О формулах суммирования и интерполяции

А. В. Устинов*

УДК 511.217

1 Введение

Известно, что числа Бернулли B_n и полиномы Бернулли $B_n(x)$ возникают в самых разных вопросах теории чисел и приближенного анализа (см. [1]–[5]). Одним из важных приложений является формула суммирования Эйлера:

$$\sum_{\nu=a}^{b-1} f(\nu) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B_\nu}{\nu!} f^{(\nu-1)}(x)\Big|_a^b - R_n[f], \tag{1}$$

где

$$R_n[f] = \int_a^b \frac{B_n(1-\{x\})}{n!} f^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int_a^b \frac{B_n(\{x\})}{n!} f^{(n)}(x)\,dx.$$

Здесь и далее предполагается, что функция $f(x)$ является достаточно „гладкой“, то есть все ее производные, входящие в формулы, существуют и являются непрерывными функциями.

Другим приложением полиномов Бернулли является формула для представления функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;1]$:

$$f(x) = \int_0^1 f(y)\,dy + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B_\nu(x)}{\nu!} \left(f^{(\nu-1)}(y)\Big|_0^1 \right) - R_n[f], \tag{2}$$

где

$$R_n[f] = \int_0^1 \frac{B_n(\{x-y\})}{n!} f^{(n)}(y)\,dy = (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n(1-\{x-y\})}{n!} f^{(n)}(y)\,dy$$

(см., например, [4], лемма 30).

Если производные функции $f(x)$ неизвестны, то при практическом использовании подобных формул возникает необходимость приближать производные конечными разностями.

В работе [3] Н. М. Коробовым были введены специальные числа P_n и специальные полиномы $P_n(x)$, которые можно назвать дискретными аналогами чисел Бернулли B_n и полиномов Бернулли $B_n(x)$. Аналогия заключается в том, что свойства полиномов $B_n(x)$ превращаются в свойства полиномов $P_n(x)$ при замене непрерывных объектов на дискретные: производных — на конечные разности, интегралов — на конечные суммы, рядов Фурье — на конечные ряды Фурье.

В той же работе [3] были изучены основные свойства специальных полиномов и доказана формула, связывающая их с полиномами Бернулли. Там же для периодических функций многих переменных при помощи полиномов $P_n(x)$ были построены

*Работа выполнена при частичной поддержке фонда РФФИ, гранд N 01-01-00738

интерполяционные формулы, которые не нуждаются в знании производных данной функции, а используют лишь ее значения.

В статье [6] были получены дискретные аналоги формул (1) и (2).

В настоящей работе вводятся полиномы $K_n(x)$, которые отличаются от специальных полиномов $P_n(x)$ постоянным множителем: $K_n(x) = n!\,P_n(x)$. Для таких полиномов проще просслеживаются аналогии с полиномами Бернулли. В дальнейшем полиномы $K_n(x)$ будем называть полиномами Коробова.

В разделе 3 данной работы в терминах $K_n(x)$ переформулируются свойства специальных полиномов $P_n(x)$, доказанные в работе [3]. Затем доказывается ряд новых свойств, аналогичных известным свойствам полиномов Бернулли.

В разделе 4 рассматриваются многочлены $Q_n(x) = K_n(x+n/2-1)$, которые оказываются более удобными при изучении геометрических свойств полиномов $K_n(x)$.

В разделе 5 приводятся различные формулы суммирования и интерполяции с участием полиномов $K_n(x)$ и $Q_n(x)$.

В разделе 6 доказанные свойства полиномов $K_n(x)$ и $Q_n(x)$ применяются для оценки остаточных членов в формулах суммирования.

2 Обозначения

Будем обозначать через E^a оператор сдвига: $E^a f(x) = f(x+a)$, и через $\Delta_a = E^a - 1$ — оператор конечной разности: $\Delta_a f(x) = f(x+a) - f(x)$. Если $a = 1$, то индекс 1 будем опускать ($E^1 = E$, $\Delta_1 = \Delta$). Разностный оператор Δ является конечным аналогом производной. Кроме него в исчислении конечных разностей также используются оператор разности „назад“ $\nabla = 1 - E^{-1}$: $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$ и оператор центральной конечной разности $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$:

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

В дальнейшем через $x^{\underline{n}}$, $x^{\overline{n}}$ и $x^{[n]}$ будем обозначать убывающие, возрастающие и центральные факториальные степени:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)};$$
$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)};$$
$$x^{[n]} = x\cdot\left(x + \frac{n}{2} - 1\right)\left(x + \frac{n}{2} - 2\right)\dots\left(x - \frac{n}{2} + 1\right) = x\frac{\Gamma\left(x + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(x - \frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Под $x^{[n]-1}$ будем понимать $x^{[n]}\cdot x^{-1}$. Факториальные степени по отношению к операторам Δ, ∇ и δ играют ту же роль, что и функция x^n по отношению к обычной производной. Нетрудно проверить, что для факториальных степеней справедливы следующие аналоги равенства $(x^n)' = n\,x^{n-1}$:

$$\Delta x^{\underline{n}} = n\,x^{\underline{n-1}}, \quad \nabla x^{\overline{n}} = n\,x^{\overline{n-1}}, \quad \delta x^{[n]} = n\,x^{[n-1]}, \quad \delta x^{[n+1]-1} = n\,x^{[n]-1}.$$

3 Числа и полиномы Коробова

Напомним, что числа и полиномы Бернулли определяются равенствами

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu B_\nu = B_n \qquad (n \geqslant 2); \tag{3}$$

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu B_\nu x^{n-\nu} \qquad (n \geqslant 0), \tag{4}$$

которые удобно записывать в символическом виде:

$$B_0 = 1, \quad (B+1)^n = B^n \quad (n \geqslant 2); \qquad B_n(x) = (B+x)^n \quad (n \geqslant 0).$$

В этих соотношениях, после разложения по формуле бинома, следует B^ν заменять на B_ν, после чего они совпадут с равенствами (3) и (4).

Введем числа K_n и полиномы $K_n(x)$ при помощи равенств, аналогичных (3) и (4), заменяя при этом обычные степени на убывающие факториальные.

Определение 1 *Для фиксированного действительного* p*, отличного от* 0*, зададим числа* K_n *и полиномы* $K_n(x)$ *при помощи равенств*

$$K_0 = 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu K_\nu p^{\underline{n-\nu}} = K_n \qquad (n \geqslant 2); \tag{5}$$

$$K_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu K_\nu x^{\underline{n-\nu}} \qquad (n \geqslant 0). \tag{6}$$

Заметим, что формула бинома остается справедливой и в том случае, когда обычные степени заменяются на убывающие, возрастающие или центральные факториальные. Так, например, для убывающих факториальных степеней справедливо равенство

$$(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu a^{\underline{\nu}} b^{\underline{n-\nu}} \qquad (n \geqslant 0). \tag{7}$$

Поэтому определения (5) и (6) можно записать в виде символических равенств

$$K_0 = 1, \quad (K+p)^{\underline{n}} = K^{\underline{n}} \quad (n \geqslant 2); \qquad K_n(x) = (K+x)^{\underline{n}} \quad (n \geqslant 0),$$

в которых после раскрытия скобок по формуле (7) следует заменять $K^{\underline{\nu}}$ на K_ν.

Замечание 1. В работе [3] рассматривались числа P_n и полиномы $P_n(x)$, определяемые равенствами

$$P_0 = 1, \qquad C_p^1 P_n + \ldots + C_p^{n+1} P_0 = 0 \qquad (n \geqslant 1);$$
$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = P_0 C_x^n + \ldots + P_{n-1} C_x^1 + P_n \qquad (n \geqslant 1).$$

Из определений вытекает, что числа K_n и полиномы $K_n(x)$ связаны с P_n и $P_n(x)$ равенствами

$$K_n = n!\,P_n, \qquad K_n(x) = n!\,P_n(x).$$

Новое определение дано в связи с тем, что многочлены $K_n(x)$ оказываются более удобными. Формулы с $K_n(x)$ обретают большее сходство с аналогичными формулами для многочленов Бернулли. Кроме этого, нахождение новых равенств с полиномами $K_n(x)$ упрощается из–за возможности записывать их в символическом виде.

Пользуясь определениями (5) и (6) нетрудно вычислить первые числа и полиномы Коробова:

$$K_1 = -\frac{p-1}{2}, \quad K_2 = \frac{p^2-1}{6}, \quad K_3 = -\frac{p^2-1}{4},$$
$$K_1(x) = x - \frac{p-1}{2}, \quad K_2(x) = x^2 - px + \frac{p^2-1}{6},$$
$$K_3(x) = x^3 - \frac{3(p+1)}{2}x^2 + \frac{p(p+3)}{2}x - \frac{p^2-1}{4}.$$

В дальнейшем, если окажется важна зависимость от параметра p, для полиномов $K_n(x)$ будем использовать обозначение $K_n(p,x)$. Через $\overline{K}_n(x)$ будем обозначать периодизированный полином $K_n(x)$:

$$\overline{K}_n(x) = K_n\left(p\left\{\frac{x}{p}\right\}\right).$$

Отметим некоторые свойства чисел K_n и полиномов $K_n(x)$, полученные в работе [3][1].

1°. $K_n(0) = K_n \qquad (n \geqslant 0)$.

2°. $\Delta K_n(x) = n\,K_{n-1}(x) \qquad (n \geqslant 1)$.

3°. $K_n(p) - K_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1,\ n \geqslant 0; \\ p, & \text{если } n = 1. \end{cases}$

4°. При целых $p \geqslant 2$, $x \geqslant 0$

$$\sum_{z=0}^{x-1} K_n(z) = \frac{K_{n+1}(x) - K_{n+1}}{n+1} \quad (n \geqslant 0), \qquad \sum_{z=0}^{p-1} K_n(z) = 0 \quad (n \geqslant 1).$$

5°. $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} C_n^\nu K_\nu(x) p^{\underline{n-\nu}} = p\,n\,x^{\underline{n-1}} \qquad (n \geqslant 1)$.

6°. При целых $p \geqslant 2$, $x \in [0;\ p+n-2]$

$$K_n(x) = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}} \qquad (n \geqslant 0).$$

В той же работе с указанием идеи доказательства были помещены формулы для производящих функций последовательностей $\{K_n\}$ и $\{K_n(x)\}$:

7°. При всех вещественных $p \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{n!} z^n = \frac{pz}{(z+1)^p - 1}, \tag{8}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} z^n = \frac{pz(z+1)^x}{(z+1)^p - 1}. \tag{9}$$

Причем при целых p, $|p| \geqslant 2$ радиус сходимости этих рядов равен $R = 2\sin\dfrac{\pi}{|p|}$.

[1] Свойства изменены с учетом новых определений (5) и (6).

Описанные выше свойства являются аналогами известных свойств полиномов Бернулли (см., например, [1], [5]):

$$B_n(0) = B_n \quad (n \geqslant 0); \qquad B'_n(x) = n\,B_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1);$$

$$B_n(1) - B_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, n \geqslant 0; \\ 1, & \text{если } n = 1; \end{cases}$$

$$\int\limits_0^x B_n(z)dz = \frac{B_{n+1}(z)}{n+1}\bigg|_0^x \quad (n \geqslant 0), \qquad \int\limits_0^1 B_n(z)dz = 0 \quad (n \geqslant 1);$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_{n+1}^{\nu} B_\nu(x) = (n+1)x^n \qquad (n \geqslant 0);$$

$$B_n(\{x\}) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{|m|>0} \frac{e^{2\pi i m x}}{m^n} \qquad (n \geqslant 1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x) t^n}{n!} = \frac{t e^{tx}}{e^t - 1}.$$

Числа и полиномы Бернулли обладают и рядом других свойств. Перечислим некоторые из них.

$$B_n(x+y) = \sum_{\nu=0}^{n} C_n^{\nu} x^{\nu} B_{n-\nu}(y) \qquad (n \geqslant 0) \quad (\text{формула сложения аргументов}).$$

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{\nu=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{\nu}{m}\right) \qquad (n \geqslant 0) \quad (\text{формула умножения});$$

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \qquad (n \geqslant 0) \quad (\text{формула дополнения});$$

$$\Delta B_n(x) = n\,x^{n-1} \qquad (n \geqslant 1); \qquad B_n(1/2) = (2^{1-n} - 1)B_n \qquad (n \geqslant 0).$$

Если $g(x)$ — многочлен степени n, то уравнение в конечных разностях $\Delta f(x) = g'(x)$ с неизвестным многочленом $f(x)$ имеет решением функцию

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{B_\nu}{\nu!} g^{(\nu)}(x).$$

Причем при любых вещественных x и h выполняется равенство

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{B_\nu(h)}{\nu!} g^{(\nu)}(x).$$

Кроме того, для любого многочлена $g(x)$ степени n справедлива формула Эйлера–Маклорена

$$g'(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu(h)}{\nu!} \Delta g^{(\nu)}(x).$$

Все эти свойства имеют свои аналоги и для полиномов Коробова.

8°. $K_n(x+y) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} C_n^{\nu} x^{\underline{\nu}} K_{n-\nu}(y) \quad (n \geqslant 0).$

9°. При $p = p_1 p_2$ $(p_1, p_2 \geqslant 2)$

$$\sum_{\nu=0}^{p_1-1} K_n(p, x+\nu p_2) = p_1 K_n(p_2, x) \qquad (n \geqslant 0).$$

10°. $K_n(p-x) = (-1)^n K_n(x+n-2), \quad \overline{K}_n(p-x) = (-1)^n \overline{K}_n(x+n-2) \qquad (n \geqslant 0).$

11°. $\dfrac{\Delta_p K_n(x)}{p} = n\, x^{\underline{n-1}} \qquad (n \geqslant 1).$

12°. $K_n\left(p, \dfrac{n}{2}-1\right) + K_n\left(p, \dfrac{p}{2}+\dfrac{n}{2}-1\right) = 2K_n\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{n}{2}-1\right) \qquad (n \geqslant 0).$

13°. Пусть $g(x)$ — многочлен степени n. Тогда уравнение в конечных разностях

$$\frac{\Delta_p f(x)}{p} = \Delta g(x) \tag{10}$$

с неизвестным многочленом $f(x)$ имеет решением функцию

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{K_\nu}{\nu!}\, \Delta^\nu g(x). \tag{11}$$

Причем при любых x и h выполняется равенство

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{K_\nu(h)}{\nu!}\, \Delta^\nu g(x). \tag{12}$$

14°. Для любого многочлена $g(x)$ степени n справедлива формула

$$\Delta g(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{K_\nu(h)}{\nu!} \cdot \frac{\Delta^\nu \Delta_p g(x)}{p}.$$

Докажем справедливость свойств 7°–14°.

7°. Пусть $F_K(z)$ — экспоненциальная производящая функция последовательности $\{K_n\}$:

$$F_K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{n!}\, z^n.$$

Определение чисел K_n (5) в терминах производящих функций переписывается в виде

$$F_K(z)\,(1+z)^p = F_K(z) + pz.$$

Отсюда следует равенство (8).

Если обозначить через $F_K(x,z)$ — производящую функцию последовательности полиномов $\{K_n(x)\}$

$$F_K(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!}\, z^n,$$

то равенство (6) в терминах производящих функций означает, что

$$F_K(x,z) = F_K(z) \cdot (1+z)^x,$$

поэтому

$$F_K(x,z) = \frac{pz(z+1)^x}{(z+1)^p - 1}.$$

Если p — целое число и $|p| \geqslant 2$, то особыми точками функций $F_K(z)$ и $F_K(x,z)$ будут нули знаменателя
$$z_\nu = e^{2\pi i \frac{\nu}{p}} - 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, |p| - 1).$$
Отсюда находится радиус сходимости рядов (8) и (9):
$$R = \min_{1 \leqslant \nu < |p|} |z_\nu| = 2 \sin \frac{\pi}{|p|}.$$

Свойство 8° получается, если в интерполяционную формулу Ньютона для многочлена $f(x)$ степени n
$$f(x+y) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^{\underline{\nu}}}{\nu!} \Delta^\nu f(y) \tag{13}$$
подставить $f(x) = K_n(x)$.

9°. Докажем сначала, что свойство 9° выполняется для всех целых x из отрезка $[0, p_2 + n - 2]$. Согласно свойству 6°, при таких x
$$\sum_{j=0}^{p_1-1} K_n(p, x + jp_2) = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} \sum_{j=0}^{p_1-1} e^{2\pi i \frac{m(x+jp_2)}{p_1 p_2}} =$$
$$= -p_1 n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p_1 p_2}} \delta_{p_1}(m) = p_1 K_n(p_2, x).$$

Так как $p_2 + n - 1 \geqslant n + 1$, то два многочлена степени n принимают равные значения по крайней мере в $n+1$ точке. Значит они равны.

10°. Вновь воспользуемся разложением полинома $K_n(x)$ в конечный ряд Фурье. Для целых x из отрезка $[2-n; p]$
$$K_n(p-x) = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{m(p-x)}{p}} = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m(1-x)}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n}.$$

Домножим в каждом слагаемом числитель и знаменатель на $e^{-2\pi i \frac{mn}{p}}$ и заменим m на $p - m$:
$$K_n(p-x) = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m(1-n-x)}{p}}}{(1 - e^{-2\pi i \frac{m}{p}})^n}.$$
Вынося из знаменателя сомножитель $(-1)^n$, приходим к нужному равенству:
$$K_n(p-x) = -(-1)^n n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{m(x+n-2)}{p}} = (-1)^n K_n(x+n-2).$$

Вновь получилось, что два многочлена степени n совпадают по крайней мере в $n+1$ точке. Поэтому они равны.

11°. Из свойства 6° следует, что многочлен $\Delta_p K_n(x) = K_n(p+x) - K_n(x)$ степени $n-1$ обращается в ноль в точках $x = 0, 1, \ldots, n$. Поэтому с точностью до постоянного множителя он должен совпадать с многочленом $x^{\underline{n-1}}$. Этот множитель находится, если сравнить коэффициенты при старших степенях x. Из определения полиномов $K_n(x)$ следует, что коэффициент при x^n у них равен 1. Поэтому
$$K_n(p+x) - K_n(x) = (x+p)^n - x^n + \ldots = pnx^{n-1} + \ldots$$
(здесь опущены слагаемые, степень которых меньше $n-1$). Отсюда
$$K_n(p+x) - K_n(x) = p\, n\, x^{\underline{n-1}}.$$

12°. Поскольку функции $K_n(x)$ являются многочленами от p, то данное свойство достаточно доказать лишь для четных значений p. В этом случае достаточно применить свойство 9° с $K_1 = 2$, $K_2 = \frac{p}{2}$ и $x = \frac{n}{2} - 1$.

13°. Применим оператор Δ_p/p по переменной h к правой части равенства (12) и воспользуемся свойством 11°:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Delta^\nu g(x)}{\nu!} \cdot \frac{\Delta_p K_\nu(h)}{p} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta^\nu g(x)}{\nu!}\, \nu\, h^{\underline{\nu-1}} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Delta^{\nu+1} g(x)}{\nu!}\, h^{\underline{\nu}}$$

Согласно формуле (13), последняя сумма совпадает с $\Delta g(x+h)$. Поэтому функция $f(x)$, определенная равенством (11), действительно удовлетворяет уравнению (10).

14°. Рассмотрим разностное уравнение (10). По свойству 13° многочлен $f(x)$ определенный равенством (11) является его решением. Кроме того, для него справедливо и равенство (12). Применим разностный оператор Δ_p/p по переменной x к обеим частям равенства (12):

$$\frac{\Delta_p f(x+h)}{p} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{K_\nu(h)}{\nu!} \cdot \frac{\Delta^\nu \Delta_p g(x)}{p}.$$

После этого остается воспользоваться равенством (10).

4 Полиномы $Q_n(x)$ и их геометрические свойства

При оценке остаточного члена в формуле суммирования Эйлера существенно используются геометрические свойства полиномов Бернулли. Известно, что функция $|B_{2n}(x)|$ на отрезке $[0;1]$ наибольшее значение принимает при $x = 0$. Поэтому многочлен $B_{2n}(x) - B_{2n}$ на том же отрезке является знакопостоянной функцией.

С геометрической точки зрения многочлены $K_{2n}(x)$ отличаются от многочленов Бернулли тем, что наибольшее по модулю значение на отрезке $[0;p]$ они принимают в точке $x = \frac{n}{2} - 1$. Поэтому, для удобства, введем многочлены $Q_n(x)$, которые будут получаться из многочленов $K_n(x)$ при помощи линейной замены переменной.

Определение 2 *Для фиксированного действительного* p*, отличного от* 0*, зададим полиномы* $Q_n(x)$ *и числа* Q_n *при помощи равенств*

$$Q_n(x) = K_n\left(x + \frac{n}{2} - 1\right) \qquad (n \geqslant 0); \tag{14}$$

$$Q_n = Q_n(0) \qquad (n \geqslant 0). \tag{15}$$

Отсюда, в частности, имеем:

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = -\frac{p}{2}, \quad Q_2 = \frac{p^2-1}{6}, \quad Q_3 = \frac{3p}{8}, \quad Q_4 = -\frac{(p^2-1)(p^2+11)}{60},$$

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x - \frac{p}{2}, \quad Q_2(x) = x^2 - px + \frac{p^2-1}{6},$$

$$Q_3(x) = x^3 - \frac{3px^2}{2} + \left(\frac{p^2}{2} - \frac{3}{4}\right)x + \frac{3p}{8}.$$

Свойства чисел Q_n и полиномов $Q_n(x)$ во многом схожи со свойствами чисел и полиномов Коробова. Отличие заключается в том, что убывающие факториальные степени заменяются на центральные, а разностный оператор Δ — на центральный разностный оператор δ.

При изучении свойств полиномов $Q_n(x)$ возникает необходимость рассматривать обобщенный биномиальный ряд $\mathcal{B}_t(z)$, который определяется равенством

$$\mathcal{B}_t(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(t\nu)^{\underline{\nu-1}}}{\nu!} z^\nu. \tag{16}$$

Известно, что этот ряд удовлетворяет следующим соотношениям (см. [2], 5.4)

$$\mathcal{B}_t(z) = \mathcal{B}_{1-t}(-z)^{-1}, \tag{17}$$

$$\mathcal{B}_t(z)^{1-t} - \mathcal{B}_t(z)^{-t} = z, \tag{18}$$

$$\mathcal{B}_t(z)^r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(t\nu+r)^{\underline{\nu}}}{\nu!} \cdot \frac{r}{t\nu+r} z^\nu, \tag{19}$$

$$\frac{\mathcal{B}_t(z)^r}{1-t+t\,\mathcal{B}_t(z)^{-1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(t\nu+r)^{\underline{\nu}}}{\nu!} z^\nu, \tag{20}$$

где r — произвольное действительное число. Обобщенный биномиальный ряд оказывается важен, потому что при $t = 1/2$ функция $\mathcal{B}_t(z)^x$ оказывается производящей функцией для последовательности центральных факториальных степеней числа x. Равенство (19) может быть переписано в виде

$$\mathcal{B}_{1/2}(z)^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{[\nu]}}{\nu!} z^\nu,$$

а из соотношения (20) следует, что

$$\frac{2\mathcal{B}_{1/2}(z)^{x+\frac{1}{2}}}{1+\mathcal{B}_{1/2}(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{[\nu+1]-1}}{\nu!} z^\nu.$$

Перечислим свойства полиномов $Q_n(x)$. Определениям чисел и многочленов Коробова (5) и (6) соответствуют равенства

1°.

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu p^{[\nu]} Q_{n-\nu} = (-1)^n Q_n \qquad (n \geqslant 0),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu x^{[\nu]} Q_{n-\nu} = Q_n(x) \qquad (n \geqslant 0).$$

Аналогами свойств 2°–14° полиномов $K_n(x)$ будут следующие свойства полиномов $Q_n(x)$.

2°. $\delta Q_n(x) = n\, Q_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1)$.

3°. $Q_n(p) - Q_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ -2Q_n, & \text{если } n \text{ нечетное;} \end{cases}$

$$\mu(Q_n(p) - Q_n(0)) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1,\ n \geqslant 0, \\ p, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Здесь и далее $\mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)$ — оператор среднего значения:

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right) + f\left(x-\frac{1}{2}\right)\right].$$

4°. $\sum\limits_{z=0}^{x-1} Q_n(z) = \dfrac{1}{n+1}\left[Q_{n+1}\left(x-\dfrac{1}{2}\right) - Q_{n+1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right] \quad (n \geqslant 0),$
$\dfrac{1}{2}Q_n(0) + Q_n(1) + \ldots + Q_n(p-1) + \dfrac{1}{2}Q_n(p) = 0 \quad (n \geqslant 1).$

5°. $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} C_n^{\nu} Q_{\nu}(x) p^{[n-\nu]} = p\, n\, x^{[n]-1} \qquad (n \geqslant 1).$

6°. Если номер многочлена четный и равен $2n$, то при целом $x \in [1-n; p+n-1]$

$$Q_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{mx}{p}}}{\sin^{2n} \pi\frac{m}{p}} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{\cos 2\pi\frac{mx}{p}}{\sin^{2n} \pi\frac{m}{p}} \quad (n \geqslant 1).$$

Если же номер многочлена нечетный и равен $2n+1$, то для полуцелых $x \in \left[\dfrac{1}{2} - n; p+n-\dfrac{1}{2}\right]$

$$Q_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{2n+1}\cdot i} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{mx}{p}}}{\sin^{2n+1} \pi\frac{m}{p}} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{2n+1}} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{\sin 2\pi\frac{mx}{p}}{\sin^{2n+1} \pi\frac{m}{p}} \quad (n \geqslant 0).$$

7°. При всех вещественных $p \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{n!} z^n = \frac{2p}{1+\mathcal{B}_{1/2}(z)} \cdot \frac{\mathcal{B}_{1/2}(z)-1}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1} = \frac{2pz}{\sqrt{z^2+4}} \cdot \frac{1}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1}, \tag{21}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{n!} z^n = \frac{2p\,\mathcal{B}_{1/2}(z)^x}{1+\mathcal{B}_{1/2}(z)} \cdot \frac{\mathcal{B}_{1/2}(z)-1}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1} = \frac{2pz}{\sqrt{z^2+4}} \cdot \frac{\mathcal{B}_{1/2}(z)^x}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1}, \tag{22}$$

где $\mathcal{B}_t(z)$ — обобщенный биномиальный ряд (16), который при $t = 1/2$ совпадает с функцией

$$\left(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^2.$$

Причем при целых p, $|p| \geqslant 2$ радиус сходимости рядов (21) и (22) равен $R = 2\sin\dfrac{\pi}{|p|}$.

8°. $Q_n(x+y) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} C_n^{\nu} x^{[\nu]} Q_{n-\nu}(y) \quad (n \geqslant 0).$

9°. При $p = p_1 p_2$ $(p_1, p_2 \geqslant 2)$

$$\sum_{\nu=0}^{p_1-1} Q_n(p, x+\nu p_2) = p_1 Q_n(p_2, x) \qquad (n \geqslant 0).$$

10°. $Q_n(p-x) = (-1)^n Q_n(x)$, $\overline{Q}_n(p-x) = (-1)^n \overline{Q}_n(x) \quad (n \geqslant 0),$
где $\overline{Q}_n(x) = Q_n(p\{x/p\})$ — периодизированный полином $Q_n(x)$.

11°. $\dfrac{\Delta_p Q_n(x)}{p} = n\, x^{[n]-1} \qquad (n \geqslant 1).$

12°. $Q_n(p, 0) + Q_n\left(p, \dfrac{p}{2}\right) = 2Q_n\left(\dfrac{p}{2}, 0\right) \qquad (n \geqslant 0).$

13°. Пусть $g(x)$ — многочлен степени n. Тогда уравнение в конечных разностях

$$\frac{\Delta_p f(x)}{p} = \delta g(x)$$

с неизвестным многочленом $f(x)$ имеет решением функцию

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{Q_\nu}{\nu!}\, \delta^\nu \mu g(x).$$

Причем при любых x и h выполняется равенство

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{Q_\nu(h)}{\nu!}\, \delta^\nu \mu g(x).$$

14°. Для любого многочлена $g(x)$ степени n справедлива формула

$$\delta g(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{Q_\nu(h)}{\nu!} \cdot \frac{\delta^\nu \mu \Delta_p g(x)}{p}.$$

Приведем доказательство свойства 7°. Все остальные свойства проверяются либо при помощи определений (14) и (15), либо при помощи свойства 7° и соотношений (17)–(20).

7°. Так как $\mathcal{B}_{1/2}(0) = 1$, то достаточно доказать формулу для производящей функции последовательности $\{Q_n(x)\}$. Обозначим эту функцию через $F_Q(x,z)$:

$$F_Q(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{n!} z^n. \tag{23}$$

Согласно свойству 8° полиномов $K_n(x)$

$$Q_n(x) = K_n\left(\frac{n}{2} - 1 + x\right) = \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu \left(\frac{n}{2} - 1\right)^{\underline{\nu}} K_{n-\nu}(x).$$

Подставим это соотношение в формулу (23) и преобразуем полученную двойную сумму:

$$\begin{aligned}
F_Q(x,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu \left(\frac{n}{2} - 1\right)^{\underline{\nu}} K_{n-\nu}(x) = \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{z^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \left(\frac{n}{2} - 1\right)^{\underline{\nu}} K_{n-\nu}(x) = \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} \left(\frac{n+\nu}{2} - 1\right)^{\underline{\nu}} z^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} z^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{n+\nu}{2} - 1\right)^{\underline{\nu}} \frac{z^\nu}{\nu!}.
\end{aligned}$$

Упрощая последнюю сумму по формуле (20), приходим к равенству

$$F_Q(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!}\, z^n \frac{2\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{n}{2}-1}}{1+\mathcal{B}_{1/2}(z)^{-1}} = \frac{2}{1+\mathcal{B}_{1/2}(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} \left(z\,\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}\right)^n.$$

Последняя сумма представляет собой производящую функцию последовательности $\{K_n(x)\}$ с аргументом $z\,\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$F_Q(x,z) = \frac{2}{1+\mathcal{B}_{1/2}(z)} \cdot \frac{pz\,\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}\left(1+z\,\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}\right)^x}{\left(1+z\,\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}\right)^p - 1}.$$

Из формулы (18) следует, что

$$1+z\,\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{B}_{1/2}(z). \tag{24}$$

Поэтому можно записать более простое представление для функции $F_Q(x,z)$:

$$F_Q(x,z) = \frac{2p\,\mathcal{B}_{1/2}(z)^x}{1+\mathcal{B}_{1/2}(z)} \cdot \frac{\mathcal{B}_{1/2}(z)-1}{\mathcal{B}_{1/2}(z)^p - 1}. \tag{25}$$

Равенство (24) можно рассматривать как квадратное уравнение с неизвестной $\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}$. Решая его, получаем явный вид функции $\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}}$:

$$\mathcal{B}_{1/2}(z)^{\frac{1}{2}} = \frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2}. \tag{26}$$

(Перед корнем необходимо выбрать знак $+$, поскольку $\mathcal{B}_{1/2}(0)^{\frac{1}{2}} = 1$.) Подставляя формулу (26) в (25), приходим к нужному равенству для функции $F_Q(x,z)$.

Нетрудно проверить, что при целых p ($|p| \geqslant 2$) особыми точками функции $F_Q(x,z)$ будут числа $z_\nu = 2i\sin\dfrac{\nu\pi}{p}$ $\quad(1 \leqslant \nu < |p|)$. Поэтому радиус сходимости ряда для функции $F_Q(x,z)$ будет равен $2\sin\dfrac{\pi}{|p|}$, то есть будет тем же, что и для функции $F_K(x,z)$.

С геометрической точки зрения многочлены $Q_n(x)$ оказываются более близкими к многочленам Бернулли. Как уже отмечалось ранее, геометрическим свойством многочленов Бернулли четного порядка является знакопостоянство функции $B_{2n}(x) - B_{2n}$ на отрезке $[0;1]$. Аналогичное свойство справедливо и для многочленов $Q_n(x)$ с четными номерами. Функция $Q_{2n}(x)$ раскладывается в конечный ряд Фурье по косинусам с положительными коэффициентами. Поэтому среди целых точек отрезка $[0;p]$ эта функция принимает наибольшее по модулю значение в нуле:

$$Q_{2n}(0) = Q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{\sin^{2n}\frac{\pi m}{p}} \quad (n \geqslant 1). \tag{27}$$

Отсюда следует, что функции вида $Q_{2n}(x) - Q_{2n}$ сохраняют знак в целых точках отрезка $[0;p]$. Кроме этого, многочлены $Q_{2n}(x) - Q_{2n}$ и $Q_{2n+2}(x) - Q_{2n+2}$ имеют разные знаки на отрезке $[0;p]$.

Одним из геометрических свойств многочленов Бернулли нечетного порядка является то, что они обращаются в ноль в точках 0, $1/2$ и 1:

$$B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1/2) = B_{2n+1}(1) = 0 \qquad (n \geqslant 0). \tag{28}$$

Для многочленов $Q_n(x)$ это свойство немного изменяется из–за того, что многочлен $Q_{2n+1}(x)$ принимает в точке 0 ненулевое значение. Из свойств 10° и 11° многочленов $Q_n(x)$ следует, что

$$Q_{2n+1}(0) = p\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{4n+1}}C_{2n}^n \qquad (n \geqslant 0).$$

Поэтому аналогом свойства (28) будет равенство

$$\mu Q_{2n+1}(0) = Q_{2n+1}(p/2) = \mu Q_{2n+1}(p) = 0 \qquad (n \geqslant 0),$$

которое следует из свойств 3° и 10° многочленов $Q_n(x)$.

5 Формулы суммирования и интерполяции

В работе [6] были доказаны дискретные аналоги формул (1) и (2).

Теорема 1 *Пусть* n, h, x — *целые числа,* $p \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ *и* $h \leqslant \dfrac{x}{p} < h+1$. *Тогда справедливо равенство*

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1} f\left(h+\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\overline{K}_\nu(x)}{\nu!}\,\Delta^{\nu-1} f\left(h+\frac{y}{p}\right)\Bigg|_{y=0}^{p} - R_n[f],$$

где остаток $R_n[f]$ *может быть записан двумя способами:*

$$R_n[f] = \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1} \frac{\overline{K}_n(p+x-y-1)}{n!}\,\Delta^n f\left(h+\frac{y}{p}\right), \tag{29}$$

$$R_n[f] = \frac{(-1)^n}{p}\sum_{y=0}^{p-1} \frac{\overline{K}_n(y-x-n-1)}{n!}\,\Delta^n f\left(h+\frac{y}{p}\right).$$

Теорема 2 *Пусть* $p \geqslant 2$, $b > a$ *и* $n \geqslant 1$ — *целые числа. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{h=a}^{b-1} f(h) = \frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1} f\left(\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{K_\nu}{\nu!}\,\Delta^{\nu-1} f\left(\frac{y}{p}\right)\Bigg|_{ap}^{bp} - R_n[f], \tag{30}$$

где остаток $R_n[f]$ *может быть записан двумя способами:*

$$R_n[f] = \frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1} \frac{\overline{K}_n(p-y-1)}{n!}\,\Delta^n f\left(\frac{y}{p}\right), \tag{31}$$

$$R_n[f] = \frac{(-1)^n}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1} \frac{\overline{K}_n(y+n-1)}{n!}\,\Delta^n f\left(\frac{y}{p}\right).$$

Полностью аналогично (при помощи преобразования Абеля) доказываются соответствующие формулы и для полиномов $Q_n(x)$. Через Σ^* будем обозначать сумму, в которой крайние слагаемые берутся с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$:

$$\sum_{\nu=a}^{b}{}^{*} f(x) = \frac{1}{2}f(a) + f(a+1) + \ldots + f(b-1) + \frac{1}{2}f(b).$$

Теорема 3 *Пусть* n, h, x — *целые числа,* $p \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ *и* $h \leqslant \dfrac{x}{p} < h+1$. *Тогда справедливо равенство*

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p}{}^{*} f\left(h+\frac{y}{p}\right) +$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\mu\overline{Q}_{2\nu-1}(x)}{(2\nu-1)!}\,\delta^{2\nu-2} f\left(h+\frac{y}{p}\right) + \frac{\overline{Q}_{2\nu}(x)}{(2\nu)!}\,\delta^{2\nu-1}\mu f\left(h+\frac{y}{p}\right)\right]_{y=0}^{p} - R_{2n}[f],$$

где

$$R_{2n}[f] = \frac{1}{p} \sum_{y=0}^{p}{}^{*} \frac{\overline{Q}_{2n}(y-x)}{(2n)!} \delta^{2n} f\left(h + \frac{y}{p}\right).$$

Теорема 4 *Пусть* $p \geqslant 2$, $b > a$ *и* $n \geqslant 1$ *— целые числа. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{h=a}^{b}{}^{*} f(h) = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp}{}^{*} f\left(\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{Q_{2\nu}}{(2\nu)!} \delta^{2\nu-1} \mu f\left(\frac{y}{p}\right)\Bigg|_{ap}^{bp} - R_{2n}[f], \tag{32}$$

где

$$R_{2n}[f] = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp}{}^{*} \frac{\overline{Q}_{2n}(y)}{(2n)!} \delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right) = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp}{}^{*} \frac{\overline{Q}_{2n}(p-y)}{(2n)!} \delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right). \tag{33}$$

Замечание 2. Известно, что формула Эйлера допускает нестрогий символический вывод, основанный на формальной связи между опрераторами сдвига, дифференцирования и оператором конечной разности (см. [1], [2], [5]). Ее дискретный аналог (30) также может быть получен при помощи формальных рассуждений (см. [6]). Аналогично формулу (32) без остаточного члена

$$\sum_{h=a}^{b}{}^{*} f(h) = \frac{1}{p} \sum_{y=ap}^{bp}{}^{*} f\left(\frac{y}{p}\right) + \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Q_{2\nu}}{(2\nu)!} \delta^{2\nu-1} \mu f\left(\frac{y}{p}\right)\Bigg|_{ap}^{bp}$$

можно вывести из символических равенств $\mathcal{B}_{1/2}(\delta)^{\frac{1}{2}} = E$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{2n}}{(2n)!} \delta^{2n} = \frac{p\delta}{2\mu} \cdot \frac{E^p + 1}{E^p - 1}.$$

6 Оценки остаточных членов в формулах суммирования

Существуют различные оценки остатка $R_n[f]$ из формулы суммирования Эйлера (1) (см. [1]). Так как при $n > 1$ $B_{2n-1} = 0$, то остатки $R_{2n-1}[f]$ и $R_{2n-2}[f]$ совпадают. Для них всегда справедлива оценка

$$|R_{2n-1}[f]| = |R_{2n-2}[f]| \leqslant \frac{(b-a)|B_{2n}|}{(2n)!} \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(2n)}(\xi)|. \tag{34}$$

Если же известно, что функции $f^{(2n)}(x)$ и $f^{(2n+2)}(x)$ на отрезке $[a;b]$ знакопостоянны и имеют одинаковый знак, то остатки $R_{2n-1}[f]$ и $R_{2n-2}[f]$ допускают представление

$$R_{2n-1}[f] = R_{2n-2}[f] = \frac{\theta B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(x)\Big|_a^b \qquad (-1 \leqslant \theta \leqslant 0). \tag{35}$$

Получим оценки для остаточного члена формулы (30). Они будут несколько отличаться от оценок (34) и (35), поскольку многочлены $K_n(x)$ не повторяют в полной мере геометрические свойства полиномов Бернулли.

Теорема 5 *Пусть* $p \geqslant 2$, $b > a$ *и* $n \geqslant 1$ *— целые числа. Тогда остаток (31) допускает оценку*

$$|R_{2n-1}[f]| \leqslant 2(b-a) \frac{|Q_{2n}|}{(2n)!} \max_{y \in [ap;bp-1]} \left| \Delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right) \right|.$$

Если известно, что функция $\Delta f^{2n}\left(\dfrac{y}{p}\right)$ *не меняет знак на отрезке* $[ap; bp-1]$, *то справедливо неравенство*

$$R_{2n-1}[f] = \frac{2\theta Q_{2n}}{p(2n)!}\,\Delta^{2n-1} f\left(\frac{y}{p}\right)\Big|_{ap}^{bp} \qquad (\,|\theta|<1).$$

Доказательство. Запишем остаток $R_{2n-1}[f]$ в виде

$$R_{2n-1}[f] = -\frac{1}{p}\frac{K_{2n}}{(2n)!}\,\Delta^{2n-1} f\left(\frac{y}{p}\right)\Big|_{ap}^{bp} + R_{2n}[f] =$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp-1}\Delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right)\frac{\overline{K}_{2n}(p-y-1)-K_{2n}}{(2n)!}.$$

Первая оценка теоремы получается, если вынести за знак суммы наибольшее значение $\Delta^{2n} f\left(\dfrac{y}{p}\right)$ и воспользоваться неравенством $\left|\overline{K}_{2n}(p-y-1)-K_{2n}\right| \leqslant 2|Q_{2n}|$.

Если же известно, что величина $\Delta^{2n} f\,(y/p)$ сохраняет знак при $y \in [ap; bp-1]$, то остаток может быть записан в виде

$$R_{2n-1}[f] = \frac{2\theta Q_{2n}}{p(2n)!}\sum_{y=ap}^{bp-1}\Delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right) = \frac{2\theta Q_{2n}}{p(2n)!}\,\Delta^{2n-1} f\left(\frac{y}{p}\right)\Big|_{ap}^{bp} \quad (|\theta|\leqslant 1).$$

Свойства многочленов $Q_n(x)$ с геометрической точки зрения повторяют свойства многочленов Бернулли. Поэтому для многочленов $Q_n(x)$ можно доказать два результата полностью аналогичные оценкам (34) и (35).

Теорема 6 *Пусть* $p \geqslant 2$, $b > a$ *и* $n \geqslant 1$ *— целые числа. Тогда остаток (33) допускает оценку*

$$|R_{2n-2}[f]| \leqslant 2(b-a)\frac{|Q_{2n}|}{(2n)!}\max_{y\in[ap;bp]}\left|\delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right)\right|.$$

Если же известно, что функции $\delta^{2n} f\left(\dfrac{x}{p}\right)$ *и* $\delta^{2n+2} f\left(\dfrac{x}{p}\right)$ *в целых точках отрезка* $[ap; bp]$ *знакопостоянны и имеют одинаковый знак, то остаток* $R_{2n-2}[f]$ *допускает представление*

$$R_{2n-2}[f] = \frac{\theta Q_{2n}}{p(2n)!}\,\delta^{2n-1}\mu f\left(\frac{x}{p}\right)\Big|_{ap}^{bp} \qquad (-1\leqslant\theta\leqslant 0).$$

Доказательство. Первая оценка теоремы является непосредственным следствием формулы (33). Для доказательства второй оценки запишем остаток $R_{2n-2}[f]$ в виде

$$R_{2n-2}[f] = R_{2n}[f] - \frac{1}{p}\frac{Q_{2n}}{(2n)!}\,\delta^{2n-1}\mu f\left(\frac{y}{p}\right)\Big|_{ap}^{bp} = \tag{36}$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp}{}^{*}\,\delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right)\frac{\overline{Q}_{2n}(y)-Q_{2n}}{(2n)!}.$$

Аналогично

$$R_{2n}[f] = \frac{1}{p}\sum_{y=ap}^{bp}{}^{*}\,\delta^{2n+2} f\left(\frac{y}{p}\right)\frac{\overline{Q}_{2n+2}(y)-Q_{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

По условию дано, что функции $\delta^{2n} f\left(\frac{y}{p}\right)$ и $\delta^{2n+2} f\left(\frac{y}{p}\right)$ в целых точках отрезка $[ap; bp]$ знакопостоянны и имеют одинаковый знак. Кроме того, функции $\overline{Q}_{2n}(y) - Q_{2n}$ и $\overline{Q}_{2n+2}(y) - Q_{2n+2}$ также знакопостоянны, но имеют противоположные знаки. Значит остатки $R_{2n-2}[f]$ и $R_{2n}[f]$ имеют противоположные знаки. Теперь утверждение теоремы следует из равенства (36).

Замечание 3. Оценки остатков, полученные в теоремах 5 и 6 при росте p асимптотически совпадают с оценками (34) и (35). Действительно, величина $\Delta^{\nu} f(y/p)$ приближенно равна $p^{-\nu} f^{(\nu)}(y/p)$. А рост чисел Q_{2n} можно оценить при помощи формулы (27). Из разложения функции $x^{2n}/\sin^{2n} x$ в ряд Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует, что при $x \in (0; 1/2)$

$$\frac{1}{\sin^{2n} x} = \frac{1}{x^{2n}} + \frac{3\theta_x n^2}{x^{2n-2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2} \qquad (0 < \theta_x < 1).$$

Подставляя это равенство в формулу (27), получаем верхнюю оценку на Q_{2n}:

$$|Q_{2n}| \leqslant p^{2n} \left(|B_{2n}| + \frac{(2n)!}{p^2}\right).$$

Замечание 4. Выше были изучены многочлены $K_n(x)$ и $Q_n(x)$. Можно было бы также рассмотреть числа W_n и многочлены $W_n(x)$, которые получаются если в определении 1 заменить убывающие факториальные степени на возрастающие:

$$W_0 = 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} C_n^{\nu} W_{\nu} p^{\overline{n-\nu}} = W_n \qquad (n \geqslant 2);$$

$$W_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} C_n^{\nu} W_{\nu} x^{\overline{n-\nu}} \qquad (n \geqslant 0).$$

Многочлены $W_n(x)$ связаны с $K_n(x)$ равенством $W_n(p, x) = (-1)^n K_n(-p, -x)$. При этом для многочленов $W_n(x)$ справедливы свойства аналогичные свойствам 1°—14° полиномов Коробова. Основные отличия будут в том, что разностный оператор Δ заменится на оператор ∇, а убывающие факториальные степени — на возрастающие. Для многочленов $W_n(x)$ можно также доказать утверждения, аналогичные теоремам 1, 2 и 5.

Список литературы

[1] Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей.* — М.: Наука, 1967.

[2] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* — М.: Мир, 1998.

[3] Коробов Н. М. *Специальные полиномы и их приложения.* — Диофантовы приближения. Матем. записки, 1996, т. 2, с. 77–89.

[4] Коробов Н. М. *Теоретикочисловые методы в приближенном анализе.* — М.: Физматгиз, 1963.

[5] Стефенсен И. Ф. *Теория интерполяции.* — М. — Л.: ОНТИ, 1935.

[6] Устинов А. В. *Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера.* — Матем. заметки, в печати.