$ равна 6.)

Пусть $n = 6k$. Запишем

$$10^{6k} - 1 = 9 \cdot 7 \cdot 15873 \cdot \underbrace{1000001000001\ldots01}_{k \text{ единиц}}.$$

Число 15873 не делится на 49, поэтому задача равносильна такой: при каком наименьшем $k \in \mathbb{N}$ число $\underbrace{1000001000001\ldots01}_{k \text{ единиц}}$ делится на 7.

Исследуя остатки от деления степеней 10 на 7, получаем, что $k = 7$. ■

7 Неравенство Йенсена

Преподаватели:
Шарич Владимир Златкович
Пономарев Алексей Александрович

Количество академических часов: **2**

Форма занятия: **лекционно–семинарская**

Всюду в дальнейшем M — выпуклое подмножество $\mathbb{R}$.

Определение. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой* на M, если $\forall x, y \in M \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Для понимания необходимо уяснить, для чего нужна в определении выпуклость множества M. Если же сейчас это не ясно, см. задачу №9.

1. Докажите по определению, что следующие функции выпуклые:
(а) $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a > 0$; **(б)** $f(x) = 1/x$;
(в) $f(x) = |x|$; **(г)** $f(x) = -\sqrt{x}$.

Иногда выпуклые функции называют *выпуклыми вниз*. Поэтому мы дадим

Определение.
Надграфиком функции $f : M \to \mathbb{R}$ называется подмножество плоскости

$$\Gamma_+(f) = \{(x, y) : y \geqslant f(x), x \in M\}.$$

2. Докажите, что функция выпуклая тогда и только тогда, когда её надграфик — выпуклое множество.

Определение и свойства *выпуклых вверх* (иначе: *вогнутых*) функций могут быть выведены из аналогичных свойств выпуклых функций. Для этого нужно вместо функции f рассмотреть функцию $-f$. Поэтому всюду в дальнейшем будем рассматривать только выпуклые функции.

3. Предположим, что функция $f : M \to \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению

$$\forall x, y \in M \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(а) Докажите, что если f непрерывна, то она выпукла.
(б)* Постройте пример разрывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. Достаточное условие выпуклости. Пусть непрерывная функция $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема на интервале (c, d). Тогда

$$\forall x \in (c, d) \;\; f''(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f \text{ выпукла на отрезке } [c, d].$$

5. Найдите области выпуклости и вогнутости следующих функций:
(а) $f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x,\ f(x) = e^x$;
(б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
(в) $f(x) = -\ln x, f(x) = x^n,\ f(x) = -\sqrt[n]{x}$; **(г)** $f(x) = x^x$.

6. Докажите, что выпуклая на интервале (c, d) функция непрерывна.

7.* Докажите, что выпуклая на интервале (c, d) функция имеет односторонние производные в любой точке интервала (c, d).

8. Дайте определение выпуклости множества $M \subset \mathbb{R}^n$. Пусть M — произвольное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Дайте определение выпуклости функции $f : M \to \mathbb{R}$.

9. Пусть $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ — векторы на плоскости с общим началом O. Опишите множество

$$\left\{A : \overrightarrow{OA} = \lambda_1\overrightarrow{x_1} + \lambda_2\overrightarrow{x_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{x_n}\right\}_{\substack{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \geqslant 0,\\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n = 1.}}$$

10. Неравенство Йенсена. Пусть функция $f : M \to \mathbb{R}$ выпукла на M. Тогда для произвольных $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geqslant 0$, таких что $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, справедливо неравенство

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n) \leqslant \lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\dots+\lambda_nf(x_n).$$

11. Докажите неравенство Йенсена.

Задачи №№ $12, 13, 14, 15$ требуется решить, используя неравенство Йенсена.

12. Докажите при $x, y \geqslant \sqrt{2}$ неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \geqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+x^2+y^2}}.$$

13. Даны числа $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Докажите неравенства

(а) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i} \geqslant \frac{n}{2n-1}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$.

14. $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство

$$(ac+bd)^n(ad+bc)^n \leqslant (a+b)^n(c^n+d^n).$$

15.* Действительные числа удовлетворяют $x^2+y^2+z^2 = 1$. Докажите, что

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}\,.$$

7.1 Неравенства между средними

Определение. *Набором весов* λ называется набор чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqslant 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

16. Докажите неравенство между взвешенными средними арифметическим и геометрическим с весами λ:

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$$

Указание. Проверьте выпуклость функции $f(x) = -\ln x$.

Определение. *Взвешенное среднее с весами* λ *и показателем* $p \neq 0$ для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ — это

$$\mathfrak{M}_p(\lambda, x) = (\lambda_1 x_1^p + \lambda_2 x_2^p + \cdots + \lambda_n x_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. *Взвешенное среднее геометрическое с весами* λ для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ — это

$$\mathfrak{G}(\lambda, x) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

17. Докажите, что при $p_1 < p_2$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{M}_{p_1}(\lambda, x) \leqslant \mathfrak{M}_{p_2}(\lambda, x).$$

18. Докажите, что при $p \to 0$ $\quad \mathfrak{M}_p(\lambda, x) \to \mathfrak{G}(\lambda, x)$.

8 Теория чисел

Преподаватель: **Чубариков Владимир Николаевич**

Количество академических часов: **2**

Форма занятия: **лекционная**

Одно из основных мест в теории чисел занимет понятие *простого числа* — натурального числа, которое не имеет натуральных делителей кроме себя самого и единицы. Таковы, например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Мультипликативный аспект теории простых чисел решается **основной теоремой арифметики**: любое натуральное число, большее 1, представляется в виде произведения простых чисел единственным образом с точностью до перестановки множителей.

Аддитивный аспект теории простых чисел оказывается гораздо более трудным. Это неудивительно, учитывая мультипликативную природу определения. Например, остается открытой проблема *простых чисел близнецов*: конечно или бесконечно количество простых чисел p таких, что $p + 2$ — тоже простое число?

Методы, привлекаемые в теории чисел, затрагивают почти все классические разделы математики. Например, для доказательства **теоремы Дирихле** (о том, что в любой арифметической прогрессии с первым членом $a \in \mathbb{N}$ и разностью $d \in \mathbb{N}$, причем a и d взаимно просты, содержится бесконечно много простых чисел), требуются средства комплексного анализа: нужно рассматривать *ряды Дирихле*

$$L_m(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

где χ — характер по модулю m, т.е. комплекснозначная функция $\chi\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, такая что

(i) $|\chi(n)| = 1$;

(ii) если $x - y \,\vdots\, m$, то $\chi(x) = \chi(y)$;

(iii) $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$;

(iv) $\chi(x) = 0 \Leftrightarrow x$ и m не взаимно просты.

Как известно, существует ровно $\varphi(m)$ характеров по модулю m.

Еще более сложными являются вопросы о простых числах смешанного вида, каким образом определяются, к примеру, *простые числа Ферма*: $2^n + 1$.

Если число n — составное, то $n = ab, a$ — нечетный простой делитель и

$$2^n + 1 = \left(2^b\right)^a + 1 = \left(2^b + 1\right)\left(2^{b(a-1)} - 2^{b(a-2)} + \cdots + 1\right),$$

так что в этом случае число $2^n + 1$ не может быть простым, если существует нечетный простой делитель, больший единицы.

Таким образом, если $2^n + 1$— простое, то $n = 2^m, m \geqslant 0$. Число $F_m = 2^{2^m} + 1$ при $m \geqslant 0$ называется *числом Ферма.* Имеем, что первые пять чисел $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ являются простыми. В 1732 г, Л. Эйлер показал, что $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$.

В настоящее время найдено много составных чисел Ферма, но простых чисел Ферма, хроме F_0, F_1, F_2, F_3 не найдено. Поэтому в противоположность гипотезе Ферма утверждается, что простых чисел Ферма конечное число. Было бы интересно доказать, что

$$\frac{\pi_F(x)}{x} \to 0 \text{ при } \quad x \to \infty,$$

где $\pi_F(x)$ — количество простых чисел Ферма F_n при $n \leqslant x$.

Как показал Гаусс, простые числа Ферма тесным образом связаны с построением циркулем и линейкой правильных n-угольников. Он перечислил все такие n,меньшие 300 (их простые делители суть 2,3,5,17): $n = 2$, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272.

Еще более сложной задачей является описание всех простых чисел p, имеющих в своей записи в двоичной системе счисления в точности 3 единицы, т.е. $p = 2^n + 2^m + 1$.

В 1968 г. А.О. Гельфонд доказал, что в арифметической прогрессии находится асимптотически поровну чисел с четным и нечетным числом единиц в записи в двоичной системе счисления. Аналогичный вопрос о простых числах с четным и нечетным числом единиц в натуральном ряде чисел еще ждет своего решения.

Н.П. Романов доказал следующую изящную теорему. Пусть $g > 2$. Тогда числа n вида $p + g^m$, где p пробегает все простые числа, m — все натуральные, имеют положительную плотность, т.е. количество таких чисел $n < x$ будет превосходить cx, где $c > 0$ — некоторая постоянная.

С другой стороны, Ван дер Корпут и Эрдёш доказали, что существует прогрессия, состоящая из нечетных чисел, которая не содержит ни одного числа вида $p + 2^m$.

В 1937 г. И.М. Виноградов вывел асимптотическое выражение для числа представлений нечетного $N > 0$ в форме $N = p_1 + p_2 + p_3$, из которого непосредственно следует, что всякое достаточно большое нечетное число можно представить в виде суммы трех простых чисел. Это есть полное решение **проблемы Гольдбаха** для нечетных чисел.

Бинарная проблема Эйлера – Гольдбаха о представимости четного числа в виде суммы двух простых чисел еще не решена. Прекрасный результат в направлении решения этой проблемы получил Чен Джун-ран: каждое достаточно большое четное число представимо в виде суммы простого и числа, состоящего из произведения не более двух простых.

9 Многочлены и комплексные числа в геометрии

Преподаватель: **Дубровский Владимир Натанович**

Количество академических часов: **3**

Форма занятия: **лекционно-семинарская**

Рассмотрим четыре примера интересных применений алгебры в геометрии.

В первых двух задачах используются формулы Виета, выражающие коэффициенты кубического уравнения через его корни.

1. Внутри треугольника ABC дана точка P. Лучи AP, BP, CP пересекают стороны треугольника BC, CA, AB в точках A', B', C'. Сумма площадей треугольников $AB'P$, $BC'P$, $CA'P$ равна половине площади всего треугольника ABC. Найти геометрическое место таких точек P.

Ответ. Это объединение медиан треугольника ABC.

Идея решения. Обозначим площади треугольников $AB'P$, $BC'P$, $CA'P$ через S_1, S_2, S_3, а площади трех остальных треугольников через S_1', S_2', S_3'. Можно доказать, что для любой из искомых точек P

$$\left\{\begin{array}{ccccc} S_1+S_2+S_3 & = & S_1'+S_2'+S_3' & = & \sigma_1; \\ S_1S_2S_3 & = & S_1'S_2'S_3' & = & \sigma_3; \\ S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1 & = & S_1'S_2'+S_2'S_3'+S_3'S_1' & = & \sigma_2. \end{array}\right.$$

(первое равенство следует из условия на точку P, второе и третье выводятся из соотношений вида

$$S_1 : S_1' = (S_2+S_2') : (S_3+S_3'),$$

где предполагается, что треугольники с площадями S_i и S_i' примыкают к одной и той же стороне $\triangle ABC$). Из выписанной системы уравнений следует, что набор площадей

$\{S_1, S_2, S_3\}$ совпадает с набором $\{S_1', S_2', S_3'\}$ (каждый из них – это набор корней уравнения $t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = 0$). Отсюда с помощью небольшого перебора случаев выводится, что P лежит на одной из медиан треугольника ABC. ■

2. Многочлен треугольника. Докажите, что длины сторон треугольника являются корнями уравнения

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + 4Rr + p^2)x - 4Rrp = 0,$$

где p — полупериметр, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника.

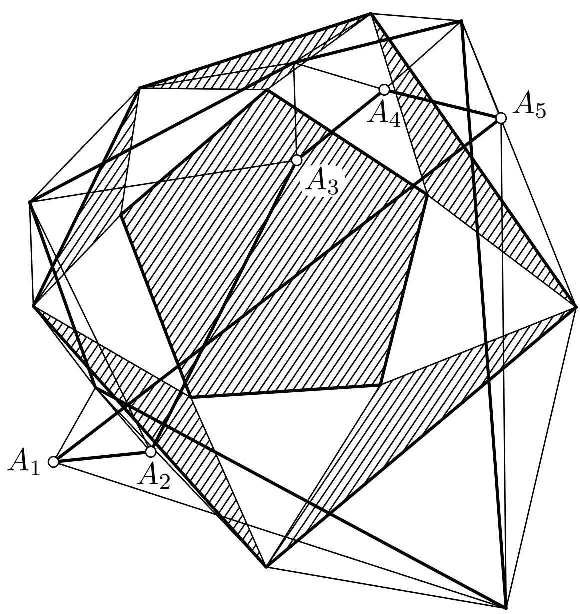
Теперь рассмотрим две теоремы, в доказательстве которых можно применить геометрическую интерпретацию комплексных чисел и, в частности, корней из единицы.

3. Теорема Наполеона. Центры правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника во внешнюю сторону, являются вершинами правильного треугольника.

Идея доказательства. Будем считать, что рассматриваемая фигура лежит на комплексной плоскости и рассматривать все точки как комплексные числа. Треугольник ABC является равносторонним и положительно ориентированным тогда и только тогда, когда $A + \tau B + \tau^2 C = 0$, где $\tau = e^{2i\pi/3}$. ■

4. Обобщенная теорема Наполеона (теорема Неймана-Дугласа). Рассмотрим замкнутую n-звенную ломаную $L_1 = A_1 \ldots A_n$. Последовательно построим ломаные L_2, L_3, …, L_{n-1}. Вершинами ломаной L_2 являются вершины B_1, B_2, …, B_n равнобедренных треугольников $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, …, построенных на звеньях ломаной L_1 как на основаниях так, что углы $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, … равны $2\pi/n$ и положительно ориентированы. Аналогично, на звеньях ломаной L_2 строятся равнобедренные треугольники с углами $4\pi/n$ при вершинах, также ориентированными положительно. Ломаная L_{k+1} задается вершинами равнобедренных треугольников с углами $\alpha_k = 2\pi k/n$ при вершине, построенными на звеньях ломаной L_k. Тогда ломаная L_{n-1} является правильной, т.е. правильным многоугольником или правильным звездчатым многоугольником.

Комментарий. При построении L_{k+1} в случае $\alpha_k > \pi$ фактически берутся равнобедренные треугольники, у которых углы при вершине ориентированы отрицательно и равны по величине $2\pi - \alpha_k$, а при $\alpha_k = \pi$ вершины ломаной L_{k+1} являются серединами звеньев L_k.



10 Геометрические неравенства

Преподаватель: **Шарыгин Георгий Игоревич**
Количество академических часов: **2**
Форма занятия: **лекционно–семинарская**

---

1. Докажите, что в любом треугольнике выполнено неравенство $p \geqslant {}^3\!/_2\sqrt{6Rr}$, где p — полупериметр, а R и r радиусы описанной и вписанной окружности соответственно.

2.* Доказать, что для любого треугольника выполнены неравенства (обозначения те же, что и в предыдущей задаче) $9r(4R+r) \leqslant 3p^2 \leqslant (4R+r)^2$.

3. Пусть h_a, h_b и h_c — высоты, опущенные на стороны a, b и c некоторого треугольника, r_a, r_b и r_c — радиусы соответствующих вневписанных кругов. Докажите, что ${}^{r_a}\!/_{h_a} + {}^{r_b}\!/_{h_b} + {}^{r_c}\!/_{h_c} \geqslant 3$, причем равенство достигается только для правильного треугольника.

4. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника ABC, M — произвольная точка на плоскости. Чему равно минимальное возможное значение выражения $MA^2 + MB^2 + MC^2$?

5. На плоскости проведена окружность радиуса r с центром в начале координат. Докажите, что найдется точка с целочисленными координатами, расстояние от которой до ближайшей к ней точки окружности не превосходит $2/\sqrt{r}$.

6.* Какова наибольшая площадь правильного треугольника, который можно покрыть тремя правильными треугольниками со стороной 1?

7. Можно ли покрыть тремя единичными квадратами квадрат со стороной 5/4?

8.* Даны два треугольника с общей стороной. Докажите, что расстояние между центрами вписанных в них окружностей меньше, чем расстояние между несовпадающими вершинами.

9.* Найдите треугольник наименьшей площади, которым можно покрыть любой треугольник со сторонами, не превосходящими 1.

10. Выпуклый многоугольник, площадь которого больше 0,5, помещен в квадрат со стороной 1. Докажите, что внутри многоугольника можно поместить отрезок длины 0,5, параллельный стороне квадрата.

11. Внутри квадрата со стороной 1 даны n точек. Докажите, что: **(а)** площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках или вершинах квадрата не превосходит $1/(2n+2)$; **(б)** площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках не превосходит $1/(n-2)$.

12. Докажите, что площадь параллелограмма, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади треугольника.

13. Внутри квадрата со стороной 1 расположена несамопересекающаяся ломаная длины 1000. Докажите, что найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата, пересекающая эту ломаную по крайней мере в 500 точках.

14. Внутри квадрата со стороной 1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая все эти точки, длина которой не превосходит $2n$.

15. На отрезке длиной 1 дано n точек. Докажите, что сумма расстояний от некоторой точки отрезка до этих точек не меньше $n/2$.

16. В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть провод из точки A в точку B, расстояние между которыми равно l. Докажите, то для этой цели ему достаточно куска провода длиной $1,6l$.

17. Докажите, что замкнутую ломаную длины 1 можно поместить в круг радиуса 0,25.

11 Задачный калейдоскоп

Преподаватели:
Вавилов Валерий Васильевич
Устинов Алексей Владимирович
Герман Олег Николаевич
Количество часов: **7**
Форма занятия: **семинарская**

При формировании этого списка задач были использованы материалы жюри национальных математических олимпиад различных стран и международной олимпиады. Кроме того, были использованы материалы тренировочных олимпиад сборных команд нашей страны для участия в Международных школьных и студенческих олимпиадах и материалы конкурса по решению задач памяти А. Н. Колмогорова, проводимого в стенах нашей школы. Некоторые из приведенных задач могут стать началом самостоятельных научных исследований и служить основой подготовки докладов для участия в различных научных конференциях школьников.

11.1 Логические и комбинаторные задачи

1. (Из протокола Кишиневской гимназии за 1879 г.; обнаружила Б. П. Коварская — см. «Математика в школе», № 2, 1998.) Три мужа — Андрей, Иван и Степан пошли со своими женами — Анной, Екатериной и Ольгой за покупками. Каждый платил за каждую вещь по стольку рублей, сколько он купил вещей. Андрей купил больше Анны на 23 вещи, Иван — больше Екатерины на 11 вещей, а Степан — меньше Ольги на 23 вещи. Определить, кто на ком женат, если каждый из мужей израсходовал 63-мя рублями больше своей жены.

2. (а) Математик R сказал математикам P и S: «Я задумал два натуральных числа. Каждое из них больше единицы, а сумма их меньше 100. Математику P я сейчас сообщу (по секрету от S) произведение этих чисел, а математику S (по секрету от P) — их сумму».

Он выполнил обещанное и предложил отгадать задуманные числа. Между P и S произошел следующий диалог (высказывания P мы обозначаем буквой π с индексами, высказывания S — буквой σ):

— (π_1) Я, пожалуй, не могу сказать, чему равны задуманные числа.

— (σ_1) Я заранее знал, что Вы этого не сможете.

— (π_2) А ведь тогда я их знаю.

— (σ_2) А тогда и я их знаю.

Попробуйте теперь и вы отгадать задуманные числа.

(б) Начало условия этой задачи вплоть до (σ_1) — то же, что и в п. (а). Дальше диалог меняется:

— (π_2) А я заранее знал, что Вы это будете знать заранее.

— (σ_2) Я не знаю, чему равны задуманные числа.

— (π_3) А я тогда их знаю.

Найдите задуманные числа.

3. Совет директоров большой компании, состоящий из 15 человек, решил образовать из своих членов 20 комитетов. Можно ли сформировать эти комитеты так, что

— каждый член совета входит в 4 комитета;

— каждый комитет состоит из трех членов;

— нет двух комитетов, включающих более одного общего члена.

4. В тенисном турнире принимали участие 10 игроков. Каждый играл с каждым только один раз. В этом турнире если игрок i выигрывал партию у игрока j, то количество партий, который проиграл i плюс количество партий, которые выиграл j не меньше 8. Скажем, что три игрока i, j, k образуют нетипичную тройку игроков, если i выиграл у j, j

выиграл у k и k выиграл у i. Докажите, что в этом турнире участвовало ровно 40 нетипичных троек игроков.

5. На множестве действительных чисел введена новая операция $x\#y$ такая, что для любых x, y, z

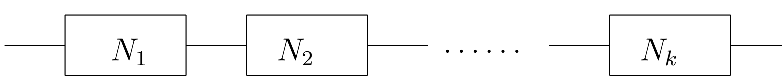
1) $(x+y)(x\#y) = x^2\#y^2$;
2) $x\#y = (x+z)\#(y+z)$;
3) $1\#0 = 1$.

Найти эту операцию (выразить через известные).

6. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число. Найти максимальное количество элементов в множестве M пар целых чисел (j,k), $1 \leqslant j < k \leqslant n$, удовлетворяющих условию: если $(j,k) \in M$, то $(k,m) \notin M$ при всех m.

7. Доказать, что по окончании волейбольного турнира с участием 2^n команд (в один круг) можно выбрать команды K_1, K_2,..., K_{n+1} так, что каждая из команд K_j, $j \leq n$, выиграла у всех команд K_{j+1}, ..., K_{n+1}.

8. Схема железнодорожного узла изображена на рисунке



Он состоит из k разъездов, в которых N_1, N_2, ..., N_k железнодорожных веток. Справа к узлу приближается состав из m локомотивов, которые могут двигаться только справа налево. При каком наибольшем m локомотивы при прохождении железнодорожного узла могут перестроиться в любом порядке? В любой ветке может поместиться любое количество локомотивов.

9. На бесконечном листе клетчатой бумаги (со стороной клетки 1) некоторые стороны клеток окрашены краской так, что из любого узла можно перейти в любой другой узел по окрашенным отрезкам, при этом отсутствуют замкнутые пути. Доказать, что существуют такие два соседних узла, что кратчайший путь из одного в другой по окрашенным линиям больше 1000.

10. В квадратной таблице $n \times n$ расставлены буквы так, что все строки таблицы различны. Докажите, что можно вычеркнуть один из столбцов таблицы так, что в полученной таблице $n \times (n-1)$ все стоки будут по прежнему различны.

11.2 Алгебра и теория чисел

11. Ученик, используя свои записи, должен был написать на доске шесть членов арифметической прогрессии, составленной из натуральных чисел. В итоге он написал только пять членов $113, 137, 149, 155, 173$; при этом ошибся при записи одного из этих пяти чисел. Можно ли восстановить все шесть членов прогрессии?

12. Двузначное число таково, что если его умножить на обе его цифры, то получится число с тремя одинаковыми цифрами. Найти все такие числа.

13. Найти все натуральные n, для которых число $n^4 + 4^n$ является простым. Что можно сказать о $n^{16} + 16^n$ и $n^k + k^n$?

14. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 2 = y, \\ y^2 - 2 = z, \\ z^2 - 2 = x. \end{cases}$$

15. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел x, y, z таких, что $x^3 + y^5 = z^7$.

16. Найти $x^2 + y^2 + z^2$, если натуральные числа x, y, z таковы, что $7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8$ и $16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3$.

17. Доказать, что ни одно из чисел вида

$$a_n = \underbrace{1001001\ldots1001}_{n \text{ единиц}} \qquad (n \geq 2),$$

не является простым.

18. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(x^3)+Q(x^3)$ делится на x^2+x+1. Доказать, что $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на $(x-1)$.

19. Для каждого $n \geqslant 3$ найти наименьшее число $f(n)$ со следующим свойством: при любом выборе подмножества $A \subset \{1,2,3,\ldots,n\}$ с $f(n)$ элементами в нем найдутся три попарно взаимно простых числа.

20. Решить систему уравнений ($a>0$)

$$\begin{cases} x_1|x_1| = x_2|x_2| + (x_1-a)|x_1-a|, \\ x_2|x_2| = x_3|x_3| + (x_2-a)|x_2-a|, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n|x_n| = x_1|x_1| + (x_n-a)|x_n-a|. \end{cases}$$

21. Известно, что уравнение $x^2+y^2-az^2-au^2=0$, где a — целое число, имеет ненулевое решение в целых числах. Доказать, что тогда и уравнение $x^2+y^2-az^2=0$ имеет ненулевое решение в целых числах.

22. Вычислить сумму $\operatorname{tg} 1\cdot\operatorname{tg} 2+\operatorname{tg} 2\cdot\operatorname{tg} 3+\ldots+\operatorname{tg}(n-1)\cdot\operatorname{tg} n$.

23. Найти все целые числа a, b, c, d такие, что

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a^2b^2c^2.$$

24. Найти наименьшее натуральное число n такое, чтобы числа $2n+1$ и $37n+1$ были квадратами некоторых чисел.

25. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — действительные числа. Составим десять сумм по три слагаемых в каждой: $x_1+x_2+x_3$, $x_1+x_2+x_4$, $\ldots$, $x_3+x_4+x_5$. Найти наименьшее число n со следующим свойством: если n из указанных сумм равны нулю, то $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$.

26. Дано 16 кубов с длинами ребер соответственно равных 1, 2, 3, …, 16. Разделить их на две группы так, чтобы в обеих группах были равны: суммарные объемы, суммы площадей боковых поверхностей, суммы длин всех ребер и количество кубов.

11.3 Анализ

27. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\{(5+\sqrt{24})^n\}$.

28. (VII Соровская олимпиада). Пусть γ — наибольший корень уравнения $x^3-3x^2+1=0$. Найти первые 100 знаков после запятой у числа γ^{1000}.

29. Уравнение $ax^2-bx+c=0$, где a — натуральное число, а b и c — целые числа, имеет два различных корня, которые расположены строго внутри интервала $(0;1)$. Доказать, что $a\geq 5$.

30. (И. И. Воронович, г. Минск). Найти все пары положительных чисел α и β, такие, что при любом натуральном n выполняется равенство $[\alpha[\beta n]]=n-1$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x.

31. Доказать, что для всех $n=2,3,\ldots$

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}}<3.$$

32. Для каждого натурального числа $n\geqslant 2$, найти функцию вида $f_n(x)=a_n+b_nx+c_n|x-D_n|$, где a_n, b_n, c_n, D_n зависят только от n и такую, что $f_n(k)=k+1$ для $k=1,2,3,\ldots,n-1$ и $f_n(n)=1$.

33. Можно ли подобрать 100 натуральных чисел так, чтобы разность двух любых из них равнялась наибольшему общему делителю этой пары чисел? (С.И.Токарев; см. «Математика в школе», № 2, 1998, задача 4310).

34. Найти все функции целого аргумента $f(x)$, которые при любых целых x и y удовлетворяют соотношению

$$f(x+y)+f(x-y)=f(2x).$$

35. Последовательность положительных действительных чисел a_1, a_2, $a_3, \ldots$ обладает следующим свойством:

$$a_n^2 \leq a_n - a_{n+1} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Доказать, что при любом n выполняется $a_n < 1/n$.

36. Найти все такие натуральные числа k, для каждого из которых выражение $\sin kx \cdot \sin^k x + \cos kx \cdot \cos^k x - \cos^k 2x$ не зависит от x.

37. Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство $(2n^2+3n+1)^n \geqslant 6^n (n!)^2$.

38. Доказать, что для любых действительных чисел a и b существует действительное число $c \in (0;1)$ такое, что

$$\left| ac + b + \frac{1}{c} \right| > \frac{1}{24}.$$

39. Доказать, что существует целое число n в пределах $1 \leqslant n \leq 800$, для которого $|\sin \sqrt{n}| < 1/100$.

40. Найти наименьшее значение величины

$$\max\{x_1+x_2+x_3, x_2+x_3+x_4, x_3+x_4+x_5, x_4+x_5+x_6, x_5+x_6+x_7\},$$

где все x_k — неотрицательные числа, сумма которых $= 1$.

41. Доказать, что положительные числа a, b, c, d всегда удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leq \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{d}\right)^b.$$

42. Рассмотрим числовую последовательность a_1, a_2, $\ldots$, где $a_0 = 1$ и $a_n = a_{[2n/3]} + a_{[n/4]}$ при всех $n \geqslant 1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

43. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что сумма любых нескольких членов этой последовательности не представляется в виде степени натурального числа с натуральным показателем, большим единицы?

44. Доказать, что для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из отрезка $[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \leq \frac{n^2}{2}.$$

45. Уравнение $x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет шесть действительных корней. Найти коэффициенты a, b, c, d.

46. Доказать, что существует число вида 5^n (n — натуральное), десятичная запись которого содержит 100 подряд идущих нулей.

47. Доказать, что для всех положительных x справедливо неравенство

$$\frac{1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}}{x + x^3 + \ldots + x^{2n-1}} \geq \frac{n+1}{n}.$$

48. Какие натуральные числа можно представить в виде

$$\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right],$$

где n — натуральное число?

49. Пусть $0 < \alpha < \pi$. Доказать, что

$$\sin\frac{\alpha}{6} + \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\frac{\alpha}{4}\right) < \frac{\alpha}{3}.$$

50. Доказать неравенство

$$\min_{i\leqslant j}(a_i - a_j)^2 \leq \frac{12}{n(n^2-1)}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2),$$

где a_1, a_2, …, a_n — произвольные действительные числа.

51. На прямой заданы n красных и n синих точек. Докажите, что сумма квадратов расстояний между точками одного цвета, не превосходит суммы квадратов расстояний между точками разного цвета.

52. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x) = \sup_y (xy - f(y)).$$

11.4 Геометрия (планиметрия)

53. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC касаются друг друга. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABD и CDB также касаются друг друга.

54. Ученик начертил четырехугольник $ABCD$ и измерил длины его сторон и диагоналей. Он получил следующие результаты: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 8$, $DA = 9$, $AC = 10$, $BD = 11$. Докажите, что его измерения неточны.

55. Точки D и E лежат на стороне BC треугольника ABC. Известно, что $BD = CE$ и то, что углы BAD и CAE равны. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

56. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE и точка O — точка их пересечения. На отрезках OA и OC взяты точки M и K соответственно так, что углы BMC и BKA — прямые. Докажите, что $BK = BM$.

57. Поместить внутри правильного шестиугольника со стороной 1 квадрат возможно больших размеров. Найти сторону этого квадрата.

58. Доказать, что на координатной плоскости не существует замкнутой ломаной с нечетным числом звеньев, у которой координаты всех вершин рациональны, а длина каждого звена равна 1.

59. Докажите, что правильный $2n$-угольник можно разрезать на ромбы.

60. Все вершины треугольника ABC имеют целые координаты, а строго внутри этого треугольника имеется ровно одна точка P с целыми координатами. Прямая AP пересекает NC в точке E. Найти наибольшее значение, которое может принимать отношение AP/PE.

61. Доказать, что на плоскости существует равноугольный шестиугольник, стороны которого равны 5, 8, 11, 14, 23 и 29 в некотором порядке.

62. На плоскости даны две точки, расстояние между которыми больше 1 км. При помощи только неразмеченной короткой линейки (с длиной меньше 20 см.) провести отрезок, соединяющий заданные точки.

63. Даны две непересекающиеся окружности с центрами O_1 и O_2. Построим окружность с центром на прямой O_1O_2, касающуюся двух первых внешним образом. Доказать, что третья окружность пересекает общие внутренние касательные к данным окружностям в четырех точках, являющихся вершинами четырехугольника, две стороны которого соответственно параллельны общим внешним касательным к данным окружностям.

64. Найти все простые четырехугольники такие, что на их сторонах и диагоналях можно расставить стрелки так, что сумма шести полученных векторов будет равна нулю.

65. Дан треугольник ABC. Точки D, E и F, отличные от вершин треугольника, лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Доказать, что если около четырехугольника

$AFDE$ можно описать окружность, то

$$4\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leq \left(\frac{EF}{AD}\right)^2.$$

66. Пусть ABC остроугольный треугольник и p — прямая, проходящая через его ортоцентр. Доказать, что три прямые, симметричные p относительно сторон треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

67. Какую наибольшую площадь имеет правильный треугольник, который можно покрыть тремя равносторонними треугольниками со сторонами 1?

68. Докажите, что круг не равносоставлен никакому многоугольнику.

69. На сторонах AB, BC и AC правильного треугольника ABC построены равнобедренные треугольники ABL, DCK и ACM, с углами при основаниях, равных, соответственно, $25°$, $20°$ и $15°$, а точки L, K и M лежат внутри треугольника ABC. Обозначим через R, Q, P — точки пересечения прямых AL и CK, BK и AM, CM и BL (также соответственно). Найти углы треугольника PQR.

70. Даны k равносторонних треугольников со сторонами $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/k$. Каково наименьшее число a, при котором все эти треугольники можно без наложений поместить в равносторонний треугольник со стороной a?

71. Доказать, что $d^2 + (b-a)^2 < c^2$, где d — диаметр вписанной в треугольник окружности и a, b, c — его стороны.

72. «Изобретатель»придумал прибор, позволяющий через любую данную точку плоскости провести прямую, делящую площадь данной фигуры пополам. При помощи этого прибора, циркуля и линейки

(а) разделить данный угол на три равные части.

(б) построить квадрат по площади равного площади данного круга.

73. На клетчатом листе бумаги нарисован квадрат со стороной 64, а в нем отмечено 62 квадрата со сторонами 1, 2, 3, ..., 63. Стороны всех отмеченных квадратов проходят по линиям клетчатого листа. Доказать, что хотя бы один из отмеченных квадратов содержит другой отмеченный квадрат.

74. . На острове зарыто некоторое число кладов, которые делят между собой несколько пиратов (все разной силы). Координаты кладов известны всем пиратам. Они договорились о том, что клад в данный момент принадлежит тому из пиратов, который находится к нему ближе остальных. Если несколько пиратов находятся на одинаковом расстоянии от клада, то клад достается наиболее сильному из них. Перед началом дележа каждому из них принадлежит хотя бы один клад. В первый момент времени каждый пират перемещается в такую точку острова, каждая координата которой является средним арифметическим соответствующих координат кладов, которыми данный пират владеет. В следующий момент каждый пират определяет какие клады принадлежат ему после перемещения и вновь перемещаются по тому же правилу, что и в первый момент. Если после очередного перемещения у одного из пиратов не оказалось ни одного клада, он выбывает из дележа. Доказать, что дележ закончится через конечное число перемещений.

75. На плоскости дан треугольник ABC. Если кузнечик находится в некоторой точке X, то ему разрешается прыгать только в точки, симметричные точке X относительно любой из прямых AB, BC или AC. Доказать, что из любой точки плоскости кузнечик может за конечное число прыжков заскочить внутрь треугольника ABC либо на его границу.

76. Стороны треугольника являются корнями уравнения третьей степени с целыми коэффициентами. Докажите, что высоты являются корнями уравнения шестой степени с целыми коэффициентами.

Обладают ли похожими свойствами медианы и биссектрисы?

77. Доказать, что не существует квадрата, вершины которого расположены на четырех концентрических окружностях (на каждой окружности — по одной вершине), радиусы которых образуют арифметическую прогрессию.

78. На плоскости расположено 100 точек так, что расстояние между любыми двумя из них не больше единицы. Каждые две из этих точек, удаленные друг от друга на расстояние больше чем $1/\cos 36^\circ$, соединяются отрезком. Доказать, что число проведенных отрезков не превосходит 3750.

79. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены равнобедренные треугольники APB, AQC и CRB ($AP = PB$, $AQ = QC$, $CR = RB$). Треугольники APB и AQC лежат вне треугольника ABC, а треугольник CRB расположен по ту же сторону от отрезка BC, что и треугольник ABC. Доказать, что четырехугольник $APRQ$ является параллелограммом.

80. Существует ли треугольник, который можно разрезать на три части по высоте и по биссектрисе, выходящих из одной вершины, из которых можно сложить другой треугольник?

81. При помощи циркуля и линейки построить окружность, касающуюся данной окружности S и проходящую через две точки A и B, расположенные внутри S.

11.5 Геометрия (стереометрия)

82. Пусть P — точка внутри тетраэдра $ABCD$. Прямые AP, BP, CP, DP пересекают противоположные грани тетраэдра в точках A', B', C', D' соответственно. Доказать, что точка P не может быть серединой более чем одного из отрезков AA', BB', CC', DD'.

83. Даны две сферы: S_A с центром A и S_B с центром B. Прямая p касается сферы S_A в точке A_1 и сферы S_B в точке B_1; прямая q касается сферы S_A в точке A_2 и сферы S_B в точке B_2. Доказать, что ортогональные проекции отрезков A_1A_2 и B_1B_2 на прямую ABB равны.

84. Куб разбит на конечное число прямоугольных параллелепипедов так, что объем шара, описанного около куба, равен сумме объемов шаров, описанных около параллелепипедов разбиения. Доказать, что все параллелепипеды являются кубами.

85. В тетраэдре $ABCD$ двугранный угол с ребром AB равен двугранному углу с ребром DA. Доказать, что $S_{ABD} = S_{BDC}$, $S_{ABC} = S_{ADC}$.

86. Имеются два тетраэдра, проекции которых на любую плоскость пространства являются многоугольниками с одинаковым числом вершин. Доказать, что эти тетраэдры равны.

87. Внутри сферы S с центром в точке O и радиусом R расположены точки A, B, C не лежащие на одной прямой так, что $OA \perp AB$, $OA \perp AC$. Через точки A, B, C проведены две сферы радиусов R_1 и R_2 касающиеся сферы S. Доказать, что $R_1 + R_2 = R$.

88. Четыре вершины куба, не лежащие в одной плоскости, имеют целые координаты в прямоугольной декартовой системе координат. Доказать, что координаты всех вершин куба — целые числа.

89. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V. На луче $[A, B)$ выбрана точка E такая, что $AE = 2AB$. Аналогично на лучах $[BC)$, $[CD)$, $[DA)$ отмечаются точки F, G, H. Найти объем тетраэдра $EFGH$.

12 Системы линейных уравнений

Преподаватель: **Устинов Алексей Владимирович**

Количество академических часов: **3**

Форма занятия: **лекционно–семинарская**

---

1. Метод Гаусса. Предположим, что имеется система из n линейных уравнений от переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Одним из возможных методов решения такой системы является метод Гаусса. Он заключается в том, что с помощью первого уравнения переменная x_1 исключается из остальных уравнений. Затем с помощью нового второго уравнения переменная x_2 исключается из всех следующих уравнений. И так далее, пока из последнего уравнения не получится значение последней переменной. После чего остальные переменные находятся в обратном порядке.

2. За круглым столом сидят 4 гнома. Перед каждым стоит кружка с молоком. Один из гномов переливает 1/4 своего молока соседу справа. Затем сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и, наконец, четвертый гном 1/4 оказавшегося у него молока наливает первому. Во всех кружках вместе молока 2л. Сколько молока было первоначально в кружках, если

(а) в конце у всех гномов молока оказалось поровну?

(б) в конце у всех гномов оказалось молока столько, сколько было в начале?

3. Решите системы уравнений:

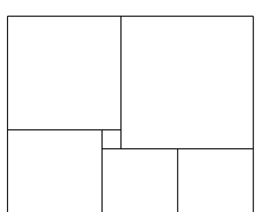
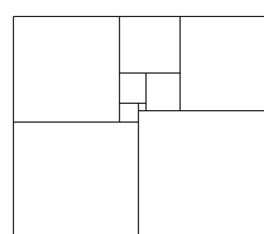
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0, \\ x_2+x_3+x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{99}+x_{100}+x_1 = 0, \\ x_{100}+x_1+x_2 = 0; \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 2a_1, \\ x_1+x_2-x_3-x_4 = 2a_2, \\ x_1-x_2+x_3-x_4 = 2a_3, \\ x_1-x_2-x_3+x_4 = 2a_4. \end{cases}$$

4. Известно, что

$$\begin{cases} a_1-4a_2+3a_3 \geq 0, \\ a_2-4a_3+3a_4 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{99}-4a_{100}+3a_1 \geq 0, \\ a_{100}-4a_1+3a_2 \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $a_1 = 1$; чему равны тогда числа $a_2, \dots, a_{100}$?

5. На рисунках изображены разбиения прямоугольников на квадраты. Найдите стороны этих квадратов, если в первом случае сторона наименьшего квадрата равна 1, а во втором — 2.

(а)  (б) 

6. Может ли система линейных уравнений с действительными коэффициентами иметь в точности два различных решения?

7. Прямоугольник со сторонами a и b разрезан на конечное число квадратов. Докажите, что a/b — рациональное число.

8. Имеются 13 гирь. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на две чашки весов, по шесть на каждую, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют одну и ту же массу, если известно, что: а) масса каждой гири равна целому числу граммов; б) масса каждой гири равна рациональному числу граммов; в) масса каждой гири может быть равна любому действительному (неотрицательному) числу.

9. Альтернатива Фредгольма. Пусть имеется система линейных уравнений (1) с фиксированными коэффициентами $a_{j,k}$ $(1 \le j, k \le n)$. Докажите, что всегда выполняется одна из следующих возможностей:

1) для любых $b_1, \ldots, b_n$ система имеет ровно одно решение (в частности, при $b_1 = \ldots = b_n = 0$ существует только нулевое решение);

2) для некоторых $b_1, \ldots, b_n$ система неразрешима, а для некоторых (в том числе нулевых) имеет бесконечно много решений.

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ задана во всех точках плоскости с целыми координатами. Назовем функцию $f(x, y)$ *гармонической*, если ее значение в каждой точке равно среднему арифметическому значений функции в четырех соседних точках, то есть

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1)).$$

Если функция определена лишь в некоторой области, то это условие должно выполняться во всех внутренних точках этой области (то есть для тех, у которых существуют четыре соседние точки).

10. Гармонические функции в прямоугольнике. Докажите, что внутри прямоугольника $1 \le x \le m$, $1 \le y \le n$ всегда единственным образом можно восстановить значения гармонической функции $f(x, y)$, если её значения заданы в соседствующих с прямоугольником $2(m + n)$ точках.

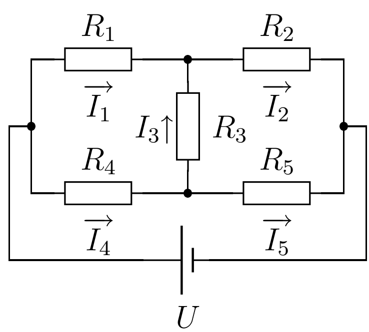
Изменится ли ситуация, если вместо прямоугольника рассматривать более сложные области?

11. Правила Кирхгофа. Для расчета схем постоянного тока используется следующий алгоритм. На каждом участке цепи ставится ток, идущий в произвольном направлении. Затем составляется система линейных уравнений с помощью двух правил Кирхгофа:

1) алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле цепи равна нулю;

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС.

Например, для схемы, изображенной ниже, получается следующая система уравнений, из которой можно однозначно найти токи $I_1, \ldots, I_5$:



$$\left\{\begin{aligned} R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 &= U, \\ R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_4 &= 0, \\ R_3 \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 - R_5 \cdot I_5 &= 0, \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0, \\ -I_3 + I_4 - I_5 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Узлы электрической цепи будем обозначать $\langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle$. Для каждой пары соседних узлов $\langle j\rangle$ и $\langle k\rangle$ запись $\langle j, k\rangle$ будет обозначать соединяющий их проводник, $R_{j,k}$ — его сопротивление, $I_{j,k}$ — текущий из $\langle j\rangle$ в $\langle k\rangle$ ток ($I_{j,k} = -I_{k,j}$).

Докажите, что если токи удовлетворяют уравнениям, составленным по второму правилу Кирхгофа, то каждому узлу $\langle j\rangle$ электрической цепи можно поставить в соответствие некоторое число φ_j (потенциал) так, что для любых соседних узлов $\langle j\rangle$ и $\langle k\rangle$ будет выполняться равенство

$$I_{j,k} \cdot R_{j,k} = \varphi_j - \varphi_k$$

(падение напряжения равно разности потенциалов).

Выведите отсюда, что независимо от выбранной схемы, система линейных уравнений, составленная по правилам

Кирхгофа не может иметь больше одного решения, и что она всегда разрешима.

12. Тепловая мощность цепи. Рассмотрим цепь, которая состоит из сопротивлений и одного источника напряжения. При прохождении тока $I_{j,k}$ по проводнику с сопротивлением $R_{j,k}$, соответствующего разности потенциалов $U_{j,k} = \varphi_j - \varphi_k$ на проводнике $\langle j, k\rangle$ выделяется тепловая мощность $q_{j,k} = R_{j,k} \cdot I_{j,k}^2 = U_{j,k} \cdot I_{j,k} = \dfrac{(\varphi_j - \varphi_k)^2}{R_{j,k}}$. Отвлечемся от физической природы задачи и рассмотрим величину

$$Q = \sum_{j,k} q_{j,k}$$

(суммарную мощность цепи) как функцию от потенциалов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Будем считать, что потенциалы φ_1 и φ_n стоят на концах источника напряжения и, таким образом, фиксированы.

(а) Докажите, что для функции Q существует ровно один набор значений $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, при котором она достигает своего минимального значения. Используя этот потенциал дайте второе доказательство того факта, что система уравнений, составленная по правилам Кирхгофа разрешима и имеет ровно одно решение. Проверьте также, что для токов, удовлетворяющих правилам Кирхгофа, потенциалы распределены так, что тепловая мощность цепи минимальна.

(б) Докажите, что минимальное значение величины Q равно $U \cdot I = R \cdot I^2$, где $U = \varphi_1 - \varphi_n$ — напряжение на источнике, I — текущий через него ток, и R — общее сопротивление цепи, определяемое равенством $R = U/I$.

(в) Докажите, что если в цепи одно сопротивление увеличить, то общее сопротивление цепи не уменьшится.

13 Цепные дроби: геометрический подход

Преподаватель: **Герман Олег Николаевич**

Количество академических часов: **2**

Форма занятия: **лекционная**

В теории решёток ключевую роль играют такие понятия, как базисы, фудаментальные параллелограмы, целочисленные длины и углы.

Если рассматривать целочисленую решетку $\mathbb{Z}^2$, то появляется геомерическая интерпретация алгоритма Евклида, которую красочно называют алгоритмом “вытягивания носов”.

Многомерный аналог “вытягивания носов” реализуется полигонами Клейна.

При помощи указанных построений можно провести геометрическое доказательство основных свойств неполных частных и подходящих дробей.

Цепные дроби позволяют эффективно решать проблему приближения действительных чисел рациональными. С одной стороны, согласно **теореме Дирихле** для любого действительного числа α можно найти такие целые числа p, q, что $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$, причем знаменатель q больше любого наперед заданного числа. Более того, оценку ${}^1\!\big/_{q^2}$ можно усилить до ${}^1\!\big/_{q^2\sqrt{5}}$. С другой стороны, ее нельзя усилить до ${}^1\!\big/_{kq^2}$, где $k > \sqrt{5}$: число

$$\varphi = {}^{(1+\sqrt{5})}\!\Big/_{2} = [1; 1, 1, 1, \ldots]$$

будет контрпримером для любого $k > \sqrt{5}$.

14 Комбинаторика и конечные множества

Преподаватель: **Гашков Сергей Борисович**

Количество академических часов: **2**

Форма занятия: **лекционная**

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — конечные непустые множества.[1]

Определение. Упорядоченный набор $(a_1, \dots, a_n)$, компоненты которого a_i принадлежат множествам A_i, $i = \overline{1, n}$, назовем *словом.* Множество всех таких слов обозначим $A_1 \times \ldots \times A_n$ и назовем *декартовым*[2] *произведением* множеств $A_1, \dots, A_n$.

Далее вместо $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$ используем краткое обозначение A^n, называемое *декартовой степенью* множества A.

Пример 1. Если множество $A = E_2 = \{0, 1\}$, то его декартова степень $A^n = E_2^n$ состоит из всех слов длины n, составленных из 0 и 1. Это множество называют $n-$мерным двоичным кубом.

Пример 2. Если множество $A = E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, то его декартова степень $A^n = E_k^n$ состоит из всех слов длины n, составленных из $0, 1 \dots, k-1$. Это множество называют $n-$мерным $k-$ичным кубом.

Число элементов множества A для краткости именуют его *мощностью* и обозначают $|A|$. Следующее утверждение

---

[1] теоретико-множественная терминология, используемая далее, стала общепринятой после работ Г.Кантора(G.Kantor)(1845-1918).

[2] Рене Декарт (René Descartes) (1596–1650) — великий французский философ и математик. Умер в Швеции.

в определенном смысле можно рассматривать и как определение операции умножения.

Принцип умножения. Справедливо равенство

$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n| \,.$$

(Число элементов в декартовом произведении множеств равно произведению мощностей этих множеств).

Принципом сложения в комбинаторике называется следующее почти очевидное, хотя и довольно абстрактно формулируемое утверждение.

Принцип сложения. Если множества $A_i, 1 \leq i \leq n$ попарно не пересекаются (другими словами, не имеют общих элементов), то справедливо равенство

$$\left| A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_n \right| = |A_1| + \ldots + |A_n| \,.$$

(Мощность объединения попарно не пересекающихся множеств равна сумме мощностей этих множеств).

Для краткости объединение семейства множеств $A_i, 1 \leq i \leq n$ обозначают еще и так: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Следующее определение по существу совпадает с определениями, данными Дирихле [3]). и Лобачевским [4]

Определение. *Отображением* (или *функцией*) $f\colon A \to B$ назовем соответствие, при котором каждому элементу множества A сопоставляется ровно один элемент множества B.

Это определение тесно связано со следующим определением.

Определение. Подмножество F множества $A \times B$ ($F \subset A \times B$) назовем *графиком* отображения $f\colon A \to B$ (обозна-

[3]П. Лежен Дирихле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet) (1805–1859) — Знаменитый немецкий математик. Родился во Франции.

[4]Н.И.Лобачевский (1792-1856)— Знаменитый русский математик, первооткрыватель неевклидовой геометрии. Ректор Казанского университета.

чение: $F = \Gamma_f$), если для любого элемента a, принадлежащего A, найдется единственный элемент b из B, такой, что упорядоченная пара (a, b) принадлежит множеству F.

Этот элемент обозначим $f(a)$ и назовем *образом* элемента a при отображении f.

Определение. Для любого множества M, содержащемся в A, множество $\{\, f(a) \mid a \in M \,\}$ образов всех элементов M обозначим $f(M)$ и назовем *образом* множества M.

Определение. Отображение $f\colon A \to B$ назовем вложением, если разные элементы всегда имеют разные образы.

Определение. Назовем отображение $f\colon A \to B$ *взаимно однозначным* отображением, если отображение f одновременно является и вложением и наложением.

Следующее определение применимо и к бесконечным множествам.

Определение. Если для множеств A и B существует взаимно однозначное отображение $f\colon A \to B$, то будем говорить, что A и B *имеют одинаковую мощность*, и записывать это в виде $|A| = |B|$.

Большинство задач перечислительной комбинаторики могут быть сформулированы как задачи о вычислении мощности данного конечного множества.

На использовании понятия равномощности основан следующий прием решения таких задач: если непосредственно мощность множества вычислить не удается, то пытаются установить взаимно однозначное отображение этого множества с другим множеством, мощность которого уже известна, или может быть непосредственно вычислена. Далее мы будем неоднократно пользоваться этим приемом.

Обозначим через $\mathbf{F}(A, B)$ множество всех отображений из A в B. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство $|\mathbf{F}(A, B)| = |B|^{|A|}$.

Обозначим через $\mathbf{P}(A)$ множество всех подмножеств множества A (включая само множество A и $\emptyset$ — пустое подмножество). Имеет место следующая

Теорема. Справедливо равенство $|\mathbf{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Кроме функций одной переменной, часто рассматриваются также функции нескольких переменных. Например, отображение $f : A^n \to B$ можно рассматривать как функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ n переменных, $x_i \in A, 1 \le i \le n$.

Определение. В случае $A = B = E_2 = \{0, 1\}$ функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ n переменных, $x_i \in A, 1 \le i \le n$, называется *функцией двузначной логики*, или *функцией алгебры логики*, а также еще *булевой функцией* [5]

В случае $A = B = E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ n переменных, $x_i \in A, 1 \le i \le n$, называется *функцией $k-$значной логики.*

1. Сколько элементов (вершин) в $n-$мерном двоичном кубе?

2. Сколько элементов (вершин) в $n-$мерном $k-$ичном кубе?

3. Напишите таблицы всех булевых функций от двух переменных.

4. Сколько существует булевых функций от n переменных?

5. Сколько существует функций $k-$ значной логики от n переменных?

6. Сколько различных n-значных чисел можно записать в десятичной системе счисления (первая цифра отлична от 0)?

7. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$. Найти $d(n)$ — число всех натуральных делителей n и $\tau(n)$ — сумму этих делителей. Доказать, что если $(m, n) = 1$, то $d(nm) = d(n) \cdot d(m)$ и $\tau(nm) = \tau(n) \cdot \tau(m)$.

8. Пусть p — простое число. Сколькими способами можно раскрасить вершины правильного p-угольника, если разре-

[5] Дж.Буль (G.Boole) (1815-1864)-английский математик и логик, преподавал в Ирландии. Отец писательницы Э.Л.Войнич.

шается использовать заданные k цветов (не обязательно все) и две раскраски, переходящие друг в друга при повороте p-угольника, считаются одинаковыми?

9. Вывести из предыдущей задачи, что p делит $k^p - k$.

Обозначим через $\mathbf{I}(A, B)$ множество всех вложений $f\colon A \to B$. Другими словами, это число размещений элементов множества A по ящикам, являющимся элементами множества B.

Ясно, что $\mathbf{I}(A, B)$ не пусто тогда и только тогда, когда $|A| \leq |B|$.

Определение. Число $V \cdot (V-1) \cdot \ldots \cdot (V-n+1)$ называется *убывающим фактором* длины n и обозначается $[V]_n$.

Число $V \cdot (V+1) \cdot \ldots \cdot (V+n-1)$ называется *возрастающим фактором* длины n и обозначается $[V]^n$.

10. (а) $[-V]_n = (-1)^n [V]^n$, **(б)** $[-V]^n = (-1)^n [V]_n$.

14.1 Размещения, перестановки и сочетания

Теорема о числе размещений Справедливо равенство

$$|\mathbf{I}(A, B)| = |B| \cdot (|B| - 1) \cdot \ldots \cdot (|B| - |A| + 1) = \Big[|B|\Big]_{|A|}.$$

Определение. Произведение $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ называется *n-факториалом* и обозначается $n\,!$.

Тогда $[r]_n = r\,!/(r-n)\,!$ при $r > n \geq 0$ (по определению $0\,! = 1$).

Теорема о числе перестановок. Справедливо равенство $|\mathbf{I}(A, A)| = |A| \cdot (|A| - 1) \cdot \ldots \cdot 1 = |A|\,!$

Для краткости вместо $\mathbf{I}(A, A)$ пишем $\mathfrak{G}(A)$.

Определение. Элементы множества $\mathfrak{G}(A)$ называются перестановками множества A.

Определение. *Перестановкой с повторениями* называется любое слово из множества $\{1, \ldots, k\}^n$, в котором каждая «буква» i встречается n_i раз, где $n_1 + \ldots + n_k = n$.

Множество всех таких слов обозначим $\mathfrak{S}(n_1, \ldots, n_k)$.

Если $k = n$, $n_i = 1$, $i = \overline{1, n}$, то $\mathfrak{S}(1, \ldots, 1)$ — это просто $\mathfrak{S}_n(\{1, 2, \ldots, n\})$, если его элементы записывать в виде слова $(a_1, \ldots, a_n)$, принадлежащего множеству $\{1, \ldots, n\}^n$.

Теорема. Справедливо равенство

$$|\mathfrak{S}(n_1, \ldots, n_k)| = \frac{n\,!}{n_1! \ldots n_k!}$$

11. (а) Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове “МАТЕМАТИКА”?

Перестановка букв в слове называется *анаграммой.*

(б) В 17-м веке среди ученых существовал обычай объявлять о своих открытиях, нуждающихся в подтверждении, публикацией анаграммы. Галилей, увидев в свою подзорную трубу, что Сатурн имеет по краям какие-то придатки, опубликовал анаграмму

SMAISMRMIELMEPOETALEUMIBUVNEUGTTAVIRAS.

Сколько различных перестановок пришлось бы перепробовать Кеплеру, чтобы разгадать анаграмму Галилея? Напишите точную формулу и оцените число десятичных цифр в изображаемом ею числе.

Из Теоремы 14.1 следует **полиномиальная теорема** Справедливо тождество

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \frac{n\,!}{n_1! \ldots n_k!} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}.$$

Определение. Число $\dfrac{n\,!}{n_1! \ldots n_k!}$ обозначается $\dbinom{n}{n_1, \ldots, n_k}$ и называется полиномиальным коэффициентом. Если $k = 2$, то вместо $\binom{n}{n_1, n_2}$ пишут $\binom{n}{n_1}$, ибо $n_2 = n - n_1$, и называют это число биномиальным коэффициентом. Иногда вместо $\binom{n}{k}$ используют более старое обозначение C_n^k

12. (а) Проверьте, что $\binom{n}{k} = [n]_k / k!$.

(б) Проверьте, что справедливо тождество (двойственность биномиальных коэффициентов)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k\,!} = \binom{n}{n-k}.$$

(в) Докажите, что последовательность $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ возрастает вплоть до коэффициента $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$, а с коэффициента $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil + 1}$ убывает.

(г) Докажите чисто алгебраически тождество Паскаля

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Частным случаем полиномиальной теоремы является **биномиальная теорема.**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Определение. *Треугольником Паскаля* называется таблица в которой каждая очередная строка на одно число длиннее предыдущей, начинается и заканчивается единицей, и каждое из остальных ее чисел равно сумме двух чисел предыдущей строки, между которыми оно находится.

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

О треугольнике Паскаля.

В $n-$й строке треугольника Паскаля стоят в точности биномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

13. Доказать биномиальную теорему по индукции.

14. Вывести из нее полиномиальную теорему.

15. Если множества A_i попарно не пересекаются и

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| \geq k_1 + \ldots + k_n - n + 1,$$

то $|A_i| \geq k_i$ для некоторого i (принцип Дирихле)

16. Сколькими способами можно разместить n одинаковых шаров по m урнам, так чтобы в каждой урне оказалось не более одного шара?

17. Доказать тождество

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = k^n.$$

18. Вывести из полиномиальной теоремы, что при простом p и любом натуральном k число $k^p - k$ делится на p (малая теорема Ферма).

19. В классе для каждого $k = \overline{1, n}$ ровно a_k учеников получили не менее k двоек. Сколько всего двоек в этом классе?

20. (Лежандр[6]).
(а) Доказать,что простое число p входит в разложение $n\,!$ в степени

$$\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor,\qquad \text{где } p^k\le n<p^{k+1},$$

а $\lfloor x\rfloor$ обозначает целую часть числа x
(б) Докажите, что

$$\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n}{p^m}\right\rfloor+\cdots=\frac{n-\nu_p(n)}{p-1},$$

где $\nu_p(n)$ — сумма цифр p-ичной позиционной записи натурального числа n,
(в) Пусть $u_k=\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}, h=p_mu_m+\cdots+p_1u_1+p_0$, $p_m=\left\lfloor\dfrac{h}{u_m}\right\rfloor, h_{m-1}=h-p_mu_m, p_{m-1}=\left\lfloor\dfrac{h_{m-1}}{u_{m-1}}\right\rfloor,\ldots,$ $h_1=h_2-p_2u_2, p_1=\left\lfloor\dfrac{h_1}{u_1}\right\rfloor$. Тогда простое p входит в разложение $n!$ в степени h тогда и только тогда, когда

$$n=p_mp^{m+1}+\cdots+p_1p^2+p_0p+p',$$

где все p и p' целые неотрицательные и меньше p.

21. Может ли $n!$ оканчиваться ровно 2003 нулями в десятичной записи?

22. При каких n число $(n-1)!/n$ — целое?

23. Докажите, что число $(2n)!/(n!)^2$ натуральное и делится на $n+1$.

24. Докажите, что число $n!/a!b!\cdots k!$ — целое, если только $a+b+\ldots+k\le n$.

[6] Андриан-Мари Лежандр (Adrien-Marie Legendre) (1752–1833) — известный французский математик.

25. Докажите, что число $(2n)!/(n!)^2$ натуральное и делится на $n+1$ и на $2^{\nu(n)}$, но не делится на $2^{\nu(n)+1}$.

26. Докажите, что число $(2n)!/n!$ делится на 2^n, но не на 2^{n+1}.

27. Докажите, что число $n!/2^n$ — нецелое. При каком натуральном m число $n!/2^{n-m}$ будет целым при всех натуральных n?

28. (Куммер.[7]) Докажите, что
(а) $\mathrm{ord}_p\binom{n}{k} = (\nu_p(n-k)+\nu_p(k)-\nu_p(n))/(p-1)$, где $\mathrm{ord}_p a$ наибольший показатель степени простого числа p, делящей a, а $\nu_p(n)$ — сумма цифр p-ичной позиционной записи числа n,
(б) число $(\nu_p(n-k)+\nu_p(k)-\nu_p(n))/(p-1)$ равно количеству переносов в следующий разряд при сложении чисел k и $n-k$ в p-ичной системе счисления, причем и при составном p.

29. Докажите, что биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ нечетен тогда и только тогда, когда в двоичной записи числа k единицы не стоят в тех разрядах, где в числе n стоят нули.

30. Докажите, что биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ не кратен простому числу p тогда и только тогда, когда в p-ичной записи числа k все разряды не превосходят соответствующих разрядов числа n.

31. Докажите, что в ряду биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n}$$

все числа нечетны тогда и только тогда, когда $n = 2^k - 1$.

32. Докажите, что в ряду биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n}$$

[7] Э.Куммер(Ernst Eduard Kummer)(1810-1893) Выдающийся немецкий математик. Чл.-корр. Петербургской академии наук.

все числа не кратны заданному простому p тогда и только тогда, когда n равно $mp^k - 1$, где натуральное $m < p$.

33. Докажите, что в ряду биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{k}, \dots, \binom{n}{n}$$

все числа, кроме первого и последнего, кратны заданному простому p тогда и только тогда, когда $n = p^k$.

34. Докажите, что в ряду биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{k}, \dots, \binom{n}{n}$$

количество нечетных чисел равно степени двойки.

35. Докажите, что в ряду биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{k}, \dots, \binom{n}{n}$$

количество не кратных p чисел равно $(a_1 + 1) \dots (a_m + 1)$, где числа $a_1, \dots, a_m$ — разряды p-ичной записи числа n, а число $m = \lceil \log_p n \rceil$.

36. Докажите, что в первых $p^n - 1$ строках треугольника Паскаля (т.е. среди биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$, $k \le m \le p - 1$) ровно $\left(\dfrac{p(p+1)}{2}\right)^n$ некратных p чисел.

37. (Люка) [8] Пусть p — простое, $k \le n$ — натуральные. Докажите, что

(а)* $\operatorname{ord}_p \binom{n}{k} = \operatorname{ord}_p \binom{np}{kp}$ и $\binom{np}{kp} - \binom{n}{k}$ кратно p.

(б)* $\binom{n}{p} - \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ кратно p. Более того, если $\left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ кратно p^m,

[8]Эдуард Люка (Eduard Lucas) (1842–1891) — известный французский специалист по теории чисел и педагог.

то и $\binom{n}{p}$ тоже.

(в)* $\binom{np+m}{kp+s} - \binom{n}{k}\binom{m}{s}$ кратно p при неотрицательных n, m, k, s, и m и s меньших p (биномиальный коэффициент, очевидно, равен нулю, если нижний индекс меньше верхнего, а коэффициент $\binom{0}{0}$ по определению равен 1).

(г)** $\binom{k}{n} - \binom{k_m}{n_m} \dots \binom{k_0}{n_0}$ кратно p при

$$n = n_m p^m + \dots + n_1 p + n_0, k = k_m p^m + \dots + k_1 p + k_0,$$

$$0 \le n_i, k_i < p, 0 \le i \le m.$$

(д)** $\binom{k}{p^n - 1} - (-1)^{\nu_p(k)}$ кратно p.

(е)*** $\binom{np}{kp} - \binom{n}{k}$ кратно p^2, а при $p \ge 5$ — кратно и p^3.

15 Дискретная геометрия

Преподаватель:
Часовских Анатолий Александрович

Количество академических часов: **5**

Форма занятия: **лекционно-семинарская**

Расстояние (*метрика*) на множестве M — неотрицательная действительнозначная функция ρ, $\rho\colon M^2 \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

(i) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
(iii) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Пространства с метрикой называются *метрическими* пространствами. Если метрическое пространство таково, что расстояние либо равно нулю, либо больше некоторого $\varepsilon > 0$, то такие пространства называют *дискретными*. Например, дискретным является любое метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек.

Одно из наиболее полезных дискретных пространств — единичный куб $\{0; 1\}^n$. Он состоит из 2^n элементов. Каждый его элемент — это набор из n нулей или единиц. *Расстояние Хемминга* между наборами равно числу позиций (всего позиций n), в которых наборы отличаются, т.е.

$$\rho((a_1, a_2, \ldots, a_n); (b_1, b_2, \ldots, b_n)) = \#\{k\colon a_k \neq b_k\}.$$

При помощи расстояния нетрудно определить *единичный шар с центром* A как множество точек на расстоянии не больше 1 от точки A. Оно состоит из $n + 1$ точки — точки A еще n точек, которые отличаются от A ровно по одной из n координат.

Имеет место **теорема**: при $n = 2^k - 1$ (k натуральное) n-мерный единичный куб можно разбить на 2^{2^k-1-k} единичных шаров (и, естественно, нельзя разбить ни на какое другое количество единичных шаров).

Дискретные пространства естественным образом возникают в теории кодирования. Разбиение на шары играет важную роль в выявлении и устранении ошибок при передаче данных.

1. Можно ли в единичном кубе $\{0,1\}^6$ поместить k попарно непересекающихся шаров радиуса 1 при

(а) $k = 8$; **(б)** $k = 10$; **(в)** $k = 9$?

2. Придумать способ кодирования сообщений, допускающий однозначное декодирование, при котором каждая буква кодируется кодом из $\{0,1\}^n$ с возможностью ошибки в не более чем одной компоненте каждого набора.

3. Придумать алгоритмы поиска кратчайших путей на многогранных поверхностях, основанные на использовании известного алгоритма Дейкстра.

4. Задан выпуклый многогранник с n вершинами и две точки на его поверхности.

(а) Доказать, что если каждая из этих двух точек не совпадает с вершиной многогранника, то любой кратчайший путь между этими точками по поверхности многогранника не содержит его вершин.

(б) Доказать, что существует не более n кратчайших путей по поверхности многогранника, соединяющих эти точки.

16 Производящие функции

Преподаватель: **Устинов Алексей Владимирович**

Количество академических часов: **2**

Форма занятия: **лекционная**

Формальным степенным рядом (*ФСР*) называется выражение вида

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

Каждый ФСР однозначно задается последовательностью своих коэффициентов и называется *производящей функцией* этой последовательности. При этом на последовательность не накладываются никакие ограничения.

Множество всех формальных степенных рядов принято обозначать $\mathbb{K}[[x]]$, если $\mathbb{K}$ — множество, где хранятся коэффициенты. Над формальными степенными рядами можно естественным образом производить операции сложения, умножения и вычитания (т.е. для любой пары ФСР f_1 и f_2 определены ФСР $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$). Но, в отличие от кольца многочленов, в кольце ФСР есть довольно много обратимых элементов, т.е. таких $f(t)$, для которых можно найти $g(t)$, такой что $f(t) \cdot g(t) \equiv 1$. Критерием обратимости служит следующая **лемма**: ряд $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$.

Частным случаем ФСР являются многочлены, а частным случаем многочленов — бином Ньютона $f(t) = (1+t)^n$. Коэффициенты бинома Ньютона называются *биномиальными коэффициентами*. Для биномиальных коэффициентов известны многочисленные тождества, которым они удовлетворяют, например: $\sum \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, $\sum k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$, $\sum \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$, ...

Все эти тождества, наряду с комбинаторными, обладают также функциональными доказательствами.

Три классические задачи

1. При помощи производящих функций, можно решить следующую важную задачу: сколько корней в целых неотрицательных числах имеет уравнение

$$x_1 + \dots + x_k = n?$$

Ответ: $\binom{n-k+1}{k-1}$.

2. Счастливым билетом называется шестизначное число (первые несколько цифр которого могут быть равны нулю), у которого сумма первых трех цифр равна сумме оставшихся трех. Задача о подсчете количества счастливых билетов весьма изящно решается при помощи производящих функций. Если рассмотреть производящую функцию

$$A_3(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{27} s^{27}$$

количества трехзначных чисел с заданной суммой цифр a_k, то комбинаторными рассуждениями можно доказать, что $A_3(s) = A_1(s)^3$, где $A_1(s) = 1 + s + s^2 + \ldots + s^9$ — аналогичный ФСР для однозначных чисел. Это позволяет вычислить коэффициенты $A_3(s)$, и тогда количество счастливых билетов находим по формуле $\sum a_k^2$.

3. Числа Фибоначчи — это элементы реккурентной последовательности $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Нетрудно доказать, что производящая функция чисел Фибоначчи равна

$$f(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}.$$

Из нее легко вывести **формулу Бине**:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

17 Математические игры

Преподаватель: **Иванова Елена Юрьевна**

Количество академических часов: **5**

Форма занятия: **лекционно–семинарская**

— Что наша жизнь? — Игра! —
Герман, опера “Пиковая дама”

Под *математической игрой* мы понимаем игру двух соперников, обладающую следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется *позицией*, которая может меняться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются *выигрышными*. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель игры каждого. Иногда игры допускают *ничью*. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции или некоторые позиции объявляются ничейными.

Утверждение. Если в игре не бывает ничьих, то у одного из игроков существует выигрышная стратегия.

1. Докажите это утверждение.

2. Пусть в двухходовых шахматах фигуры ходят так же, как и в обычных. Только за один ход игрок ходит либо двумя фигурами, либо одной фигурой два раза. Белые начинают. Докажите, что в этой игре белые имеют ничейную стратегию.[9]

3.* (*Для шахматистов-разрядников*) Пусть в двухходовых шахматах действуют все те же правила шахматного кодекса, что и в обычных шахматах. Какое правило в этом случае

[9] Заметим, что вас никто не просит указать эту стратегию в явном виде, требуется только доказать ее существование!

будет мешать доказать существование ничейной стратегии для белых?

Таким образом, в любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого, выигрышной для второго или же ничейной. Например, игра "крестики-нолики" на доске 3×3 является ничейной игрой. К какому из перечисленных выше видов относятся шахматы и шашки, неизвестно. Поскольку анализ возникающих многообразных позиций слишком сложен, стратегия до сих пор не найдена, поэтому соревнования по этим играм пока представляют значительных интерес, хотя существование конечного числа позиций в этой игре дает возможность предположить, что со временем появятся столь быстродействующие компьютеры, которые позволят перебрать все существующие позиции и тем самым ответить на вопрос о существовании стратегии. (Хотя, конечно, это будет большая потеря как для шахматистов, как и шашистов.)

17.1 Простейшие стратегии

— Если сможешь, угадай, что ответит попугай?
— То и скажет, полагаю, что вдолбили попугаю!

Б.Заходер, "Попугай."

Упражнение 1. Имеется три кучи с равным количеством камней. За один ход можно взять любое количество камней из любой кучи. Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Кто выиграет при правильной игре?[10]

[10] В игровых задачах под правильной игрой подразумевается то, что игроки играют наилучшим для себя образом, т.е. если существует ход в выигрышную позицию, то он обязательно делается.

Упражнение 2. Двое по очереди ставят коней на шахматную доску. Нельзя ставить фигуру под бой ранее поставленной (неважно, самим игроком или его противником) фигуры. Кто не сможет сделать ход, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

Упражнение 3. В строчку выписано несколько минусов. Два игрока по очереди исправляют один или два соседних минуса на плюсы. Выигрывает игрок, переправивший последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер?

Упражнение 4. Двое по очереди выкладывают рублевые монеты на круглый стол. Сдвигать уже выложенные монеты нельзя. Кто не сможет сделать ход, проигрывает. Кто победит при правильной игре: начинающий или его партнер?

4. Двое по очереди ставят слонов на клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга (цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков обладает выигрышной стратегией?[11]

5. Двое по очереди обрывают лепестки у ромашки, причем за один раз можно оборвать один или два соседних (рядом растущих) лепестка. Выигрывает, оборвавший последний лепесток. Кто выиграет при правильной игре?[12]

6. Двое играют в “добрые шашки” на доске 8×8. Правила игры отличаются от правил обычных шашек тем, что не

[11] *Замечание*. Поскольку шахматная доска симметрична относительно своего центра, естественно попробовать симметричную стратегию. Но слона невозможно поставить в центр доски, поэтому кажется, что победить должен второй игрок, выставляя слонов центрально-симметрично ходу первого игрока. Казалось бы это и есть выигрышная стратегия, однако, следуя ей, второму игроку может не удастся сделать даже одного хода! Например, слон поставленный на первым игроком на главную диагональ, не даст второму возможности сделать такой ход, т.к. все центрально-симметричные клетки будут биты!

[12] Сравните с упражнением 3.

разрешается брать шашки противника и превращать свои шашки в дамки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Другая распространенная идея — *передача хода.* Пусть имеется выигрышная стратегия, начиная из какой-то позиции. Если в эту позицию по своему желанию мы можем попасть сами или заставить противника попасть в нее, то у нас имеется выигрышная стратегия.[13]

Пример: *докажите, что в игре "крестики-нолики" на бесконечной доске у ноликов нет выигрышной стратегии.*

7. Две компании "Светопром" и "ООО ЕЭС" получили право освещать столицу международной шахматной мысли Нью-Васюки, представляющую собой прямоугольную сетку улиц. Они по очереди ставят на еще неосвещенный перекресток прожектор, который освещает весь юго-западный угол города (от нуля до $90°$). Премию О. Бендера получит та компания, которой на своем ходе нечего будет освещать. Начинает "Светопром". Кто выиграет при правильной игре?

Упражнение 5. Сравните задачи 7 и 2.

8. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое по очереди соединяют узлы соседних клеток по вертикали или горизонтали один красным цветом, другой — синим. Нельзя обводить один отрезок дважды. Выигрывает тот, кто первым нарисует замкнутый контур своего цвета. Существует ли выигрышная стратегия у второго игрока?

Задача–шутка. Вова провел сеанс одновременной игры в шахматы с гроссмейстерами Гарри Каспаровым и Анатолием Карповым. С одним соперником он играл белыми, а с другим — черными. Вова утверждает, что он взял в этом сеансе одно очко. Как ему это удалось?

[13]Шахматистам такой прием хорошо известен. Во многих шахматных окончаниях используется идея передачи хода для получения позиции, в которой любой ход противника ведет к проигрышу (цугцванг).

17.2 Выигрышные и проигрышные позиции

Пусть есть некоторая игра для двух игроков. Для простоты будем считать, что в игре невозможен ничейный исход. Дадим определение *выигрышной позиции.* Во-первых назовем выигрышными все те позиции, которые являются выигрышными по определению, по достижении которых игра заканчивается.

Таким образом любую игру на двоих можно воспринимать, как набор выигрышных для сделавшего ход в эту позицию (**В**) и проигрышных для сделавшего ход (**П**) позиций. Причем, позиции эти определяются следующими правилами:

(i) В–позиция существует;

(ii) Из любой П–позиции за один ход можно попасть в В–позицию;

(iii) Из любой В–позиции за один ход можно попасть только в П–позицию.

Таким образом, присвоив значения В– или П–позиций каждой ситуации игры, мы получим не только исход игры при верной тактике обоих соперников, но и саму тактику, что и было продемонстрировано выше. Конечно, игра "Спички" слишком проста и выигрышную стратегию можно легко придумать, не рисуя никаких позиций. Нам она была необходима лишь для иллюстрации построения выигрышных и проигрышных позиций в произвольной игре.

9. Леша, Вова и Коля решили сыграть в следующую игру. В кучке лежат 2004 спички. Леша и Вова имеют право брать 1 или 2 спички, а Коля — 1, 2 или 3. При этом Леша и Вова объединяют свои усилия против Коли, а Коля имеет право выбрать очередь своего хода — первый, второй или третий. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Может ли Коля выбрать себе такую очередь, что при правильной игре выиграет именно он?

10. В одной кучке 18 конфет. В другой — 23. Двое по очереди съедают одну из куч, а другую делят на две кучи. Кто не может поделить (в куче осталась одна конфета), проигрывает. Есть ли у начинающего выигрышная стратегия?

11.* Пять ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За один ход разрешается переложить все шарики из какой–нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход когда все шарики лежат в самой правой ямке). Кто победит, если игроки не делают ошибок?

17.3 Игра "Ним"

Н и м . *Порядочный вор крадет с передышкой. Украл — отдохни маленько, а потом опять за дело.*

Шекспир, "Виндзорские насмешницы"

Пусть имеется несколько кучек камней. Двое играющих по очереди берут камни из этих кучек, причем на каждом ходу можно взять любое, отличное от нуля, число камней из любой кучки(но только из одной).Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Необходимо выяснить, каков должен быть исход в этой игре при оптимальной стратегии обоих игроков и в чем эта стратегия должна состоять.

Упражнение 6. Переведите на язык "ним" следующие игры на клетчатой доске:

(а) В левом нижнем углу клетчатой доски $n \times m$ стоит ладья. За один ход можно пойти либо вверх, либо вправо на любое количество клеток. Выигрывает тот, кто займет правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

(б) В левом нижнем углу клетчатой доски $n \times m$ стоит ферзь. За один ход можно пойти либо вверх, либо вправо,

либо по диагонали вправо-вверх на любое количество клеток. Выигрывает тот, кто займет правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре?
(в) В левом нижнем углу клетчатой доски $n \times m$ стоит король. За один ход можно пойти либо вверх, либо вправо, либо по диагонали вправо-вверх. Выигрывает тот, кто займет правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре?

12. Ключевая задача. Имеется три кучки камней. Двое играющих по очереди берут камни из этих кучек, причем на каждом ходе играющий может взять любое, отличное от нуля, число камней из любой (но только из одной) кучки. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Выясните, каков должен быть исход в этой игре при оптимальной стратегии обоих игроков и в чем эта стратегия должна состоять.

Идея решения. Для решения этой задачи удобно воспользоваться двоичной системой счисления. Пусть в трех кучках лежат, соответственно, a, b и c камней. Запишем каждое из этих чисел в двоичной системе

$$a = (\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0})_2;\ b = (\overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0})_2;\ c = (\overline{c_n c_{n-1} ... c_1 c_0})_2.$$

При этом можно считать, что в каждой записи одинаковое число разрядов, т.к. можно недостающие разряды дополнить нулями у тех чисел, в которых знаков меньше. Таким образом, каждая из цифр a_k, b_k, c_k равна 0 или 1, а среди чисел a_n, b_n, c_n хотя бы одна отлична от нуля. Игрок, делающий ход, может заменить число a, b или c на меньшее, т.е. изменить хотя бы одну из цифр в одной из последовательностей $(a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0)$, $(b_n,\ b_{n-1},\ \ldots,\ b_1,\ b_0)$ или $(c_n,$ $c_{n-1},\ \ldots,\ c_1,\ c_0)$. Рассмотрим теперь суммы

$$a_n + b_n + c_n, a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}, \ldots, a_0 + b_0 + c_0. \qquad (\star)$$

Каждая из этих сумм может быть равна 0, 1, 2 или 3. Если хотя бы одна из этих сумм нечетна (т.е. равна 1 или 3), то первый игрок может обеспечить себе выигрыш. Докажем это.

Пусть $a_k+b_k+c_k$ — первая сумма (считая справа налево) из сумм ($\star$), являющаяся нечетной. Тогда хотя бы одна из трех цифр a_k, b_k, c_k равна 1. Пусть это a_k. В этом случае игрок может взять из первой кучки столько камней, чтобы коэффициенты a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_{k+1} не изменились, величина a_k стала равна нулю, а каждый из коэффициентов a_{k-1}, a_{k-2}, $\ldots$, a_1, a_0 принял бы нужное игроку значение (0 или 1).

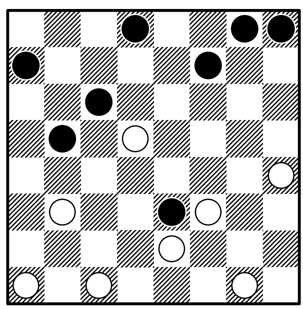
Контрольный вопрос: как это можно сделать?

Упражнение 7. Пусть первая нечетная тройка имеет номер 5 (k=5), $a_5 = 1$, $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Требуется также изменить a_3, a_2 и a_1. Остальные коэффициенты оставить без изменения. Сколько камней надо взять из первой кучки?

Таким образом, из первой кучки можно взять такое количество камней, чтобы все суммы ($\star$) стали четными. Другими словами, начавший игру может сделать так, чтобы это было после его хода. Второй игрок, сделав ход, неизбежно изменит четность хотя бы одной из сумм. Значит, после его хода вновь наступит положение, при котором хотя бы одна из сумм нечетна. Тогда первый игрок снова сможет своим ходом сделать все суммы четными. И т.д. Таким образом, после каждого хода первого игрока все суммы четны, а после хода второго – хотя бы одна нечетна. Т.к. после каждого хода количество камней уменьшается, то рано или поздно наступит момент, когда все суммы равны нулю. При этом все суммы четны, то это положение наступит после хода первого игрока, т.е. он выиграет. Если же в самом начале все суммы четны, то второй игрок сможет применить разобранную нами выше стратегию для первого игрока и тем самым выиграть партию. ■

13. Сформулируйте стратегию для игры в ним в общем случае. Имеется несколько кучек с камнями. Ход каждого игрока заключается в том, что данный игрок забирает некоторое количество камней из какой-либо кучки, но не более чем из одной. При этом игрок может взять себе от одного камня до целой кучки. Выигрывает тот, кто забирает последний камень.

14. Как изменится стратегия для описанной выше игры, если проигрывает тот, кто забирает последний камень?

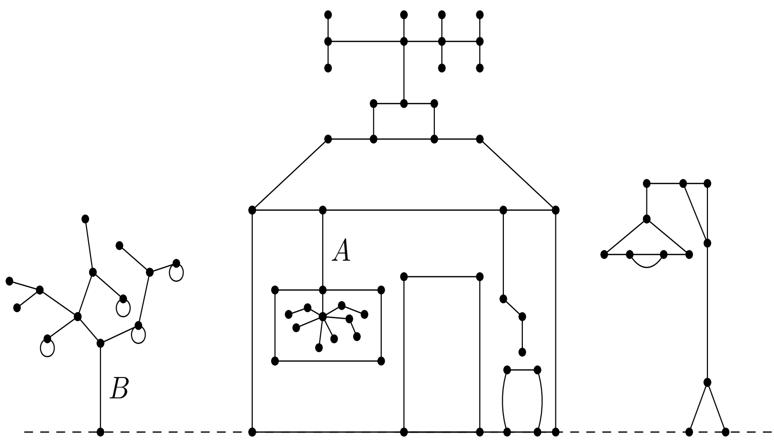


15. Двое играют в шашки необычным способом. В начале игры черные и белые шашки размещаются на произвольных клетках в каждом столбце доски—белые на одной стороне, черные – на другой. В каждом столбце по одной черной и по одной белой шашке. (см.рис.) Играющие по очереди делают ходы. Каждый ход состоит в перемещении одной из своих шашек вперед на любое количество пустых клеток в соответствующем столбце. Перепрыгивать через шашку противника нельзя, так что если две шашки оказываются на соседних клетках в одном столбце, то ни одна из них больше ходить не может. Побеждает тот игрок, который сделает последний ход. Какова стратегия в этой игре и кто выигрывает при правильной игре?

16.* Как изменится стратегия, если в предыдущей игре разрешить шашкам двигаться не только вперед, но и назад? Что на языке “ним” означает то, что шашки можно двигать назад?

Прежде, чем перейти к другому спсобу решения игровых задач приведем пример еще одной игры. Если в предыдущей игре аналогия с игрой ним была почти очевидна, то для следующей игры, предложенной в середине 80-х прошлого века Дж. Конуэем из Кембриджа, найти эту аналогию не так-то просто.

17.4 Игра “Хакенбуш”[14]



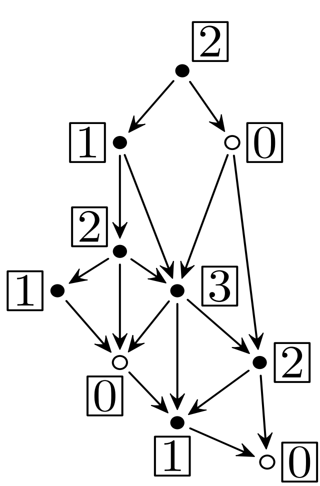
Исходная картинка представляет собой набор из нескольких отдельных графов, как, например, рисунок “Усадьба Хакенбуш”, который предложил сам Конуэй (см.рис.). Граф может содержать “петли” (например, как яблоки, висящие на дереве). Между двумя вершинами можно провести несколько рёбер (как, например, в лампочке на графе, изображающем фонарь). Каждый граф стоит на некоторой базовой линии, или “земле”, причем “линия земли” не является частью графа. На рисунке эта базовая линия показана пунктиром. Вершины, расположенные на этой линии, называются “базовыми вершинами”.

[14]От немецкого Hackenbush – рубка кустарника. Иногда это игру называют еще игрой “Лесоруб и графы”.

Два игрока по очереди убирают (стирают) с рисунка по одному ребру. При этом нам надо помнить о земном притяжении, потому что при стирании ребра, соединяющего какую-то часть графа с базовой линией, этот кусок графа "падает на землю", т.е. тоже исчезает. Например, если убрать на рисунке ребро A, то исчезают и паук, и окно, поскольку они "упадут на землю", а если удалить ребро, соединяющее паука с окном, то исчезнет только паук. Убирая ребро B, вы тем самым рубите всю яблоню. Если убрать одно из ребер в основании фонаря, то фонарь все же останется стоять, но если при следующем ходе вы уберете и второе ребро основания, то фонарь опрокинется и исчезнет. Побеждает в этой игре тот, кто стирает на картинке последнее ребро.

Упражнение. Попробуйте поиграть в эту игру сначала на простых примерах.

17.5 Функция Спрага–Гранди



Функция "Спрага–Гранди" — это функция, ставящая в соответствие каждой ситуации игры целое неотрицательное число (называемое также *числом Спрага–Гранди* или просто *числом Гранди* для этой позиции), первое не встречавшееся среди его последователей (то есть среди чисел, определяющих значения ситуаций игры, возможных при осуществлении одного хода из данной). Эту функцию, как правило, изображается ориентированным графом, некоторые из которых соединены между собой стрелками, вершинами которого являются ситуации игры, а стрелки определяют возможность перехода из одной ситуации игры в другую за один ход.

Поясним на примере того же графа для игры ним из трех кучек с двумя камнями. Последней — окончательной позиции — присвоим значение 0, т.к. из нее уже некуда попасть и мы должны присвоить ей наименьшее неотрицательное число. Тогда позиции 100 мы должны присвоить значение 1, т.к. из нее можно попасть в 0. Позиции 200 — значение 2. Тогда позиция 110 получает значение 0, а позиция 210 — значение 3 (из нее можно попасть в позиции со значениями 0, 1, 2). И так далее. Окончательный граф приведен на рисунке.

Упражнение 8. Изобразите граф игры из задачи 10 с кучками конфет 5 и 7.

Заметим, что выигрышным позициям соответствует нулевое значение функции Спрага-Гранди. И это понятно. Можно провести аналогию между В-позициями и нулевыми в смысле Спрага-Гранди. И в том, и в другом случае позиция выигрышная (нулевая), если туда можно попасть только из проигрышной (отличной от нулевой, т.к. существование нулевой позиции, из которой можно было попасть в нашу противоречит способу расстановки чисел), а позиция проигрышная (ненулевая), если из нее можно попасть в выигрышную (нулевую, действительно, если бы этого было сделать нельзя, то номер самой позиции должен быть равен нулю, т.к. в противном случае в ряду чисел отсутствовал бы ноль, что опять же противоречит минимальности выбираемого числа).

17.6 Теорема Спрага–Гранди

Для понимания следующей теоремы необходимо будет такое понятие, как *ним–сумма.* Пусть имеется два числа, записанных в двоичной системе. *Ним–сумма* — это сложение этих чисел без переноса в следующий разряд. Для удобства будем обозначать ним–сумму двух неотрицательных чисел a и b как $a \oplus b$.

Пример:

$$\begin{array}{r} 1001011101 \\ \oplus \\ 0111111001 \\ \hline 1110100100 \end{array}$$

Свойства:

1) $A \oplus A = 0$.

2) $A \oplus B = B \oplus A$.

3) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$.

Теорема Спрага-Гранди. Значение функции Спрага–Гранди некоторой игры на двоих, состоящей из нескольких компонентов, для которых значения функций Спрага–Гранди определены, есть ним–сумма этих значений.

17.7 Игры на посошок

Все знают, что некоторым людям особенно везет в тех играх, где приходится иметь дело с неодушевленными предметами...

К.Воннегут "Эффект Барнхауза."

17. На доске размером 7×7 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы они не имели **(а)** общих сторон; **(б)** общих точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

18. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперед. Вначале часовая стрелка указывает на 12, выигравшим объявляется тот, после чьего хода она укажет на 6. Кто выиграет при правильной игре? (до того, как остановиться на цифре 6, стрелка может сделать сколько угодно оборотов)

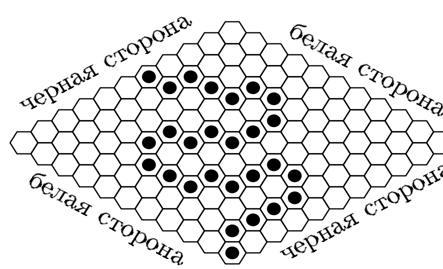
19. По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить один отрезок нельзя). Кто выиграет при правильной игре?

20. На бесконечной плоскости расположены фишка-волк и 50 фишек-овец. Двое ходят по очереди: один игрок передвигает волка, а другой — одну из овец. И вол, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что при любой первоначальной позиции вол поймает хотя бы одну овцу?

21. Двое играют на клетчатом листе бумаги 30×30. Начинающий делает разрез вдоль одной стороны квадратика от края листа, второй продолжает разрез вдоль одной стороны квадратика и т.д. Выигрывает тот, после чьего хода отвалится кусок. Кто выиграет при правильной игре?

22. На столе лежит 100 спичек. Двое ходят по очереди. За один ход можно взять 1,2,4,8, ... (любую степень двойки) спичек. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре?

23. Игра “Гекс”. В гекс играют на доске, имеющей форму ромба, составленного из правильных шестиугольников.[15] Обычно доска состоит из 11×11 шестиугольных полей (см. рисунок), но для нас ее размер может быть произвольным. Две противоположные стороны доски принадлежат игроку, имеющему белые фишки, и называются “белыми”, а две другие – игроку с черными фишками и называются “черными”. Угловые поля относятся к обеим прилегающим к ним сторонам. Игроки по очереди ставят свои фишки на свободные поля, пытаясь соединить две стороны своего цвета. Докажите, что в игре гекс ничьих не бывает.



[15]Отсюда и название игры: “гексагон” значит “шестиугольник”

18 Основная теорема топологии

ЛМОШ СУНЦ МГУ (секция математики)
&
Математический семинар
(под руководством Скопенкова А.Б.)

Преподаватель: **Скопенков Аркадий Борисович**

Количество академических часов: **2**

Форма занятия: **лекционно–семинарская**

---

1. Соображения непрерывности.

(а) Пусть X — многоугольник (или любая выпуклая фигура) на плоскости, $x \notin X$ — некоторая точка. Докажите, что существует прямая l, содержащая x и разрезающая X на две части равной площади.

(б) То же для $x \in X$.

(в) Пусть X — многоугольник на плоскости. Докажите, что существует прямая l, разрешающая X на две части с равными площадью и периметром.

(г) Можно ли разрезом вдоль одной только прямой разделить два непересекающихся многоугольника на плоскости на части равной площади?

(д) Можно ли двумя перпендикулярными разрезами разбить плоский многоугольник на четыре части равной площади?

(е) На плоскости дано $2n$ красных и $2n$ синих точек общего положения. Докажите, что существует прямая, по каждую сторону от которой находится по n красных и синих точек.

(ж) Всегда ли можно разрезать прямолинейным разрезом бутерброд с маслом на две равноценные части?

(з) То же для бутерброда с маслом и сыром.

(и) На неровном полу табуретку всегда можно поставить на все четыре ножки.

(к) Вокруг лобой выпуклой плоской фигуры можно описать квадрат.

(л) Любую плоскую выпуклую фигуру диаметра 1 можно поместить в правильном шестиугольнике, расстояние между противоположными сторонами которого равно 1.

Для плоской фигуры (например, графа) K назовем непрерывным отображением $f\colon K \to S^1$ (в окружность) семейство плоских единичных векторов $f(x)$ в точках $x \in K$, непрерывно зависящих от x. Далее все отображения считаются непрерывными и прилагательное 'непрерывное' опускается.

Обозначим диск $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, интервал $I = [0, 1]$ и окружность $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.

2. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) Любое отображение $f\colon D^2 \to D^2$ диска в себя имеет неподвижную точку, т.е. такую точку $x \in D^2$, что $f(x) = x$.

(ii) Не существует отображения диска в его граничную окружность, тождественного на этой окружности, т.е. отображения $f\colon D^2 \to S^1$, для которого $f(x) = x$ при $x \in S^1$ (или, говоря неформально, барабан нельзя смять на его обод).

3. Частный случай основной теоремы топологии.

(а) Утверждения предыдущей задачи верны.

(б) Любые два пути $s_1, s_2 : I \to I^2$, соединяющие противоположные вершины $(0, 0)$ с $(1, 1)$ и $(1, 0)$ с $(0, 1)$ квадрата I^2, пересекаются.

(в)* Любые два замкнутых подмножества $A_1, A_2 \subset I^2$, отделяющие противоположные стороны $0 \times I$ от $1 \times I$, $I \times 0$ от $I \times 1$ квадрата I^2, пересекаются.

(г)* Квадрат I^2 нельзя покрыть замкнутыми подмножествами диаметра $< 1/2$ без тройных пересечений (т.е. *размерность* квадрата равна 2).

4. (а) Любое подобие плоскости с коэффициентом $k < 1$ имеет неподвижную точку.

(б) Любое движение пространства $\mathbb{R}^3$, имеющее неподвижную точку, имеет и неподвижную прямую.

5. Два отображения $f, g\colon S^1 \to S^1$ называются *гомотопными* (обозначение: $f \simeq g$), если существует семейство $h_t\colon K \to S^1$ отображений, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого $h_0 = f$ и $h_1 = g$.

Тождественное отображение окружности ($f(x) = x$) не гомотопно постоянному ($g(x) = (1, 0)$).

6. Основная теорема топологии.

Стандартная n–листная обмотка — это отображение $w_n\colon S^1 \to S^1$, такое что $w_n(z) = z^n$. Тогда

(а) w_n не гомотопно w_m, коль скоро $m \neq n$;

(б) любому отображению $f\colon S^1 \to S^1$ соответствует целое число $\deg(f)$, такое что f гомотопно $w_{deg(f)}$. *Степенью* $\deg f$ отображения $f\colon S^1 \to S^1$ называется число оборотов вектора $f(x)$ (вокруг его неподвижного начала) при однократном обходе точкой x окружности S^1 против часовой стрелки. (Это определение нестрого; см. строгое определение в **Д. В. Аносов.** «Отображения окружности, векторные поля и их применения».)

(в) $\deg(w_n) = n$ и отображения $g, h\colon S^1 \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда $\deg(g) = \deg(h)$.

(г) Отображение $\deg\colon \{S^1 \to S^1\}/$гомотопия $\to \mathbb{Z}$ является биекцией (см. В.Г. Болтянский, В.А. Ефремович, “Наглядная топология”, или В.В. Прасолов, “Наглядная топология”).

7. Основная теорема алгебры. Любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет корень.

Задачи тренировочных соревнований

19 Вступительная олимпиада

1. Докажите, что в последовательности с общим членом

$$a_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$$

бесконечно много составных нечетных чисел.

2. $ABCD$ — описанная трапеция, E — точка пересечения диагоналей, r_1, r_2, r_3, r_4 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники $\triangle BAE$, $\triangle BCE$, $\triangle CDE$, $\triangle DAE$ соответственно. Докажите, что

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

3. Некто гуляет по периметру квадратного луга. На лугу (не по периметру) растут тонкие (нулевой толщины) деревья в количестве N штук. Этот некто в каждый момент времени записывает, сколько деревьев он видит (остальные деревья — за теми, которые он видит). Для каких пар натуральных чисел a и b при некотором расположении деревьев среди записанных чисел могут оказаться и a и b?

4. Докажите, что если числа a, b, c удовлетворяют неравенствам

$$a + b + c > 0, \quad ab + bc + ca > 0, \quad abc > 0,$$

то эти числа положительные.

5. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар четно.

20 Математический бой

20.1 Дополнение к правилам

Что такое “задача–аукцион”?

Использование задачи–аукциона происходит по следующему сценарию:

1. Перед началом боя команды вручают жюри бумажку лицевой стороной вниз, на которой присутствует одна запись вида

$$\boxed{\quad n = \underline{\qquad}. \quad}$$

2. Если предложенные значения n совпадают, то проводится обычный конкурс капитанов. Дальше бой идет по обычным правилам, но первый вызов обязательно делается на задачу № 0. При этом правильным ответом в задаче считается предложенное обеими командами значение . (Это значит, что условие задачи изменяется с “для какого наименьшего n ...” на “докажите, что для данного n ...”.)

3. Если предложены разные значения, команда, предложившая меньшее значение, выставляет докладчика по

задаче № 0 (команда соперников выставляет оппонента). Раунд и дальнейший ход боя такие же, как при обычном вызове. При этом для докладывающей команды правильным ответом в задаче считается любое значение, меньшее предложенного командой соперников. Правильным же ответом для оппонирующей команды при полной перемене ролей считается ровно предложенное ими значение n (см. пункт 1). (Это значит, что для каждой команды условие задачи изменяется с “для какого наименьшего n ...” на “докажите, что для данного n ...”.)

4. После подачи бумажек изменение значения n уже невозможно.

20.2 Задачи математического боя

0. (**Задача-аукцион!**) В пространстве даны n точек с целыми координатами, такие что никакие три не лежат на одной прямой. При каком наименьшем n обязательно какие-то три из них образуют треугольник, все координаты точки пересечения медиан которого — целые числа? (*Шарич В.З., по известным мотивам.*)

---

1. Найдите все $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x+f(y)) = f(x)f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

2. Верно ли, что существует бесконечно много попарно не подобных треугольников, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) длины сторон каждого треугольника — в совокупности взаимно простые натуральные числа;

(ii) площадь каждого треугольника — целое число;

(iii) длины всех высот каждого треугольника — нецелые числа?

3. Существуют ли такие $a, b \in \mathbb{R}$, что $a+b \notin \mathbb{Q}$ и что $\forall n \geqslant 2$ справедливо $a^n + b^n \in \mathbb{Q}$?

4. Треугольники ABC, AB_AC_A, A_CB_CC, A_BBC_B одинаково ориентированы и подобны при указанном порядке обхода вершин. Докажите, что середины отрезков A_BA_C, C_AC_B, B_CB_A образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$. (*Дубровский В.Н.*)

5. Назовем два числа x и y *похожими*, если

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_\varphi, c_0, c_1, \ldots],$$
$$y = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_\psi, c_0, c_1, c_2, \ldots]$$

(разложения в цепную дробь). Докажите, что числа $2\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $2\cos\dfrac{4\pi}{7}$ и $2\cos\dfrac{8\pi}{7}$ похожи. (*Устинов А.В.*)

6. Прямая ℓ пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B' и C' соответственно. При этом A и T (точка пересечения медиан треугольника) расположены по одну сторону от ℓ. Докажите, что

$$S_{BB'TC'} + S_{CC'TB'} \geqslant \frac{4}{9} S_{\triangle ABC}.$$

7. Вычислите в зависимости от чисел $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$$\sum_{k,l,i,j \geqslant 0,\ k+l=a,\ i+j=b} \frac{(-1)^j}{i!j!(2k-i)!(2l-j)!}.$$

(*Шарич В.З.*)

8. На плоскости даны окружность ω и точка M вне ее. При помощи одной линейки проведите из M касательные к ω.

9. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)},$$

если $x > 0, y > 0, z > 0$.

20.3 Протокол боя

Списки команд:

Команда **СУНЦ–0**

1. Михайлов Дмитрий (К)
2. Майоров Денис (З)
3. Гарин Павел
4. Ерпылев Алексей
5. Вылегжанин Евгений
6. Микушкин Марат
7. Янчиков Михаил
8. Бородинов Николай
9. Добровольский Анатолий

Команда **СУНЦ–1**

1. Кубасов Роман (К)
2. Лупанов Антон (З)
3. Казначеев Андрей
4. Щигорцов Игорь
5. Уланов Максим
6. Мудрова Кристина
7. Дорджиева Айса
8. Крашенинникова Алина
9. Кулибаба Мария

Конкурс капитанов: Ответы, предложенные командами в задаче–аукционе, были таковы: СУНЦ–0 — 81, СУНЦ–1 — 34.

Конкурс капитанов выиграла команда СУНЦ–1.

Команда СУНЦ–0		**Ход Боя**		**Команда СУНЦ–1**	
Представитель		**№**	**Вызов**		**Представитель**
Гарин П.	0	0	$\longrightarrow$	12	Лупанов А.
Михайлов Д.	12	1	$\longleftarrow$	0	Уланов М.
Майоров Д. *	——	5	$\rightleftarrows$	——	Мудрова К. *(**↓)
	0			6	Лупанов А.
————	0	2	$\rightleftarrows$	6	————
Микушкин М. *	0	6	$\longrightarrow$	12	Кубасов Р. *
Янчиков М. *	5	9	$\leftrightarrows$	0	Мудрова К. **
Михайлов Д.	0	7	$\leftrightarrows$	10	Казначеев А.
Бородинов Н. ***	3+0	8	$\dashleftarrow\dashrightarrow$	6+1	Щигорцов И.
Майоров Д.	11	3	$\times\!\longleftarrow$	0	————
	31			**53**	

Победила команда СУНЦ–1!

Жюри: Шарич В.З., Пономарев А.А.

21 Заключительная олимпиада

ДОВЫВОД

1. $\mathbb{N}$ разбито на два подмножества $\mathbb{N} = A\coprod B$, замкнутых относительно умножения трех элементов, т.е.

$$\forall x, y, z \in A \;\; x \cdot y \cdot z \in A; \quad \forall x, y, z \in B \;\; x \cdot y \cdot z \in B \qquad (*)$$

(а) Докажите, что хотя бы одно из этих множеств замкнуто относительно умножения двух элементов.

(б) Приведите пример разбиения, удовлетворяющего $(*)$, при котором ровно одно множество замкнуто относительно умножения двух элементов. (*Гашков С.Б.*)

2. Решите уравнение $\quad x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + \cfrac{1}{x}}}.$

3. Точка M находится внутри треугольника ABC. Найдите образы сторон треугольника при проективном преобразовании, отправляющем точку M на бесконечность, если точки A, B, C при этом неподвижны. (*Шарич В.З.*)

4. В некотором обществе любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этом обществе все имеют одинаковое число знакомых.

5. Точка M лежит на окружности, описанной около данного равностороннего $\triangle ABC$. Докажите, что величина $MA^4 + MB^4 + MC^4$ не зависит от выбора точки M.

ВЫВОД

6. Докажите, что если для описанного четырехугольника $ABCD$ имеет место условие $p^2 = AC^2 + BD^2$, где p — полупериметр четырехугольника, то он является ромбом.

7. В углу доски $m \times n$ стоит ладья. Двое по очереди передвигают её по горизонтали или по вертикали. При этом все поля, через которые ладья прошла, из доски выбрасываются и ходить по ним или через них нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Докажите, что число $\binom{n}{k} \neq 1$ нечетно тогда и только тогда, когда числа $n, k \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условию: если в каком-либо разряде двоичной записи числа k стоит 1, то в том же разряде двоичной записи числа n также стоит 1.

Содержание

Задачи тренировочных соревнований

Летняя математическая олимпиадная школа
СУНЦ МГУ 2005

Оригинал-макет подготовил *В. Шарич*

Подписано в печать 1.12.2006 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 5,75.
Доп. тираж 1000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП
«Полиграфические ресурсы»

Специализированный учебно-научный центр
Школа им. А.Н. Колмогорова
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
121357, Москва, ул. Кременчугская, д. 11., тел. (495) 445-46-34
www.pms.ru

Кафедра математики СУНЦ МГУ
(495) 445-40-54, www.math.pms.ru, e-mail: math@pms.ru

Отдел нового приема СУНЦ МГУ
(495) 445-11-08, www.pms.ru/postuplenie, e-mail: priem@pms.ru

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11., тел. 241-72-85
e-mail: biblio@mccme.ru
