

Случайные блуждания и электрические цепи

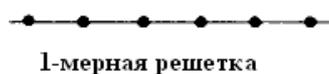
Дмитрий Баранов, Михаил Скопенков, Алексей Устинов

Цель нашего проекта — доказать следующую теорему и изучить смежные вопросы.

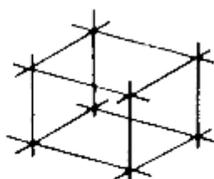
Теорема Пойа. (а) Если человек случайным образом перемещается по 2-мерной решетке, то он вернется в начальную точку с вероятностью 1.

(б) Если же он перемещается по 3-мерной решетке, то вероятность его возврата в начальную точку строго меньше 1.

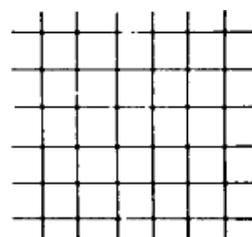
Точные формулировки даны ниже. Предлагаемый подход к доказательству основан на физической интерпретации. Никаких специальных знаний физики не требуется.



1-мерная решетка



3-мерная решетка



2-мерная решетка

1. Одномерные блуждания

Мы сначала сформулируем задачу и лишь потом дадим необходимые определения.

1.1. Человек ходит по отрезку улицы, состоящему из 5 кварталов. Начав свой путь на границе кварталов в точке x , он с вероятностью $1/2$ перемещается на один квартал влево и с вероятностью $1/2$ — на один квартал вправо. Подойдя к границе кварталов, он опять выбирает направление движения случайным образом. Если он оказывается в точке 5 (его дом) или в точке 0 (бар), то он прекращает движение: см Рис 1.



Рис. 1: Случайное движение по улице; см. задачу 1.1.

(А)* Напишите компьютерную программу, моделирующую движение этого человека. Запустите ее много раз и определите процент числа случаев, в которых он приходит домой. Вы можете использовать этот способ для угадывания ответов в последующих задачах.

E-mail address: dimbaranov@mail.ru, skopenkov@rambler.ru, ustinov.alexey@gmail.com

(В) Пусть $P_T(x)$ — вероятность того, что человек, начавший свое движение в точке x и сделавший не более T ходов, оказался дома. Заполните следующую таблицу десятичными дробями с точностью до сотых.

Таблица 1: Вероятности $P_T(x)$ для малых T

x	0	1	2	3	4	5
T						
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	1.00
2						
3						
4						

(С) Найдите вероятность $P(x)$ того, что человек дойдет до дома через какое-то количество ходов.

Определение. (А) Предположим, что у некоторого эксперимента имеется n равновероятных исходов, и событие X происходит ровно в m из них. Тогда вероятностью события X называется число $P_1(X) := m/n$.

Например, вероятность выпадения орла при бросании монеты — $1/2$; вероятность выпадения 6 очков на кубике — $1/6$; вероятность пойти направо по нашей улице — $1/2$.

(В) Теперь предположим, что событие X зависит от последовательности таких экспериментов. Последовательность из T экспериментов имеет n^T возможных исходов. Предположим, что событие X происходит ровно при m_T исходов из них. Тогда вероятностью события X называется число $P_T(X) := m_T/n^T$.

Например, есть ровно 4 возможных исхода при бросании монеты 2 раза:

1-ый бросок	орел	орел	решка	решка
2-ой бросок	орел	решка	орел	решка

Пусть событие X состоит в появлении решки хотя бы один раз. Событие X происходит в 3 случаях из 4 возможных. Поэтому вероятность события X есть $P_2(X) = 3/4$.

Вероятность получения более 10 очков при бросании двух кубиков — $1/12$, так как это событие происходит в ровно 3 случаях ($5 + 6$, $6 + 5$ или $6 + 6$) из 36 возможных. Вероятность того, что человек, начавший с точки 3, сдвинется вправо два раза подряд составляет $1/4$.

(С) Пусть теперь событие X зависит от бесконечной последовательности таких экспериментов. Мы будем называть число $P(X)$ вероятностью события X , если вероятности $P_T(X)$ стремятся к числу $P(X)$ при стремлении T к бесконечности¹.

Например, вероятность выпадения решки хотя бы один раз в бесконечной серии бросков составляет $P(X) = 1$, так как $P_T(X) = 1 - 1/2^T$ стремится к 1 при стремлении T к бесконечности.

То, что вероятности $P(X)$ существуют для всех событий X , рассматриваемых в проекте, можно использовать без доказательства.

¹Формально это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число T_0 такое, что для каждого $T > T_0$ выполнено $|P(X) - P_T(X)| < \varepsilon$.

1.2. Петя и Паша играют на монетки; всего у них есть 5 монеток; в каждом раунде Петя выигрывает у Паши одну монетку с вероятностью $1/2$ и проигрывает с вероятностью $1/2$; они играют до тех пор, пока у Пети не станет 0 монеток (он проиграл) или 5 (он выиграл все монеты Паши). Найдите вероятность $P(x)$ того, что Петя выиграет, начав игру с x монетками.

1.3. Предположим, нашего "путешественника" сносит в одну сторону; точнее, пусть он каждый раз перемещается вправо с вероятностью p и влево с вероятностью $q = 1 - p$. Найдите вероятности $P(x)$ в этом случае.

1.4. Предположим, что вы играете на деньги; сначала у вас 20 монет, а у вашего соперника — 50 монет; в каждой игре вы выигрываете одну монету с вероятностью 0.45 и проигрываете с вероятностью 0.55; игра продолжается до тех пор, пока у кого-либо не закончатся деньги. Найдите вероятность своего разорения.

Определение. *Электрическая цепь* — это связный конечный граф, у которого каждому ребру xy приписано положительное вещественное число, называемое его *проводимостью*² $C(xy)$, и задано два непересекающихся выделенных множества вершин (P и N). Вершины из множества N соединены с отрицательным полюсом батарейки и землей, а вершины из множества P — с положительным; см рисунок 2.

Потенциалы вершин $v(x)$ определяются следующими аксиомами:

1. *Граничные условия.* Если $x \in N$, то $v(x) = 0$. Если $x \in P$, то $v(x) = 1$.
2. *Закон Кирхгофа.* Если $x \notin P \cup N$, то $\sum_{xy} C(xy) (v(x) - v(y)) = 0$, где суммирование ведется по всем ребрам xy , содержащим вершину x .

Число $i(xy) := C(xy) (v(x) - v(y))$ называется *током*, идущим по ребру xy ; $i(x) := \sum_{xy} i(xy)$ — *током*, втекающим в цепь через вершину x (так, $i(x) = 0$ для каждого $x \notin P \cup N$ по аксиоме 2); $C := \sum_{x \in P} i(x)$ называется *эффективной проводимостью* цепи между множествами P и N ; $Q := \sum_{xy} C(xy) (v(x) - v(y))^2$, где суммирование ведется по всем ребрам цепи, называется *тепловой мощностью* цепи.

1.5. Одинаковые резисторы соединены последовательно и подключены к батарейке в 1 вольт как показано на рисунке 2. Найдите потенциалы $v(x)$ в точках $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Вы можете использовать программы, эмулирующие электрические цепи, для угадывания ответа.

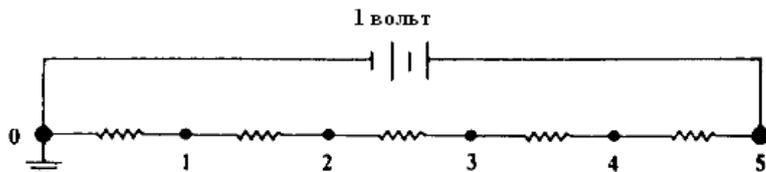


Рис. 2: Электрическая цепь; см. задачу 1.3.

²Величина, обратная проводимости, называется *сопротивлением*.

1.6. Рассмотрим цепь с вершинами $0, 1, \dots, n$, ребрами $01, 12, \dots, (n-1)n$ единичной проводимости, и выделенными множествами $N = \{0\}$, $P = \{n\}$.

(А) *Принцип максимума.* Функция $v(x)$, удовлетворяющая аксиоме 2 достигает своего максимума и минимума в вершинах из множества $P \cup N$.

(В) *Единственность.* Если $v(x)$ и $u(x)$ — две функции, удовлетворяющие аксиомам 1–2, то $v(x) = u(x)$ для всех x .

(С) Найдите потенциалы $v(x)$ и эффективную проводимость данной цепи. К чему они стремятся при стремлении числа n к бесконечности?

1.7. Сформулируйте и докажите 1-мерную теорему Пойа.

2. Двумерные блуждания

2.1. Рассмотрим город, схема которого приведена на рисунке 3 слева. Отрезки обозначают улицы. Пути отхода помечены буквой E , а буквой P помечены точки, занятые полицией. Найдите с точностью до сотых вероятность $P(x)$ того, что начав свой путь в точке x , человек убежит, а не попадет в руки полиции. Из точки $x = (a, b)$ он перемещается в каждую из точек $(a+1, b)$, $(a-1, b)$, $(a, b+1)$, $(a, b-1)$ с вероятностью $1/4$. Если он достигает одной из точек E или P , то его передвижения заканчиваются.

2.2. Найдите потенциалы $v(x)$ в цепи из единичных резисторов на рисунке 3 справа.

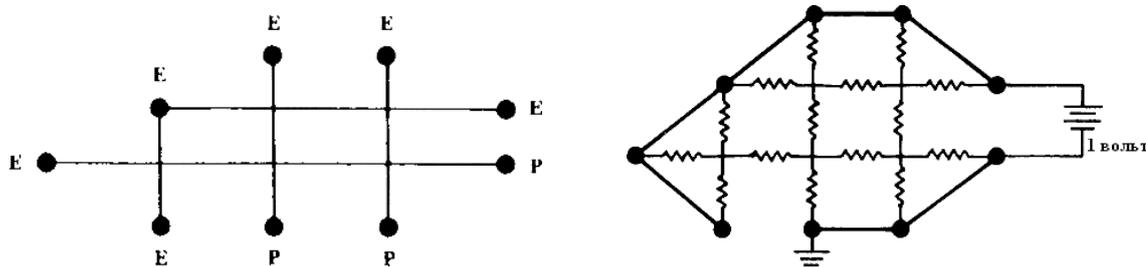


Рис. 3: Случайное движение по городу и электрическая цепь; см. задачи 2.1 и 2.2.

2.3. Паук перемещается случайным образом по ребрам

(А) куба; (В) октаэдра; (С) додекаэдра; (D) икосаэдра;

если он начинает движение в точке a , то какова вероятность того, что он достигнет противоположной вершины h быстрее, чем вернется в начальную вершину a ; см. рисунок 4 слева?

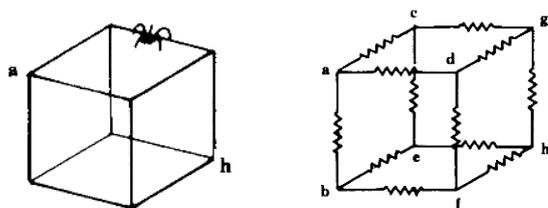


Рис. 4: Случайное блуждание по кубу и электрическая цепь; см. задачи 2.3(A) и 2.5(A).

- 2.4. Следующие преобразования сохраняют эффективную проводимость цепи:
- (А) замена двух резисторов, соединенных последовательно, на один резистор проводимости $1 / \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$; см. рисунок 5 слева;
- (В) замена двух параллельно соединенных резисторов на один резистор с проводимостью $C_1 + C_2$; см. рисунок 5 справа;
- (С) объединение двух вершин с одинаковыми потенциалами в одну новую вершину.

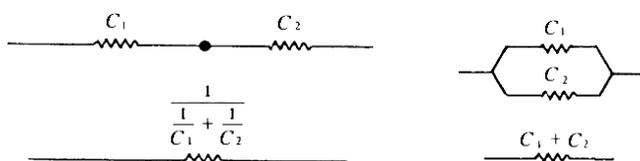


Рис. 5: Последовательное и параллельное соединение; см. задачу 2.4.

- 2.5. Найдите эффективную проводимость между
- (1) противоположными вершинами; (2)* смежными вершинами;
- (А) куба; (В) октаэдра; (С) додекаэдра; (D) икосаэдра;
- с ребрами единичной проводимости; см рисунок 4 справа.

- 2.6. Пьяный турист выходит из отеля и перемещается случайным образом по улицам Парижа, схема центра которого приведена на рисунке 6 слева. Найдите вероятность того, что он дойдет до Триумфальной арки до того, как доберется до окраины города.

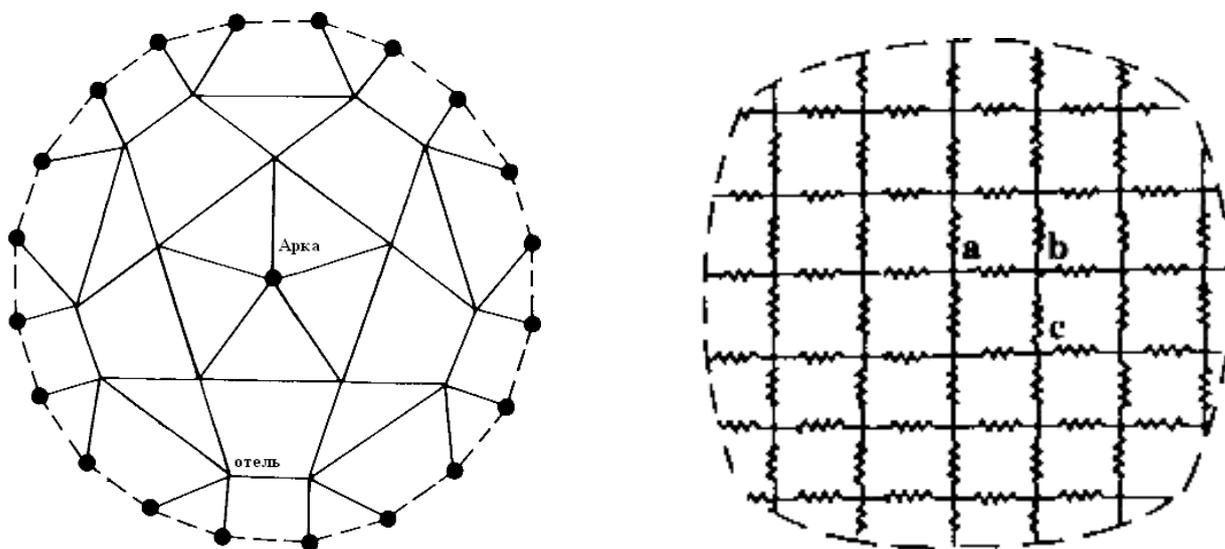


Рис. 6: Туристическая карта Парижа и решеточная цепь; см. задачи 2.6 и 2.7.

- 2.7. Проводимость между вершинами (А)* a и b ; (В)** a и c ; двумерной решетки из единичных резисторов равна 2 и $\pi/2$, соответственно; см. Рис. 6 справа.

Для 2-мерной решетки в определении потенциала мы добавляем еще одну аксиому:

3. $v(x)$ стремится к $1/2$ при стремлении расстояния между x и некоторой фиксированной вершиной к бесконечности.

Разрешается пользоваться без доказательства существованием функции $v(x)$, удовлетворяющей аксиомам 1–3.

1. для любых b_1, \dots, b_n система имеет ровно одно решение (в частности, при $b_1 = \dots = b_n = 0$ существует только нулевое решение);
2. для некоторых b_1, \dots, b_n система неразрешима, а для некоторых (в том числе нулевых) имеет бесконечно много решений.

(В)* *Задача Дирихле.* Докажите, что для любой конечной электрической цепи существует функция $v(x)$, удовлетворяющая аксиомам 1–2.

3.3. (А) Вариационный принцип. Пусть $v(x)$ — произвольная функция на вершинах конечной электрической цепи, удовлетворяющая аксиоме 1, но не обязательно аксиоме 2. Занумеруем вершины графа числами $1, \dots, n$ и пусть $1, \dots, k$ — внутренние вершины. Обозначим $v_1 := v(1), v_2 := v(2), \dots, v_n = v(n)$. Будем рассматривать v_1, \dots, v_k как переменные. Рассмотрим тепловую мощность $Q(v_1, \dots, v_k) := \sum_{xy} C(xy) (v_x - v_y)^2$ как функцию переменных v_1, \dots, v_k . Докажите, что функция $Q(v_1, \dots, v_k)$ принимает наименьшее значение, когда функция $v(x)$ — гармоническая.

(В)* Докажите, что для функции $Q(v_1, \dots, v_k)$ существует ровно один набор значений v_1, \dots, v_k , при котором она достигает своего минимального значения. Используя это, дайте второе доказательство того факта, что для конечной электрической цепи функция $v(x)$, заданная аксиомами 1–2, существует и единственна.

(С) *Закон сохранения энергии.* Докажите, что минимальное значение величины $Q(v_1, \dots, v_k)$ численно равно эффективной проводимости C .

(D) *Принцип монотонности.* Докажите, что если в цепи одну проводимость увеличить, то эффективная проводимость не уменьшится.

(Е) Из 2-мерной решетки выбросили произвольное множество ребер. Докажите, что по-прежнему случайное блуждание с вероятностью 1 вернется в исходную вершину.

Предположим, что имеется граф Γ , у которого сопротивление каждого ребра равно 1. Возьмем в графе Γ два смежных ребра AB и AC . Эти ребра назовем *эквивалентными*, если существует перестановка вершин графа, переводящая соединенные ребром вершины в соединенные ребром вершины, при которой A переходит в A и B — в C . Вершину графа назовем *центром симметрии* графа Γ , если все ребра, содержащие ее, эквивалентны. Граф Γ называется *правильным*, если все его вершины — центры симметрии графа.

Примеры правильных графов: правильные многогранники любой размерности; правильные решетки на евклидовой плоскости, плоскости Лобачевского и их многомерных аналогах; симметричные решетки на торе и т. п. Нетривиальный пример: граф ромбододекаэдра. Это многогранник, который получается, если к каждой грани куба приставить по четырехугольной пирамиде так, что все треугольники, граничащие по ребрам куба, сольются в ромбы. Поверхность ромбододекаэдра состоит из 12 ромбов. Он нетривиален тем, что его вершины имеют разную степень (3 и 4).

3.4. (А) Пусть правильный граф содержит n вершин, A_1 и A_2 — соседние вершины степеней k_1 и k_2 , соответственно. Докажите, что сопротивление между ними равно

$$\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

(В) Если же взять 2-мерную решетку, то $1/n$ в последней формуле нужно заменить нулем.

3.5. К двум соседним вершинам проволочного (А) икосаэдра; (В) додекаэдра; подвели напряжение так, что по соединяющему их ребру потек ток I . Какой при этом будет течь ток по диаметрально противоположному ребру?

3.6. * Докажите, что суммы $D_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}$ и $F_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$ равны друг другу. Как эти суммы связаны с сопротивлением многомерного куба? В качестве следствия получите, что порядок вхождения двойки в число $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$ стремится к бесконечности с ростом n .

4. Трехмерные блуждания



Рис. 8: (Слева) бинарное дерево глубины 3; (в центре) модифицированное бинарное дерево глубины 3; (справа) разрешенные пересечения ребер в этом дереве; см. задачи 4.1, 4.2 и 4.4.

4.1. Найдите сопротивление бинарного дерева глубины (А) 3; (В) 2010, составленного из единичных резисторов (см. рис. 8 слева).

4.2. Найдите сопротивление *модифицированного* бинарного и троичного деревьев глубины 2010, в которых каждый резистор на k -ом уровне заменяется на 2^k последовательно соединенных единичных резисторов (см. рис. 8 в центре).

4.3. Какие из деревьев, упомянутых (А) в задаче 4.1; (В) в задаче 4.2; можно вырезать из трехмерной решетки?

4.4. А если разрешаются пересечения (см. рис. 8 справа) ребер на равном расстоянии от корня?

4.5. Докажите теорему Пойа для 3-мерной решетки.

5. Сопротивление кольца*

Во всех задачах этого раздела будет фигурировать квадратная металлическая сетка. Будет предполагаться, что все ее узлы — это точки двумерной целочисленной решетки. Соединены друг с другом только соседние узлы (расстояние между которыми равно единице). Сопротивление ребра между любыми соседними узлами также считается равным единице.

5.1. Источник тока подключается к узлам сетки с координатами $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Докажите, что в узлах $(2, 2)$ и $(3, 2)$ будут одинаковые потенциалы (см. замечание в задаче 3.4(B)).

5.2. Из сетки вырезан квадрат размерами $n \times n$, граничные точки которого соединены шиной с нулевым сопротивлением. Докажите, что сопротивление между любым узлом квадрата и его границей не превосходит \sqrt{n} .

5.3. В условиях задачи 5.2 источник тока подключен к внутреннему узлу квадрата и к границе. Потенциал на границе равен нулю. Докажите, что если источник подает ток ε , то в каждой из точек квадрата потенциал не превосходит $\varepsilon\sqrt{n}$.

5.4. Для функций, заданных в узлах целочисленной решетки определим

$$\Delta f(x, y) := f(x - 1, y) + f(x + 1, y) + f(x, y - 1) + f(x, y + 1) - 4f(x, y).$$

Пусть $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Докажите, что для функции $f(x, y) := \ln r(x, y)$ (при $r(x, y) \geq 2$) выполнено $\Delta f(x, y) = O\left(\frac{1}{r^4(x, y)}\right)$.

Здесь и далее для двух функций A и B запись $A = O(B)$ означает, что для некоторой положительной константы c всегда выполняется неравенство $|A| \leq cB$.

5.5. Из металлической сетки вырезано кольцо с внутренним радиусом $r_1 n$ и внешним — $r_2 n$ (центры обоих кругов — в начале координат). Если некоторое ребро разрезано, то сопротивление оставшегося куска пропорционально его длине. На внутренний контур кольца подается напряжение $\ln r_1$, а на внешний — $\ln r_2$. Докажите, что в каждой точке кольца (x, y) потенциал имеет вид $U_n(x, y) = \ln r(x, y) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

5.6. С помощью равенства $\operatorname{arctg} x = x + O(x^3)$ докажите, что при $0 \leq y < R$ выполнено $\frac{R}{R^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y+1}{R} - \operatorname{arctg} \frac{y}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right)$.

5.7. Докажите, что $\sum_{y=0}^{R-1} \frac{R}{R^2 + y^2} = \frac{\pi}{4} + O\left(\frac{1}{R}\right)$.

5.8. Пусть в условиях задачи 5.5 имеется дополнительное ограничение $r_2 > 3r_1/2$ (достаточное для того, чтобы квадрат, описанный около внутреннего круга, целиком содержался бы во внешнем). Докажите, что между внутренним и внешним контурами течет ток $2\pi + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Выведите отсюда формулу для сопротивления кольца

$$R(r_1 n, r_2 n) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (1)$$

5.9. Докажите, что формула (1) выполняется и без дополнительного ограничения $r_2 > 3r_1/2$.

5.10. С помощью равенства (1) уточните оценки в задачах 5.2, 5.3 и докажите формулы с более точными остаточными членами в задачах 5.5 и 5.8:

$$U(x, y) = \ln r(x, y) + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \quad R(r_1 n, r_2 n) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

6. Сложные задачи*

6.1. Теорема Лиувилля. Пусть заданная на \mathbb{Z}^2 функция $f(m, n)$ удовлетворяет неравенству $0 \leq f(m, n) \leq 1$ и условию

$$f(m, n) = \frac{1}{4} (f(m-1, n) + f(m+1, n) + f(m, n-1) + f(m, n+1)) \quad (2)$$

для всех $m, n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $f(m, n)$ является константой.

6.2. Существование потенциалов. Докажите, что существует такая функция $f(m, n)$ на \mathbb{Z}^2 , что $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = 1$, для каждого $(m, n) \neq (0, 0), (0, 1)$ условие (2) выполняется, и $f(m, n)$ стремится к $1/2$ при стремлении $r(m, n) := \sqrt{m^2 + n^2}$ к бесконечности.

6.3. Функция Грина. Пусть $f(m, n)$ — сопротивление 2-мерной решетки между началом координат и точкой (m, n) .

(А) Докажите, что для каждого $(m, n) \neq (0, 0)$ условие (2) выполнено.

(В) Докажите, что $f(m, n) = g(r(m, n)) + O(1)$ для некоторой функции $g(x)$.

(С) Докажите, что сопротивление между центром и границей диска радиуса r , вырезанного из 2-мерной решетки равно $\frac{1}{2\pi} \ln r + O(1)$.

(D) Докажите, что $f(m, n) = \frac{1}{2\pi} \ln r(m, n) + O(1)$.

6.4. Найдите с точностью до сотых вероятность того, что при случайном блуждании по 3-мерной решетке мы вернемся в начальную точку.

6.5. Робот ходит по вершинам 3-мерной решетки, переходя каждый раз в одну из соседних вершин. В одной из вершин находится клад; робот находит его, когда оказывается в вершине с кладом. Существует ли программа, управляющая движением робота и использующая конечный объем памяти и генератор случайных чисел, такая, что робот найдет клад с вероятностью 1?

7. Указания и решения

1.1 (А) Правильность работы программы проверяется следующим образом: разность между “настоящей” и посчитанной вероятностями должна быть пропорциональна числу $\frac{1}{\sqrt{n}}$, где n — число экспериментов.

(В) Ответ смотрите в таблице.

Таблица 2: Вероятности $P_T(x)$ и $P(x)$

T	x	0	1	2	3	4	5
1		0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	1.00
2		0.00	0.00	0.00	0.25	0.50	1.00
3		0.00	0.00	0.13	0.25	0.63	1.00
4		0.00	0.06	0.13	0.38	0.63	1.00
	$P(x)$	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00

(С) Ответ: $P(x) = x/5$; см последнюю строку в таблице выше.

Доказательство. Рассмотрим случайное блуждание по точкам $0, 1, 2, \dots, n$. Обозначим за $P(x)$ вероятность дойти из x до N раньше, чем до 0 . Рассмотрим получившуюся функцию $P(x)$, определенную в точках $x = 0, 1, 2, \dots, n$. Она обладает следующими свойствами:

- $P(0) = 0$ и $P(n) = 1$.
- $P(x) = \frac{1}{2}P(x-1) + \frac{1}{2}P(x+1)$ для каждого $x = 1, 2, \dots, n-1$.

Свойство 1 следует из того, что при достижении точек 0 и n перемещения заканчиваются; для игры на монетки это означает конец игры. Свойство 2 заключается в том, что вероятность попасть домой из внутренней точки x равна среднему арифметическому вероятностей попадания домой из соседних точек. Свойство 2 выводится из следующего утверждения:

Базовое Утверждение. Пусть E — некоторое событие, F и G — два события, из которых всегда случается ровно одно. Тогда

$$P(E) = P(F) \cdot P(E \text{ последует за } F) + P(G) \cdot P(E \text{ последует за } G).$$

В нашем случае E = “человек дойдет до бара”, F = “первый раз он пойдет налево” и G = “первый раз он пойдет направо”. Тогда получаем $P(E) = P(x)$, $P(F) = P(G) = 1/2$, $P(E \text{ последует за } F) = P(x-1)$, $P(E \text{ последует за } G) = P(x+1)$ и свойство 2 доказано.

Из этих двух свойств вытекает, что $P(x)$ представляет собой арифметическую прогрессию $P(x) = x/n$.

1.2 Ответ: $P(x) = x/5$; эта задача эквивалентна задаче 1.1(С).

1.3 Ответ: $P(x) = \frac{(q/p)^x - 1}{(q/p)^5 - 1}$.

Указание: Рассуждайте так же, как в решении задачи 1.1(С). Покажите, что свойства 1–2 надо заменить на такие:

- $P(0) = 0$ и $P(n) = 1$.
- $P(x) = qP(x-1) + pP(x+1)$ для каждого $x = 1, 2, \dots, n-1$.

Выберите A и B такими, чтобы функция $f(x) = A(q/p)^x + B$ удовлетворяла новым свойствам 1–2.

1.4 Ответ: $\approx 99.995\%$. Точное значение: $1 - \frac{(0.55/0.45)^{20} - 1}{(0.55/0.45)^{70} - 1}$; смотрите решение задачи 1.3.

1.5 Ответ: $v(x) = x/5$. *Указание.* Из аксиом 1–2 следует, что функция $v(x)$ будет линейной для этой цепи.

1.6 (А) Пусть M — максимум функции $v(x)$. Тогда если $v(x) = M$ для $x \notin P \cup N$, то это же равенство должно быть выполнено для $v(x-1)$ и $v(x+1)$ так как $v(x)$ — среднее арифметическое $v(x-1)$ и $v(x+1)$. Если $x-1$ оказалась внутренней точкой, применяем то же самое рассуждение и получаем $f(x-2) = M$; продолжая рассуждение, получаем $f(0) = M$. Для минимального значения аналогично.

(В) Положим $h(x) = v(x) - u(x)$. Тогда для любой внутренней точки x имеем:

$$\frac{h(x-1) + h(x+1)}{2} = \frac{v(x-1) + v(x+1)}{2} - \frac{u(x-1) + u(x+1)}{2}$$

и поэтому функция $h(x)$ также удовлетворяет аксиоме 2. Но $h(x) = 0$ при x из $P \cup N$; из принципа максимума получаем, что максимальное и минимальное значения h равны 0. Значит, $h(x) = 0$ и $v(x) = u(x)$.

(С) Ответ: $v(x) = x/n$, $C = 1/n$; $C \rightarrow 0$ и $v(x) \rightarrow 0$ для каждого фиксированного x при $n \rightarrow \infty$.

Указание: Легко проверить, что функция $f(x) := x/n$ удовлетворяет аксиомам 1–2. Из единственности (см 1.6(В)) следует, что $v(x) = x/n$.

1.7 Теорема. При случайном блуждании по 1-мерной решетке вероятность вернуться когда-либо в начальную точку равна 1.

Доказательство. Пусть P — вероятность вернуться когда-либо в начальную точку. Обозначим P_n вероятность вернуться в начальную точку до попадания в n или $-n$. Предположим, что все эти вероятности существуют. Тогда $P_n \leq P \leq 1$ для любого n .

Сейчас мы докажем, что $P_n = 1 - 1/n$. После первого “хода” человек попадает в одну из точек 1 и -1 с вероятностью $1/2$. Если он оказался в точке 1, то из задачи 1.1(С) получаем, что вероятность вернуться в начало до попадания в точку n равна $1 - 1/n$. Если он оказался в точке -1 , рассуждаем аналогично. Применяя Базовое Утверждение из решения задачи 1.1(С), получаем $P_n = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}$. (Еще можно было заметить, что $P_n = 1 - C$, где $C = 1/n$ — проводимость цепи из задачи 1.6.)

Так как $1 - 1/n \leq P \leq 1$ для каждого n , то P равно 1. \square

2.1 Ответ: см. рисунок 9 слева.

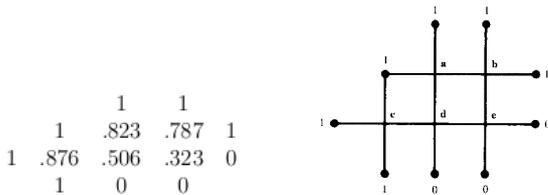


Рис. 9: Вероятности $P(x)$ или потенциалы $v(x)$; см. задачи 2.1 и 2.2.

Указание. Схема города представлена на рисунке 9 справа. Вероятности $P(x)$ обозначены за a , b , c , d , и e . Как и в 1-мерном случае, функция $P(x)$ удовлетворяет аксиомам 1–2 из определения электрической цепи. Отсюда мы получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a &= (b + d + 2)/4; \\ b &= (a + c + 2)/4; \\ c &= (d + 3)/4; \\ d &= (a + c + e)/4; \\ e &= (b + d)/4. \end{aligned}$$

Ответ получаем, решая эту систему.

Замечание. Нахождение точного решения для двухмерной “задачи Дирихле” — дело сложное; поэтому мы рассмотрим два метода нахождения приближенных решений.

Первый метод использует случайные блуждания. Он называется *методом Монте-Карло*, так как случайные блуждания связаны с вероятностями, а в Монте-Карло находятся известные игорные дома, азартные игры в которых тоже связаны с вероятностями. Мы моделируем много случайных блужданий из точки x и находим долю путей, закончившихся в точках E . Из закона больших чисел следует, что полученная оценка будет приближением для “настоящей” вероятности $P(x)$. Этот яркий и простой метод позволяет находить решения, но он не очень эффективен.

Теперь опишем более эффективный *метод релаксации*. Напомним, что мы ищем функцию с заданными значениями на границе у которое значение в любой внутренней точке равно среднему

арифметическому значений ее соседей. Возьмем какую-нибудь функцию с подходящими граничными значениями и возьмем некоторую внутреннюю точку. В общем случае значение функции не будет равно среднему арифметическому значений в соседних точках. Тогда попробуем “подогнать”: положим новое значение функции в этой точке равным среднему арифметическому значений в соседних точках. Теперь будем по очереди брать остальные внутренние точки и делать с ними ту же операцию. Когда мы пройдем по всем внутренним точкам, функция не будет удовлетворять аксиоме 2, так как после изменения значения функции в одной точке мы могли изменить значения в соседних с ней точках, нарушив равенство. Тем не менее, полученная функция будет “лучше” удовлетворять аксиоме 2, чем та функция, с которой мы начали; повторяя этот процесс (проходя каждый раз по всем внутренним точкам) мы будем получать приближения к решению лучше и лучше.

2.2 *Ответ:* см. рисунок 9 слева; эта задача эквивалентна задаче 2.1.

2.3 *Ответ:* (A) 2/5; (B) 1/2; (C) 2/7; (D) 2/5.

Указание. Сведем задачу к задаче 2.5 при помощи следующего утверждения:

Физическая интерпретация вероятности. Вероятность того, что случайное блуждание по графу G из вершины a достигнет вершины h до возврата в a , равна

$$P = C / \deg a,$$

где C — проводимость графа G (все резисторы единичные) между a и h , а $\deg a$ — число ребер, выходящих из вершины a .

2.4 (C) *Указание.* Функция $v(x)$ однозначно определена на вершинах получившейся цепи. Проверьте, что она удовлетворяет аксиомам 1–2.

2.5 *Ответ:* (1A) 6/5; (1B) 2; (1C) 6/7; (1D) 2.

(2A) 12/7; (2B) 12/5; (2C) 30/19; (2D) 30/11.

Короткое решение смотрите в разделе 3.

(2A) *Указание.* Соединим точки a и b с батареей; см. рисунок 4 справа. Потенциалы в точках c и d равны из симметрии; аналогично в точках e и f . Таким образом, наша схема эквивалентна схеме, изображенной на рисунке 10 слева.

Используя формулы для параллельного и последовательного соединения резисторов, эта цепь сводится в к цепи из одного резистора сопротивлением 7/12 ом (см рисунок 10 справа). Таким образом, сопротивление равно 7/12.

2.6 *Ответ:* 1/7. Решение аналогично решению задачи 2.3.

2.7 (A). Короткое решение смотрите в разделе 3.

(B) Авторам неизвестно элементарное решение задачи. Красивое решение, использующее дискретное преобразование Фурье, вы можете найти в книге [7].

2.8 Смотрите раздел 3.

2.9 (B) *Ответ:* $C \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Указание. Применим закон монотонности: объединим вместе точки, расположенные на квадратах, как показано на рисунке 11 сверху. Полученная цепь эквивалентна цепи на рисунке 11 в центре. Так как можно заменить n параллельных резисторов в 1 ом на один резистор в $1/n$ ом, цепь эквивалентна цепи на рисунке 11 снизу. Проводимость этой цепи равна

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{8k-4}}.$$

Это число стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Так как проводимость старой цепи не больше, она тоже стремится к нулю.

2.10 *Указание.* Пусть P — вероятность того, что при случайном блуждании по 2-мерной решетке мы вернемся в начальную точку. Обозначим за P_n вероятность того, что случайное блуждание вернется в начальную точку до достижения граничных точек квадрата $2n \times 2n$ с центром в начальной точке. Предположим, что все эти вероятности существуют. Ясно, что $P_n \leq P \leq 1$ для каждого n . Из физической интерпретации вероятности получаем, что $P_n = 1 - C/4$, где C — эффективное сопротивление

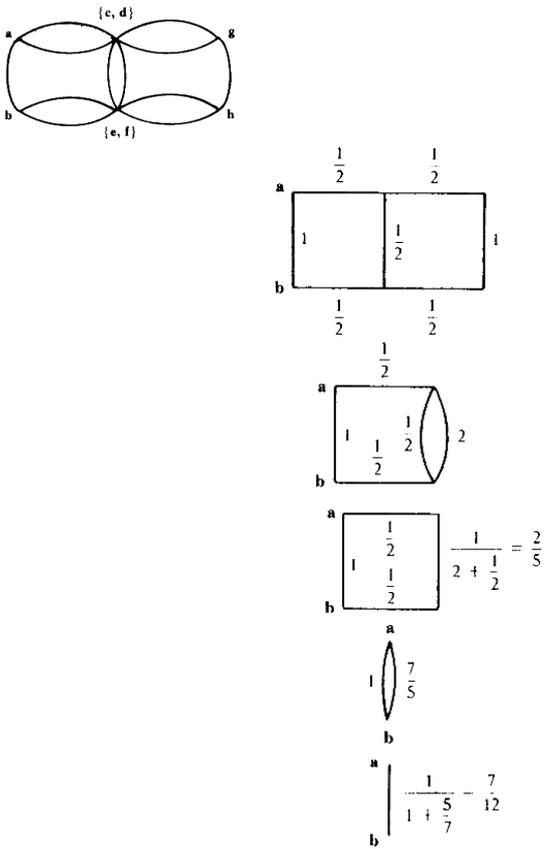


Рис. 10: Упрощение цепи; см решение задачи 2.5.

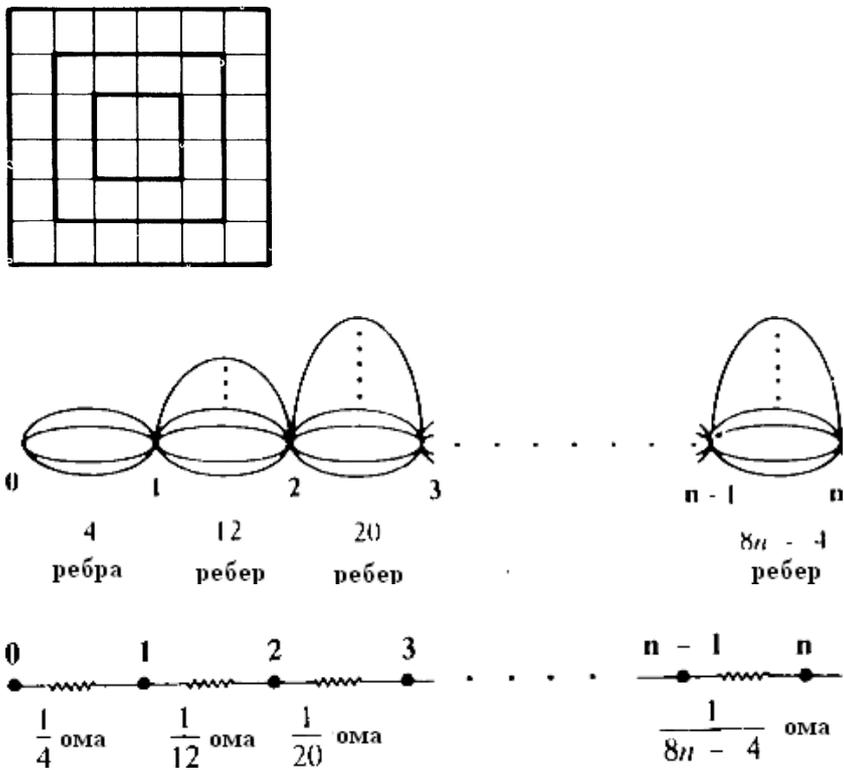


Рис. 11: Объединение в квадратной цепи и эквивалентная цепь; см решение задачи 2.9.

между центром и границей квадрата $2n \times 2n$. Из решения задачи 2.9(В) следует, что C стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Поэтому $P_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и P равно 1. \square

3.1 См., например, статью [6].

3.2 (В) Рассмотрим случайное блуждание по электрической цепи. Пусть $P_T(x)$ — вероятность того, что, стартуя из вершины x и делая T шагов, мы достигнем положительного полюса батареи раньше, чем отрицательного. Ясно, что при фиксированном x последовательность $P_T(x)$ возрастает, значит, имеет предел $P(x)$. Функция $P(x)$ удовлетворяет аксиомам 1–2.

Замечание. Существование и единственность решения системы Кирхгофа — факты действительно фундаментальные. Например, из единственности решения следует теорема Дена о том, что прямоугольник с иррациональным отношением сторон нельзя разрезать на квадраты. Из существования решения (в непрерывном случае) следует теорема Римана о конформном отображении [2].

3.3 См., например, статью [6].

3.4 (А) Пусть правильный граф содержит n вершин и A_1, A_2 — соседние вершины степеней k_1 и k_2 соответственно. Рассмотрим сначала ситуацию, когда в вершину A_1 подается ток $\frac{n-1}{n}$, а из всех остальных вершин вытекает ток $\frac{1}{n}$. В силу правильности графа по ребру A_1A_2 будет течь ток $\frac{1}{k_1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Если же ток $\frac{n-1}{n}$ подается в вершину A_2 , а из остальных вершин вытекает ток $\frac{1}{n}$, то по ребру A_1A_2 будет течь ток $\frac{1}{k_2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Объединим обе ситуации, заменив во втором случае все токи на противоположные. Тогда получится, что в вершину A_1 подается единичный ток, который вытекает из вершины A_2 . При этом по ребру A_1A_2 течет ток $\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Значит, сопротивление между вершинами A_1A_2 равно $\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Если граф бесконечный, то $1/n$ нужно заменить нулем. Корректность обосновывается с помощью предельного перехода.

Формула для сопротивления между соседними вершинами правильного графа принадлежит А.Б. Ходут. Вместе с определением правильного графа она взята из статьи [4].

(В) Решим сначала задачу на физическом уровне строгости. Наложим шину с нулевым сопротивлением на периметр прямоугольника $[-N, N+1] \times [-N, N]$. Поскольку при подключении батарейки к узлам $(0, 0)$ и $(1, 0)$ потенциалы на бесконечности стремятся к нулю, то наложение шины мало повлияет на значение искомого сопротивления. (Дальнейшие рассуждения также проводятся с точностью до погрешности, которая стремится к нулю с ростом N .) Если источник единичного тока подключен к точке $(0, 0)$ и шине, то из точки $(0, 0)$ в каждый из четырех соседних узлов течет ток равный $1/4$. Если же источник единичного тока подключен к шине и точке $(1, 0)$, то из четырех соседних узлов в точку $(1, 0)$ втекает ток равный $1/4$. Значит, при подключении обоих источников тока по ребру $(0, 0) - (1, 0)$ будет течь ток $1/2$, и разность потенциалов в этих точках тоже будет равна $1/2$. Но между ними течет общий ток равный единице, поэтому эквивалентное сопротивление решетки между соседними узлами равно $1/2$.

Придадим этим рассуждениям математическую строгость. Снова предположим, что источник единичного тока подключен к точке $(0, 0)$ и шине с нулевым сопротивлением, наложенной на периметр прямоугольника $[-N, N+1] \times [-N, N]$. Согласно задаче 5.2 сопротивление R такого графа не превосходит $N^{1/2}$, поэтому при нулевом потенциале на шине потенциал V в точке $(0, 0)$ не превосходит $N^{1/2}$:

$$V = IR = R \leq N^{1/2}. \quad (3)$$

Покажем, что потенциал в точках, близких к наложенной шине, мало отличается от нуля. Обозначим через u_j наибольший потенциал на периметре прямоугольника $[-j, j+1] \times [-j, j]$. Тогда из гармоничности распределения потенциалов следует, что $u_{j-1} \geq 2u_j - u_{j+1}$ ($1 \leq j \leq N-1$). Поэтому, если $u_{N-1} = \varepsilon$ (по предположению $u_N = 0$), то для всех j в пределах $0 \leq j \leq N$ будет выполняться неравенство $u_j \geq (N-j)\varepsilon$. В частности, $u_0 = V \geq N\varepsilon$. Учитывая неравенство (3), получаем, что $\varepsilon \leq N^{-1/2}$.

Если теперь наложить шину по периметру квадрата $[-N, N] \times [-N, N]$, то получится новое (симметричное) распределение потенциалов, которое, согласно принципу максимума, отличается от исходного не более чем на $N^{-1/2}$. Значит, до переноса правого края шины четыре тока, выходящие из точки $(0, 0)$ отличались от $1/4$ не более чем на $N^{-1/2}$. Аналогично, если источник тока подключен к

шине и к точке $(1, 0)$, то из четырех соседних узлов в точку $(1, 0)$ втекают четыре тока, отличающиеся от $1/4$ не более чем на $N^{-1/2}$.

Объединяя обе ситуации, получаем, что в прямоугольнике $[-N, N+1] \times [-N, N]$ с закороченным периметром источник единичного тока подключен к узлам $(0, 0)$ и $(1, 0)$, а по ребру $(0, 0) - (1, 0)$ течет ток $1/2 + O(N^{-1/2})$. Значит, разность потенциалов, а соответственно и сопротивление, равны $1/2 + O(N^{-1/2})$.

Для завершения доказательства применим аксиому 3. Рассмотрим батарейку, подключенную к точкам $(0, 0)$ и $(1, 0)$ так, что потенциалы в этих точках равны $1/4$ и $-1/4$ соответственно. Ток, протекающий между $(0, 0)$ и $(1, 0)$ обозначим через I . Выберем прямоугольник $[-N, N+1] \times [-N, N]$ так, чтобы потенциалы на его периметре по модулю не превосходили некоторого $\varepsilon > 0$. При замене всех потенциалов на периметре прямоугольника нулями, согласно принципу максимума, все потенциалы внутри так же изменятся не более чем на $\varepsilon > 0$. Тогда получится, что ток I течет между узлами с разностью потенциалов $1/2 + O(\varepsilon)$, а сопротивление между которыми равно $1/2 + O(N^{-1/2})$. Следовательно $I = 1 + O(\varepsilon) + O(N^{-1/2})$. Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, а N растет при уменьшении ε , то ток I в точности равен единице. Он течет между узлами с разностью потенциалов $1/2$, значит, эквивалентное сопротивление решетки между соседними узлами в точности равно $1/2$.

3.5 Пусть теперь B_1 и B_2 — вершины графа, диаметрально противоположные A_1 и A_2 соответственно. Мы доказали, что если в A_1 подается единичный ток, который вытекает из вершины A_2 , то по ребру A_1A_2 течет ток $I = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Ток текущий при этом по ребру B_2B_1 обозначим через x . Дополнительно подключим источник единичного тока к вершинам B_1 и B_2 (в B_2 подается, из B_1 — вытекает). Тогда по каждому из ребер A_1A_2 и B_2B_1 будет течь ток $I + x$. Но то же распределение токов получится, если единичный ток подается в вершину A_1 и вытекает из B_1 , а дополнительный ток подается в B_2 и вытекает из A_2 . В такой ситуации в силу правильности графа первый источник по ребру A_1A_2 дает ток $\frac{1}{k_1}$, а второй — $\frac{1}{k_2}$. Отсюда

$$I + x = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) + x = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

$$x = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \frac{1}{n}, \quad \frac{x}{I} = \frac{1}{n-1}.$$

Поэтому для икосаэдра получается ток $\frac{1}{11}$, додекаэдра — $\frac{1}{19}$, ромбододекаэдра — $\frac{1}{13}$, куба — $\frac{1}{7}$.

3.6 Указание. Суммы D_n и F_n удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению. Например, $D_n = 1 + \frac{n+1}{2n} D_{n-1}$. Кроме того, $D_0 = F_0 = 1$. Следовательно, они равны друг другу. Значит, при $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} = \frac{2^n}{n} F_{n-1} = \frac{2^n}{n} D_{n-1} = \frac{2^n}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}.$$

Для завершения доказательства нужно оценить степень вхождения числа 2 в общий знаменатель дробей из полученной суммы с помощью формулы Лежандра для показателя, с которым простое число входит в разложение факториала.

Сопротивление n -мерного проволочного куба (у которого каждое ребро имеет единичное сопротивление) между противоположными вершинами R_n связано с данными суммами равенствами (более подробно см. в статье [5]).

$$D_n = F_n = (n+1)R_{n+1}.$$

4.1 Указание. Докажите по индукции, что сопротивление бинарного дерева глубины n из единичных резисторов равно $1 - \frac{1}{2^n}$.

4.2 Указание. Потенциалы в точках, расположенных на одинаковом расстоянии от корня дерева, равны из симметрии. Объединив такие точки в бинарном дереве, получим цепь, изображенную на рисунке 12. Ее сопротивление равно $\frac{1}{2} \cdot n = \frac{n}{2}$. Для троичного дерева аналогично получаем $R = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n}$. Отсюда $R = 1 - \frac{2^n}{3^n}$.

4.3 Указание. Двоичное дерево глубины 3 вырезать не сложно. Покажем, что двоичное дерево глубины 2010 вырезать нельзя. Если его удалось вырезать, то все его вершины расположены на расстоянии

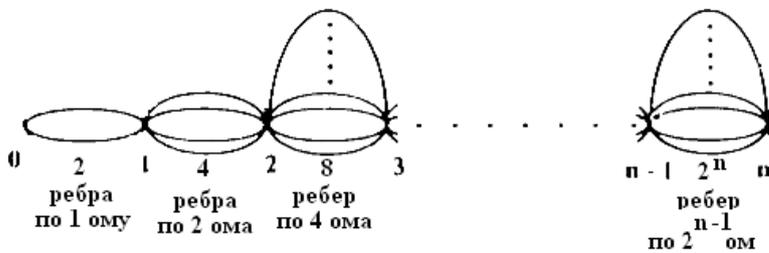


Рис. 12: Подсчет сопротивления дерева; см решение задачи 4.2.

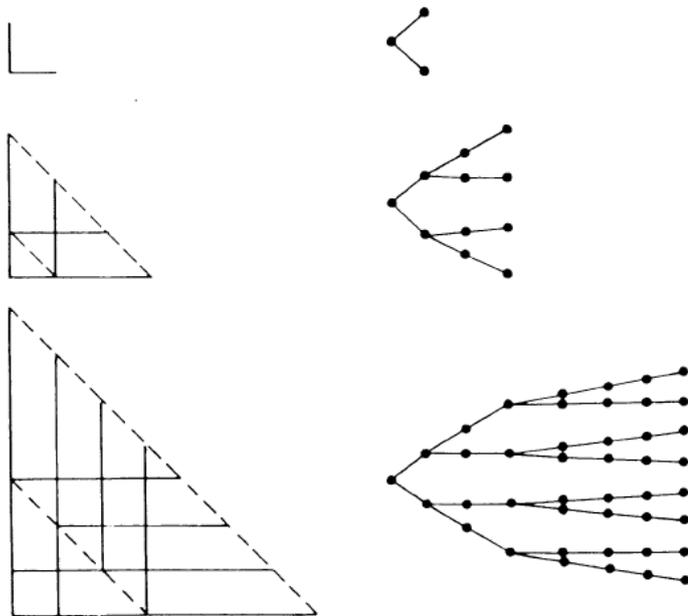


Рис. 13: Вырезание двоичного дерева с пересечениями из плоскости; см решение задачи 4.4.

не более 2010 от корня; отсюда получаем, что дерево находится в кубе со стороной $2 \cdot 2010 + 1$. Поэтому число его вершин не превосходит $4021^3 \leq 2^{36}$. С другой стороны, число его вершин равно $2^{2011} - 1$. Полученное противоречие завершает доказательство. Задача о вырезании модифицированного дерева решается не просто.

4.4 Указание. Двоичное дерево вырезать нельзя; рассуждайте аналогично решению задачи 4.3, пользуясь тем, что более двух вершин склеиться не могут. Модифицированное двоичное дерево можно вырезать из плоскости (см рисунок 13), а троичное из пространства аналогичным образом (см рисунок 14). Доказательство проводится индукцией по глубине дерева.

4.5 Указание. Для любого $n = 2^i - 1$ рассмотрим множество вершин (x, y, z) , где $|x| + |y| + |z| \leq n$. Пусть R_i — сопротивление между началом координат и границей такой фигуры. Как известно из задачи 4.4, из такой части решетки можно вырезать модифицированное троичное дерево глубины i с пересечениями ребер на равном расстоянии от корня. Легко заметить, что сопротивление дерева с такими пересечениями равно сопротивлению такого же дерева без пересечений. Как известно из задачи 4.2, сопротивления модифицированных троичных деревьев не превосходят 1. Поэтому не превосходят 1 и сопротивления вырезаемых деревьев с пересечениями. Из закона монотонности получаем, что $R_i \leq 1$. Значит, при подключении батарейки в 1 вольт ток будет не меньше 1. Следовательно, потенциалы в вершинах, соседних с началом координат будут не больше $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Они равны вероятности возврата в начало координат до попадания на границу. Переходя к пределу, получаем требуемое.

5.1 Рассмотрим точки $A(2, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 2)$, $D(2, 2)$, $E(3, 2)$, $F(4, 2)$, $G(2, 1)$, $H(3, 1)$. Сначала соединим источник тока, который подает единичный ток в начало координат, а вторым концом соединен к контуру с нулевым сопротивлением, наложенному на периметр квадрата $[-R, R]^2$. Из-за сим-

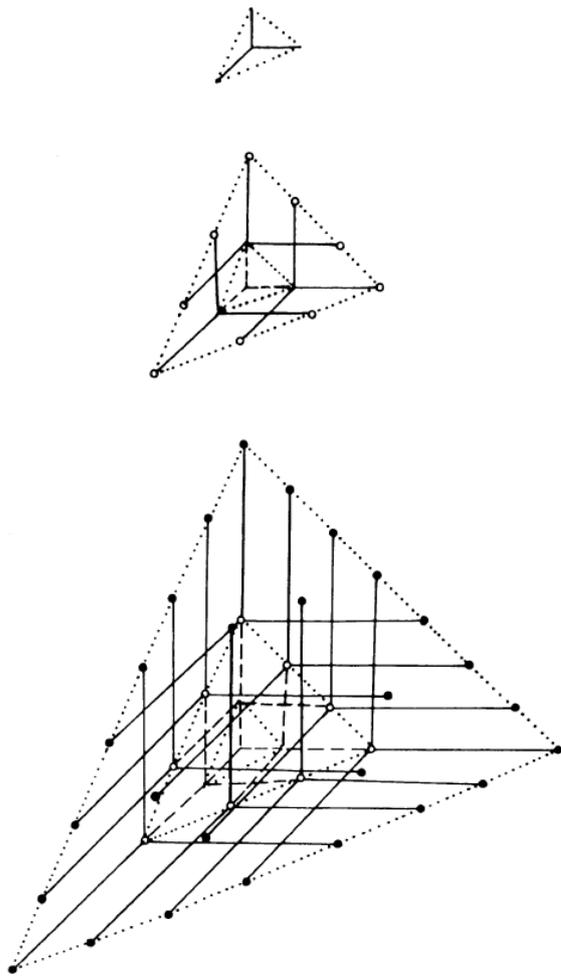


Рис. 14: Вырезание троичного дерева с пересечениями из пространства; см решение задачи [4.4](#).

метрии для некоторого числа I будут выполняться равенства $i(CD) = i(GD) = i(DA) = i(DE) = I$. Рассмотрим теперь другую ситуацию, когда единичный ток подается на периметр квадрата $[-R, R]^2$ и выходит из точки $(1, 0)$. Тогда $i(DE) \approx i(HE) \approx i(EB) \approx i(EF) \approx -I$. Здесь равенство понимается с точностью до малого ε , которое стремится к нулю с ростом R (как и в задаче 3.4, это следует из аксиомы 3). Комбинируя обе ситуации получаем, что когда источник тока подключен к узлам $(0, 0)$, $(1, 0)$, а на периметр квадрата $[-R, R]^2$ наложен контур с нулевым сопротивлением, по ребру DE течет ток меньший, чем ε . Устремляя R в бесконечность (и снова применяя аксиому 3), приходим к утверждению задачи.

Отметим, что при решении мы без доказательства пользовались сложным утверждением о существовании и единственности.

5.2 Рассмотрите какое-нибудь дерево, соединяющее данную точку с периметром квадрата.

5.3 Примените принцип максимума.

5.4 Запишем оператор Лапласа в виде

$$\Delta f(x, y) = f(x-1, y) + f(x+1, y) - 2f(x, y) + f(x, y-1) + f(x, y+1) - 2f(x, y).$$

Тогда для функции $f(x, y) = \ln r(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x-1, y) + f(x+1, y) - 2f(x, y) &= \frac{1}{2} \ln \frac{((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2x+1}{r^2} \right) \left(1 + \frac{-2x+1}{r^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{1}{r^2} \right)^2 - \frac{4x^2}{r^4} \right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$f(x, y-1) + f(x, y+1) - 2f(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{1}{r^2} \right)^2 - \frac{4y^2}{r^4} \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= \frac{1}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{1}{r^2} \right)^2 - \frac{4x^2}{r^4} \right) \left(\left(1 + \frac{1}{r^2} \right)^2 - \frac{4y^2}{r^4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{r^4} + \frac{16x^2y^2}{r^8} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \right) = O\left(\frac{1}{r^4}\right). \end{aligned}$$

5.5 Если точка (x, y) лежит вблизи границы кольца, то в ней имеет смысл изменить определение оператора Лапласа, чтобы оно согласовывалось с правилами Кирхгофа. Например, если для некоторых $a, b \in [0, 1)$ точки $(x-a, y)$ и $(x, y-b)$ попадают на границу, то будем считать, что

$$\Delta f(x, y) = \frac{f(x-a, y) - f(x, y)}{a} + \frac{f(x, y-b) - f(x, y)}{b} + f(x+1, y) + f(x, y+1) - 2f(x, y).$$

Тогда для функции $f(x, y) = \ln r(x, y)$ в такой точке

$$\frac{f(x-a, y) - f(x, y)}{a} + f(x+1, y) - f(x, y) = \frac{1}{2a} \ln \left(1 + \frac{-2ax + a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2x+1}{r^2} \right) = O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Аналогично

$$\frac{f(x, y-b) - f(x, y)}{b} + f(x, y+1) - f(x, y) = O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Таким образом $\Delta f(x, y) = O(r^{-2})$, причем эта оценка остается справедливой, если из четырех соседних с (x, y) точек лишь одна лежит за пределами кольца.

Рассмотрим теперь функцию $f(x, y) = U_n(x, y) - \ln r(x, y)$. Она равна нулю на границе кольца, а во всех внутренних точках удовлетворяет уравнению $\Delta f(x, y) = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = O(n^{-2})$ в точках вблизи границы, и $\varphi(x, y) = O(n^{-4})$ в остальных точках кольца.

Значения функции $\varphi(x, y)$ — это токи, которые подаются в соответствующие узлы кольца. Потенциалы, индуцированные токами в точках вблизи границы оцениваются как $O(n^{-2})$. Действительно, если, считать, что во все внутренние точки области имеют равный потенциал U , то в точки границы текут токи не меньше чем U . Поэтому, при замене всех токов на U потенциалы внутри области не увеличатся.

Оценим теперь потенциал порождаемый токами в остальных точках (отделенных от границы). Число таких точек есть $O(n^2)$, и ток в каждой из них (согласно задаче 5.3) приводит к потенциалам не превосходящим $O(n^{-7/2})$. Поэтому общий потенциал, порожденный внутренними токами есть $O(n^{-3/2})$. То есть $f(x, y) = O(n^{-3/2})$.

5.6 Воспользуемся равенством

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy},$$

которое справедливо при $|xy| < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{y+1}{R} - \operatorname{arctg} \frac{y}{R} &= \operatorname{arctg} \frac{1/R}{1 + y(y+1)/R^2} = \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{R}{y^2 + R^2} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right) = \frac{R}{R^2 + y^2} + O\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{aligned}$$

5.7 Просуммируйте формулу из задачи 5.6.

5.8 Для нахождения сопротивления кольца найдем ток, который будет через него протекать при условии, что на внутренний контур кольца подается напряжение $\ln nr_1$, а на внешний — $\ln nr_2$. Будем искать ток протекающий через периметр квадрата $[-R - 1/2, R + 1/2]^2$, где $R = [r_1 n] + 1$. Посчитаем его приближенно, заменяя потенциалы в узлах на значения функции $\ln r(x, y)$. Всего будет просуммировано $O(n)$ токов, каждый с погрешностью $O(n^{-3/2})$. Поэтому итоговая погрешность будет равна $O(n^{-1/2})$.

В силу симметрии квадрата, протекающий через его периметр ток может быть записан в виде

$$I = 8 \sum_{y=0}^R (\ln r(R+1, y) - \ln r(R, y)) + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right).$$

Так как

$$\ln r(R+1, y) - \ln r(R, y) = \frac{R}{R^2 + y^2} + O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

то, применяя формулу из задачи 5.7, получаем нужное равенство $I = 2\pi + O(n^{-1/2})$.

5.9 Как и в предыдущей задаче, для вычисления сопротивления нужно найти ток, протекающий через замкнутую ломаную, опоясывающую внутреннюю окружность. Снова для приближенного нахождения тока потенциалы в узлах решетки можно заменить на значения функции $\ln r(x, y)$. Если теперь ломаную заменить на описанный около нее квадрат, то внутри полученного контура появятся $O(n^2)$ новых источников тока, в каждом из которых втекает или вытекает ток равный $O(n^{-4})$. Значит, искомое значение для суммарного тока отличается от уже найденного тока через периметр квадрата $I = 2\pi + O(n^{-1/2})$ не более чем на $O(n^{-2})$.

5.10 Докажем, что в задаче 5.2 сопротивление между любым узлом квадрата и его границей есть $O(\ln n)$. Тогда и во всех следующих задачах при буквальном повторении доказательств все остаточные члены умножаться на $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Вместо квадрата рассмотрим треугольник, вырезанный из квадратной сетки прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = n$, и оценим его сопротивление между началом координат и гипотенузой. Будем предполагать, что в целых точках на отрезка $x + y = k$, $x, y \geq 0$ потенциалы равны $V_k = \sum_{j=2}^{k+1} \frac{1}{j}$ ($0 \leq k \leq n$). В частности, в начале координат потенциал нулевой. Будем также предполагать, что в каждую точку на прямой $x + y = k$ втекает ток $1/k$, то есть через каждый уровень протекает единичный ток. Чтобы ситуация не противоречила закону Ома, сопротивления внутри треугольника

нужно будет увеличить. (Сопротивления, соединяющие точки вида $(0, k)$, $(k, 0)$ с точками $(0, k + 1)$, $(k + 1, 0)$ остаются единичными.) Чтобы выполнялся закон Кирхгофа, из точки $(j, k - j)$ должны течь токи $\frac{k-j}{k(k+1)}$ и $\frac{j+1}{k(k+1)}$ в точки $(j, k - j + 1)$ и $(j + 1, k - j)$ соответственно. Поскольку разность потенциалов равна $1/(n + 1)$, то единичные сопротивления нужно будет заменить на сопротивления $\frac{k}{k-j}$ и $\frac{k}{j+1}$ соответственно. Полученная схема имеет сопротивление $V_n \leq \ln n$. Значит, сопротивление исходной схемы также не превосходит $\ln n$.

8. Благодарности

Большинство задач частей 1, 2 и 4 данного проекта заимствованы из статьи П. Дойля и Дж. Снелл [6]. Авторы благодарны И. Богданову, В. Бугаенко и М. Прасолову за помощь при переводе данного проекта.

- [1] I. Benjamini and O. Schramm, Random walks and harmonic functions on infinite planar graphs using square tilings, *Ann. Prob.* **24:3** (1996), 1219–1238.
- [2] J. Cannon, W. Floyd, W. Parry, Squaring rectangles: the finite Riemann mapping theorem, *Contemp. Math.* **169** (1994), 133–211.
- [3] P. G. Doyle and J. L. Snell, *Random walks and electric networks*, Mathematical Association of America, 1984, <http://arxiv.org/abs/math.PR/0001057>.
- [4] Г.А. Гальперин “Мой друг Андрей Ходулчв” (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 4 (2000), 8–32, <http://www.mccme.ru/free-books/matpros/i5008032.pdf.zip>.
- [5] Ф. Недемейер и Я. А. Смородинский, *Сопротивление ребер многомерного куба*, *Квант*, № 6, 1986.
- [6] M. Prasad and M. Skopenkov, *Tiling by rectangles and alternating current*, submitted (2010). <http://arxiv.org/abs/1002.1356>.
- [7] F. Spitzer, *Principles of random walks*, Springer–Verlag, 1976.