Об одном обобщении чисел Стирлинга

Устинов А. В.*

Моему учителю, Н. М. Коробову, к его 85–летию

В работе вводятся обобщенные числа Стирлинга. Для них доказываются свойства, аналогичные свойствам обычных чисел Стирлинга. В частности, с их помощью доказывается аналог теоремы Клаузена — фон Штаудта для дискретных аналогов чисел Бернулли (чисел Коробова). Дается также комбинаторная интерпретация обобщенных чисел Стирлинга в терминах теории графов.

1 Числа Стирлинга

Числа Стирлинга представляют собой двупараметрические семейства специальных чисел. Они возникают в различных комбинаторных задачах и при анализе других специальных чисел (см., например, [4], [8], [11]). Числа Стирлинга 1–го рода $\left[{n \atop k}\right]$ $(0 \le k \le n)$ определяются как количество перестановок из n элементов с k циклами. Числа Стирлинга 2–го рода $\left\{{n \atop k}\right\}$ $(0 \le k \le n)$ равны числу разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств. При $k < 0$ или $k > n$ числа Стирлинга считаются равными нулю.

Равносильное определение получается, если числа Стирлинга задать как коэффициенты в разложениях

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}} \qquad (n \ge 0), \tag{1}$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k \qquad (n \ge 0). \tag{2}$$

Здесь и далее через $x^{\underline{n}}$ и $x^{\overline{n}}$ будем обозначать убывающие и возрастающие факториальные степени:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1),$$
$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1).$$

*Работа выполнена при частичной поддержке фонда РФФИ, гранд N 01-01-00738

Из формул (1) и (2) легко находятся граничные значения чисел Стирлинга

$$\left\{ n \atop 0 \right\} = \left[n \atop 0 \right] = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = 0, \\ 0, & \text{если} \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{3}$$

$$\left\{ n \atop n \right\} = \left[n \atop n \right] = 1 \qquad (n \geq 0), \tag{4}$$

и рекуррентные соотношения:

$$\left\{ n \atop k \right\} = k \left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} \qquad (1 \leq k < n), \tag{5}$$

$$\left[n \atop k \right] = (n-1) \left[n-1 \atop k \right] + \left[n-1 \atop k-1 \right] \qquad (1 \leq k < n). \tag{6}$$

Условия (3)–(6) также однозначно определяют числа Стирлинга и позволяют легко вычислить их первые значения:

n	$\left\{ n \atop 0 \right\}$	$\left\{ n \atop 1 \right\}$	$\left\{ n \atop 2 \right\}$	$\left\{ n \atop 3 \right\}$	$\left\{ n \atop 4 \right\}$
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	3	1	
4	0	1	7	6	1

n	$\left[n \atop 0 \right]$	$\left[n \atop 1 \right]$	$\left[n \atop 2 \right]$	$\left[n \atop 3 \right]$	$\left[n \atop 4 \right]$
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	2	3	1	
4	0	6	11	6	1

Отметим несколько известных свойств чисел Стирлинга (см. [4], [8]). После замены переменной x на $-x$ в определениях (1)–(2) получаются еще две формулы, связывающие между собой обычные и факториальные степени:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} \qquad (n \geq 0), \tag{7}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] (-1)^{n-k} x^{k} \qquad (n \geq 0). \tag{8}$$

Эквивалентность формул (1)–(2) и (7)–(8) является частным случаем более общего утверждения: для функций $f(n)$ и $g(n)$, определенных на множестве целых неотрицательных чисел справедливы взаимно обратные соотношения

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (-1)^k f(k) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = \sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] (-1)^k g(k). \tag{9}$$

При подстановке одного из этих равенств в другое получаются ортогональные соотношения для чисел Стирлинга 1-го и 2–го рода

$$\sum_k \left\{ n \atop k \right\} \left[k \atop m \right] (-1)^{n-k} = \sum_k \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop m \right\} (-1)^{n-k} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

равносильные (9).

Экспоненциальные производящие функции последовательностей $\left\{ {n \atop k} \right\}$ и $\left[{n \atop k} \right]$ ($k = n, n+1, n+2, \ldots$) имеют следующий вид

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z - 1)^k}{k!},$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[{n \atop k} \right] \frac{z^n}{n!} = \frac{\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^k}{k!}.$$

С помощью чисел Стирлинга можно получить явное представление для чисел Бернулли:

$$\sum_k \left\{ {m \atop k} \right\} \left[{k+1 \atop n} \right] \frac{(-1)^{k+1-n}}{k+1} = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{n} B_{m+1-n} \qquad (n > 0). \tag{10}$$

Также бывают полезными равенства

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}, \qquad \left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_k \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m}.$$

2 Обобщенные числа Стирлинга

Пусть p — фиксированное действительное число. Наряду с убывающими и возрастающими факториальными степенями будем рассматривать произведения, в которых каждый следующий сомножитель отличается от предыдущего на p:

$$x(x-p)(x-2p)\ldots(x-(n-1)p) = p^n \left(\frac{x}{p}\right)^{\underline{n}},$$

$$x(x+p)(x+2p)\ldots(x+(n-1)p) = p^n \left(\frac{x}{p}\right)^{\overline{n}}.$$

Пустые произведения (при $n = 0$) по определению предполагаются равными единице; при $p = 0$ будем считать, что $p^n\,(x/p)^{\underline{n}} = p^n\,(x/p)^{\overline{n}} = x^n$.

Определим обобщенные числа Стирлинга 1–го рода $\left[{n \atop k} \right]_p$ и 2–го рода $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$ как коэффициенты в равенствах

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_p p^k \left(\frac{x}{p}\right)^{\underline{k}}, \tag{11}$$

$$p^n \left(\frac{x}{p}\right)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right]_p x^{\overline{k}}. \tag{12}$$

Предложение 1 *Обобщенные числа Стирлинга удовлетворяют граничным условиям*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}_p = \left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right]_p = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad n = 0, \\ 0, & \textit{если} \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{13}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}_p = \left[\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right]_p = 1 \qquad (n \geq 0), \tag{14}$$

и рекуррентным соотношениям

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p = (kp - n + 1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_p + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_p \qquad (1 \leq k < n), \tag{15}$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_p = (p(n-1) - k) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_p + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_p \qquad (1 \leq k < n). \tag{16}$$

Доказательство. Равенства (13)–(14) непосредственно следуют из определений обобщенных чисел Стирлинга (11)–(12).

Для доказательства первой рекуррентной формулы в тождестве

$$x^{\underline{n}} = (x \cdot x^{\underline{n-1}} - x(x-p)^{\underline{n-1}}) - (n-1)x^{\underline{n-1}} + x(x-p)^{\underline{n-1}}$$

разложим убывающие факториальные степени по формуле (11):

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p p^k \left(\frac{x}{p} \right)^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_p p^{k+1}(k-1) \left(\frac{x}{p} \right)^{\underline{k}} -$$

$$-(n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_p p^k \left(\frac{x}{p} \right)^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_p p^{k+1} \left(\frac{x}{p} \right)^{\underline{k+1}}.$$

Далее, сравнивая коэффициенты при слагаемых вида $p^k \left(x/p \right)^{\underline{k}}$, приходим к равенству (15).

Аналогично из тождества

$$p^n \left(\frac{x}{p} \right)^{\overline{n}} = p(n-1)p^{n-1} \left(\frac{x}{p} \right)^{\overline{n-1}} + xp^{n-1} \left(\frac{x+1}{p} \right)^{\overline{n-1}} -$$

$$- \left[xp^{n-1} \left(\frac{x+1}{p} \right)^{\overline{n-1}} - xp^{n-1} \left(\frac{x}{p} \right)^{\overline{n-1}} \right]$$

для обобщенных чисел Стирлинга 1–го рода получается рекуррентное соотношение (16).

Пользуясь формулами (13)–(16) легко вычислить первые элементы последовательностей $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_p$ и $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_p$:

n	$\left\{ {n \atop 0} \right\}_p$	$\left\{ {n \atop 1} \right\}_p$	$\left\{ {n \atop 2} \right\}_p$	$\left\{ {n \atop 3} \right\}_p$	$\left\{ {n \atop 4} \right\}_p$
0	1				
1	0	1			
2	0	$p-1$	1		
3	0	$(p-1)(p-2)$	$3(p-1)$	1	
4	0	$(p-1)(p-2)(p-3)$	$(p-1)(7p-11)$	$6(p-1)$	1

n	$\left[{n \atop 0} \right]_p$	$\left[{n \atop 1} \right]_p$	$\left[{n \atop 2} \right]_p$	$\left[{n \atop 3} \right]_p$	$\left[{n \atop 4} \right]_p$
0	1				
1	0	1			
2	0	$p-1$	1		
3	0	$(p-1)(2p-1)$	$3(p-1)$	1	
4	0	$(p-1)(2p-1)(3p-1)$	$(p-1)(11p-7)$	$6(p-1)$	1

Из определений следует, что величины $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$ и $\left[{n \atop k} \right]_p$ являются многочленами от параметра p степени $n-k$ и, в частности,

$$\begin{gathered} \left\{ {n \atop 1} \right\}_p = (p-1)(p-2)\dots(p-(n-1)), \\ \left[{n \atop 1} \right]_p = (p-1)(2p-1)\dots(p(n-1)-1), \\ \left\{ {n \atop n-1} \right\}_p = \left[{n \atop n-1} \right]_p = \binom{n}{2}(p-1). \end{gathered} \tag{17}$$

Глядя на приведенные таблицы можно заметить, что старшие и младшие коэффициенты этих многочленов совпадают с обычными числами Стирлинга. Кроме этого видно, что многочлен $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$ переходит в $\left[{n \atop k} \right]_p$ (с точностью до знака) при перестановке коэффициентов в обратном порядке.

Предложение 2 *Обобщенные числа Стирлинга $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$ и $\left[{n \atop k} \right]_p$ связаны друг с другом соотношениями*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_{\frac{1}{p}} = \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-k} \left[{n \atop k} \right]_p, \qquad \left[{n \atop k} \right]_{\frac{1}{p}} = \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-k} \left\{ {n \atop k} \right\}_p \qquad (p \neq 0). \tag{18}$$

Кроме того, они связаны с обычными числами Стирлинга равенствами

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_0 = (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right], \qquad \left[{n \atop k} \right]_0 = (-1)^{n-k} \left\{ {n \atop k} \right\}, \tag{19}$$

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p^{n-k}} \left\{ {n \atop k} \right\}_p = \left\{ {n \atop k} \right\}, \qquad \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p^{n-k}} \left[{n \atop k} \right]_p = \left[{n \atop k} \right]. \tag{20}$$

Доказательство. Покажем справедливость первого из равенств (18). Второе будет получаться из него заменой $p \to 1/p$. Действительно, из условий (13) и (14) следует, что формула

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_{\frac{1}{p}} = \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-k} \left[{n \atop k} \right]_p \tag{21}$$

выполняется при $k = 0$ и при $k = n$. Поэтому достаточно убедиться, что величины, стоящие в разных частях этой формулы удовлетворяют одним и тем же рекуррентным соотношениям. Согласно (15) числа $\left\{ {n \atop k} \right\}_{\frac{1}{p}}$ связаны условием

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_{\frac{1}{p}} = \left(\frac{k}{p} - n + 1\right) \left\{ {n-1 \atop k} \right\}_{\frac{1}{p}} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le k < n). \tag{22}$$

С другой стороны, соотношение (16) можно переписать в виде

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^{n-k} \left[{n \atop k} \right]_p = \left(\frac{k}{p} - n + 1\right) \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1-k} \left[{n-1 \atop k} \right]_p + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-k} \left[{n-1 \atop k-1} \right]_p . \tag{23}$$

Из совпадения коэффициентов в формулах (22) и (23) вытекает равенство (21).

Аналогично для доказательства равенств (19) достаточно проверить совпадение граничных условий и рекуррентных соотношений.

Равенства (20) получаются, если в (18) перейти к пределу при $p \to \infty$ и воспользоваться соотношениями (19).

Предложение 2 можно интерпретировать следующим образом: числа $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$ и $\left[{n \atop k} \right]_p$ играют двойственную (в смысле соотношения (18)) роль друг по отношению к другу и занимают промежуточное положение между числами Стирлинга 1-го и 2–го рода.

3 Дальнейшие свойства обобщенных чисел Стирлинга

Предложение 3 *Обобщенные числа Стирлинга связаны ортогональными соотношениями*

$$\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\}_p \left[{k \atop m} \right]_p (-1)^{n-k} = \sum_k \left[{n \atop k} \right]_p \left\{ {k \atop m} \right\}_p (-1)^{n-k} = \delta_{mn}.$$

Доказательство. После замены в равенствах (11)–(12) переменной x на $-x$, получаются еще два соотношения для чисел $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$ и $\left[{n \atop k} \right]_p$, аналогичные формулам (7)–(8):

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_p (-1)^{n-k} p^k \left(\frac{x}{p}\right)^{\overline{k}} \qquad (n \ge 0), \tag{24}$$

$$p^n \left(\frac{x}{p}\right)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right]_p (-1)^{n-k} x^{\underline{k}} \qquad (n \ge 0). \tag{25}$$

Применяя последовательно равенства (11) и (25) получаем

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\}_p p^k \left(\frac{x}{p}\right)^{\underline{k}} = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\}_p \sum_m \left[{k \atop m} \right]_p (-1)^{k-m} x^{\underline{m}},$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_m x^{\underline{m}} \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\}_p \left[{k \atop m} \right]_p (-1)^{k-m}.$$

Сравнение коэффициентов при слагаемых вида $x^{\underline{m}}$ приводит к первому ортогнальному соотношению

$$\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\}_p \left[{k \atop m} \right]_p (-1)^{n-k} = \delta_{mn}.$$

Аналогично с помощью формул (12) и (24) проверяется тождество

$$\sum_k \left[{n \atop k} \right]_p \left\{ {k \atop m} \right\}_p (-1)^{n-k} = \delta_{mn}.$$

Следствие 1 *Для обобщенных чисел Стирлинга справедливы взаимно обратные соотношения аналогичные (9):*

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_p (-1)^k f(k) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right]_p (-1)^k g(k).$$

Для доказательства достаточно подставить одну из формул в другую и воспользоваться предложением 3.

Предложение 4 *Экспоненциальные производящие функции последовательностей* $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$ *и* $\left[{n \atop k} \right]_p$ $(k = n, n+1, n+2, \ldots)$ *имеют вид*

$$F_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\}_p \frac{z^n}{n!} = \left[\frac{(1+z)^p - 1}{p}\right]^k \frac{1}{k!}, \tag{26}$$

$$G_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \left[{n \atop k} \right]_p \frac{z^n}{n!} = \left[1 - (1 - pz)^{\frac{1}{p}}\right]^k \frac{1}{k!}. \tag{27}$$

Доказательство. Проверим сначала справедливость первой формулы. При $k = 0$ равенство (26) непосредственно следует из условия (13). Далее применим индукцию. Предположим, что $k \geq 1$ и для $k-1$ нужное равенство уже доказано. Из рекуррентного соотношения (15) следует, что

$$F_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} (kp - n + 1) \left\{ {n-1 \atop k} \right\}_p \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_p \frac{z^n}{n!}.$$

Дифференцируя последнее равенство по z приходим к дифференциальному уравнению для функции $F_k(z)$:

$$F_k'(z) = kpF_k(z) - zF_k'(z) + F_{k-1}(z)$$

или

$$(1+z)F_k'(z) = kpF_k(z) + F_{k-1}(z).$$

Решая его методом вариации постоянной с учетом начального условия $F_k(0) = 0$ получаем формулу (26).

Равенство (27) проверяется аналогично. Оно, очевидно, верно при $k = 0$. Как и в предыдущем случае, для перехода от $k-1$ к k, применим к левой части формулы (27) рекуррентное соотношение (16):

$$G_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty}(p(n-1)-k)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_p \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_p \frac{z^n}{n!}.$$

Продифференцируем полученное равенство по z. Результатом будет дифференциальное уравнение для функции $G_k(z)$

$$G_k'(z)(1-pz) = -kG_k(z) + G_{k-1}(z)$$

с начальным условием $G_k(0) = 0$. Его решение даст в точности формулу (27).

Следствие 2 *Для всех целых $m, n \geq 0$ выполняются равенства*

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\}_p = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}_p (p-1)^{\underline{n-k}},$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}_p = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \binom{k}{m} (p-1)^{\overline{k-m}}.$$

Доказательство. Из формулы (26) следует, что функции $F_m(z)$ и $F_{m+1}(z)$ связаны уравнением

$$F_{m+1}'(z) = F_m(z)(1+z)^{p-1}.$$

Сравнивая коэффициенты при z^{n+1} в левой и правой частях этого тождества, получаем формулу первое утверждение теоремы.

Для доказательства второй формулы рассмотрим производную функции $G_{m+1}(z)$, определенной равенством (26):

$$G_{m+1}'(z) = G_m(z)(1-pz)^{\frac{1}{p}-1}.$$

Подставляя в это равенство

$$(1-pz)^{\frac{1}{p}-1} = \left[1 - \left(1-(1-pz)^{\frac{1}{p}}\right)\right]^{1-p} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(1-(1-pz)^{\frac{1}{p}}\right)^j}{j!}(p-1)^{\overline{j}},$$

и, делая замену $k = m + j$, приходим к соотношению

$$G'_{m+1}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} G_k(z) \binom{k}{m} (p-1)^{\underline{n-k}}.$$

Далее, как и в предыдущем случае, остается сравнить коэффициенты при слагаемых вида z^{n+1}.

4 Связь с числами Коробова

Напомним, что числа и полиномы Бернулли определяются равенствами

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu = B_n \qquad (n \geq 2);$$

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu x^{n-\nu} \qquad (n \geq 0).$$

В частности,

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

В ряде задач теории чисел имеют значение арифметические свойства чисел Бернулли.

В 1847 г. Куммер доказал теорему Ферма для множества простых чисел, называемых регулярными. Простое число p называется регулярным, если оно не делит число классов кругового поля $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$. Кроме того, Куммер открыл элементарный критерий регулярности: нечетное простое число p является регулярным, если p не делит числитель ни одного из чисел B_2, B_4, …, B_{p-3} (см. [1], [2]).

Другим примером, в котором непосредственную руль играют арифметические свойства чисел Бернулли, является задача о p–адической интерполяции ζ–функции Римана (см. [5]).

В связи с этим оказываются полезными явные формулы для чисел Бернулли. Примером может служить равенство (10). При $n = 1$ оно приводит к тождеству

$$\sum_j \left\{ {m \atop j} \right\} j! \frac{(-1)^j}{j+1} = B_m. \tag{28}$$

Отсюда уже достаточно просто выводится теорема Клаузена — фон Штаудта: для всякого числа Бернулли B_{2n} найдется целое I_{2n} такое, что

$$B_{2n} = I_{2n} - \sum_{q-1|2n} \frac{1}{q},$$

где суммирование проходит по простым q, для которых $(q-1) \mid 2n$. Эта теорема полностью описывает знаменатели чисел Бернулли и позволяет получать некоторую информацию об их числителях (см. [1], [2], [3]).

В работе [6] Коробовым были введены специальные числа P_n и специальные полиномы $P_n(x)$, которые можно считать дискретными аналогами чисел и полиномов Бернулли. Как и в работе [9], введем числа K_n и полиномы $K_n(x)$ (числа и полиномы Коробова) при помощи равенств

$$K_0 = 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} K_\nu p^{\underline{n-\nu}} = K_n \qquad (n \geq 2); \tag{29}$$

$$K_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} K_\nu x^{\underline{n-\nu}} \qquad (n \geq 0). \tag{30}$$

Числа K_n и полиномы $K_n(x)$ отличаются от чисел P_n и полиномов $P_n(x)$ из работ [6]–[7] константой:

$$K_n = n!\, P_n, \qquad K_n(x) = n!\, P_n(x).$$

Они оказываются более удобными, поскольку их свойства имеют большее сходство с аналогичными свойствами чисел и многочленов Бернулли.

Пользуясь определениями (29)–(30) нетрудно вычислить первые числа и полиномы Коробова:

$$K_1 = -\frac{p-1}{2}, \quad K_2 = \frac{p^2-1}{6}, \quad K_3 = -\frac{p^2-1}{4},$$
$$K_1(x) = x - \frac{p-1}{2}, \quad K_2(x) = x^2 - px + \frac{p^2-1}{6},$$
$$K_3(x) = x^3 - \frac{3(p+1)}{2}x^2 + \frac{p(p+3)}{2}x - \frac{p^2-1}{4}.$$

Различные свойства чисел K_n и полиномов $K_n(x)$ можно найти в работах [6]–[7] и [9]–[10].

Докажем для чисел Коробова формулы, аналогичные равенствам (10) и (28).

Предложение 5 *Для любых $m \geq 0$ и $\nu \geq 1$ выполняется равенство*

$$\sum_j \left\{ {m \atop j} \right\}_p \left[{j+1 \atop \nu} \right]_p \frac{(-1)^{j+1-\nu}}{j+1} = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{\nu} K_{m+1-\nu}. \tag{31}$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$S_m(n) = \sum_{h=0}^{n-1} (ph)^{\underline{m}}.$$

По формуле (9) из работы [6]

$$S_m(n) = \frac{K_{m+1}(np) - K_{m+1}}{p(m+1)}.$$

Далее расписывая $K_{m+1}(np)$ по определению (30), получаем следующее представление для $S_m(n)$:

$$S_m(n) = \frac{1}{p(m+1)} \sum_{\nu=1}^{m+1} \binom{m+1}{\nu} (np)^{\underline{\nu}} K_{m+1-\nu}. \tag{32}$$

С другой стороны, по определению (11) чисел $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$,

$$\begin{aligned} S_m(n) &= \sum_{h=0}^{n-1} (ph)^{\underline{m}} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_j \left\{ {m \atop j} \right\}_p p^j h^{\underline{j}} = \\ &= \sum_j \left\{ {m \atop j} \right\}_p p^j \sum_{h=0}^{n-1} h^{\underline{j}} = \sum_j \left\{ {m \atop j} \right\}_p p^j \frac{n^{\underline{j+1}}}{j+1}. \end{aligned}$$

Расписывая $n^{\underline{j+1}}$ по формуле (25), находим, что

$$\begin{aligned} S_m(n) &= \sum_j \left\{ {m \atop j} \right\}_p \frac{p^j}{j+1} \sum_\nu \left[{j+1 \atop \nu} \right]_p \frac{(-1)^{j+1-\nu} (np)^{\underline{\nu}}}{p^{j+1}} = \\ &= \sum_\nu (np)^{\underline{\nu}} \sum_j \left\{ {m \atop j} \right\}_p \left[{j+1 \atop \nu} \right]_p \frac{(-1)^{j+1-\nu}}{(j+1)p}. \end{aligned} \tag{33}$$

Сравнивая теперь в формулах (32) и (33) коэффициенты при $(np)^{\underline{\nu}}$, приходим к равенству (31).

Следствие 3 *При $m \ge 0$ справедливо соотношение*

$$\sum_j \left\{ {m \atop j} \right\}_p (p-1)(2p-1)\dots(jp-1) \frac{(-1)^j}{j+1} = K_m. \tag{34}$$

Для доказательства формулы (34) достаточно подставить в (31) значение $\nu = 1$ и применить равенство (17) с $\nu = j+1$:

$$\left[{j+1 \atop 1} \right]_p = (p-1)(2p-1)\dots(jp-1) \qquad (j \ge 0).$$

Из следствия 3 для чисел Коробова можно вывести утверждение, аналогичное теореме Клаузена — фон Штаудта для чисел Бернулли.

Следствие 4 *Пусть p — целое число, $m \ge 1$ и $(p, (m+1)!) = 1$. Тогда число K_m является целым.*

Доказательство. В формуле (34) все коэффициенты $\left\{ {m \atop j} \right\}_p$ являются целыми при любых значениях p. Для доказательства следствия покажем, что каждая дробь вида

$$\frac{(p-1)(2p-1)\dots(jp-1)}{j+1} \qquad (0 \le j \le m) \tag{35}$$

также будет целым числом. Действительно, из условия $(p,(m+1)!) = 1$ получаем, что $(p, j+1) = 1$. Отсюда следует, что числа p, $2p$, ..., jp представляют собой полную систему вычетов по модулю $j+1$ без нуля. Значит, одно из чисел $p-1$, $2p-1$, ..., $jp-1$ делится на $j+1$ без остатка, и дробь (35) равна целому числу.

5 Комбинаторная интерпретация обобщенных чисел Стирлинга

Как и обычные числа Стирлинга, числа $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$ и $\left[{n \atop k} \right]_p$ допускают комбинаторную интерпретацию.

Пусть $p \ge 2$ — натуральное число. Рассмотрим следующую задачу. Дан цикл длины p. Требуется расставить n меток 1, 2, ..., n по n различным вершинам этого цикла. Разметки, которые можно совместить поворотом, отождествляются.

Очевидно, что решением этой задачи являются числа

$$\left\{ {n \atop 1} \right\}_p = (p-1)(p-2)\dots(p-(n-1)).$$

Аналогично числа $\left\{ {n \atop 2} \right\}_p$ являются решением задачи о расстановке n различных меток по различным вершинам двух циклов длины p с дополнительным требованием: на каждом из циклов хотя бы одна вершина должна быть помечена. При этом отождествляются разметки, которые можно совместить поворотом или перестановкой циклов.

Пусть, например, $n = 4$ и $k = 2$. Существует $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$ способов разбить множество $\{1,2,3,4\}$ на 2 подмножества:

$$\{1,2\} \cup \{3,4\}\,; \quad \{1,3\} \cup \{2,4\}\,; \quad \{1,4\} \cup \{2,3\}\,;$$
$$\{1\} \cup \{2,3,4\}\,; \quad \{2\} \cup \{1,3,4\}\,; \quad \{3\} \cup \{1,2,4\}\,; \quad \{4\} \cup \{1,2,3\}\,.$$

Нетрудно подсчитать количество способов расположить эти подмножества на циклах (рисунок изображен для случая $p = 4$):

$3(p-1)^2$ вариантов вида $2+2$

$4(p-1)(p-2)$ вариантов вида $1+3$

Общее количество способов расставить метки на двух циклах длины p равно

$$3(p-1)^2 + 4(p-1)(p-2) = (p-1)(7p-11),$$

что совпадает с числом $\left\{ {4 \atop 2} \right\}_p$.

В общем случае нужно рассмотреть граф, состоящий из k циклов, в каждом из которых по p вершин. Помечаются n вершин этого графа числами от 1 до n так, чтобы на каждом из циклов хотя бы одна вершина была помечена. Две разметки отождествляются, если одна может быть получена из другой перестановкой или вращением циклов. При таких условиях общее количество разметок будет совпадать с числом $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$.

Проверим это утверждение для произвольных n и k. Оно, очевидно, справедливо при $k = 0$ и при $k = n$. В общем случае применим индукцию по n и k. Пусть утверждение верно для чисел $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}_p$ и $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_p$. Докажем его для числа $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$. Пусть на k циклах помечено n вершин. Если убрать метку с номером n, то оставшиеся $n-1$ метка может располагаться либо на $k-1$, либо на k циклах. По предположению индукции в первом случае таких графов будет $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_p$, во втором — $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}_p$. Найдем теперь сколькими способами можно вновь поставить метку n. В первом случае есть ровно один вариант — поставить метку на одну из вершин нового (k–го) цикла. Во втором случае метка может быть поставлена на любое из $kp - n + 1$ свободных мест на имеющихся k циклах. Таким образом общее количество способов равно

$$(kp - n + 1) \left\{ {n-1 \atop k} \right\}_p + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_p,$$

что по формуле (15), совпадает с числом $\left\{ {n \atop k} \right\}_p$.

Обобщенные числа Стирлинга 1–го рода допускают интерпретацию в терминах деревьев. Она оказывается более естественной для чисел $(-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right]_{-p}$, которые получаются, если в выражении для $\left[{n \atop k} \right]_p$ все минусы заменить плюсами:

n	$\left[{n \atop 0} \right]_{-p}$	$\pm \left[{n \atop 1} \right]_{-p}$	$\pm \left[{n \atop 2} \right]_{-p}$	$\pm \left[{n \atop 3} \right]_{-p}$	$\pm \left[{n \atop 4} \right]_{-p}$
0	1				
1	0	1			
2	0	$p+1$	1		
3	0	$(p+1)(2p+1)$	$3(p+1)$	1	
4	0	$(p+1)(2p+1)(3p+1)$	$(p+1)(11p+7)$	$6(p+1)$	1

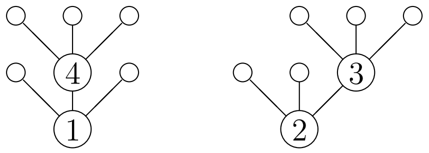
Понятно, что числа

$$(-1)^{n-1} \left[{n \atop 1} \right]_{-p} = (p+1)(2p+1)\ldots(p(n-1)+1)$$

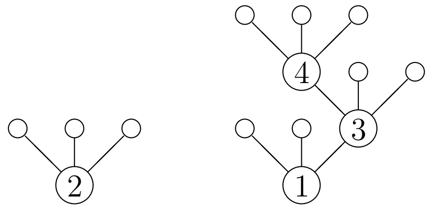
являются решением следующей задачи: найти количество упорядоченных (плоских) корневых деревьев, которые содержат n узлов ветвления степени $p+1$, причем эти узлы ветвления помечены числами от 1 до n так, что при движении от корня к концевому узлу номера меток возрастают; концевые узлы остаются непомеченными.

Аналогично при произвольном k числа $(-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right]_{-p}$. являются решением задачи о подсчете графов, состоящих из k упорядоченных непустых деревьев, которые в совокупности имеют n узлов ветвления степени $p+1$, помеченных числами от 1 до n, и в каждом дереве что при движении от корня к концевому узлу номера меток возрастают; концевые узлы по–прежнему считаются непомеченными.

Например, если $n = 4$ и $k = 2$, то количество таких деревьев легко найти перебором (рисунок изображен для случая $p = 2$):



$3(p+1)^2$ вариантов вида $2+2$



$4(p+1)(2p+1)$ вариантов вида $1+3$

Общее количество таких деревьев равно

$$3(p+1)^2 + 4(p+1)(2p+1) = (p+1)(11p+7),$$

что совпадает с числом $\left[{4 \atop 2}\right]_{-p}$.

Доказательство этого факта, как и в случае обобщенных чисел Стирлинга 2–го рода, проводится индукцией по n и k с использованием того, что числа $(-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right]_{-p}$ при $1 \le k < n$ подчиняются рекуррентному соотношению

$$(-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{-p} = (p(n-1)+k)(-1)^{n-1-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{-p} + (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{-p}.$$

Аналогичную (чуть более сложную) интерпретацию в терминах деревьев можно дать числам $\left[{n \atop k}\right]_p$ и $(-1)^{n-k} \left\{{n \atop k}\right\}_{-p}$.

Подобные задачами связаны с подсчетом химических изомеров. Они рассматривались ранее для графов с другими ограничениями (см., например, [11]–[13]).

Список литературы

[1] Айерленд К., Роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел.* — М.: Мир, 1987.

[2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. *Теория чисел.* — М.: Наука, 1985.

[3] Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей.* — М.: Наука, 1967.

[4] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* — М.: Мир, 1998.

[5] Коблиц Н. *p–адические числа, p–адический анализ и дзета–функции.* — М.: Мир, 1982.

[6] Коробов Н. М. *Специальные полиномы и их приложения.* — Диофантовы приближения. Матем. записки, 1996, т. 2, с. 77–89.

[7] Коробов Н. М. *О некоторых свойствах специальных полиномов.* — Чебышевский сборник, т. 1, Труды IV межд. конф. „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“, 40–49, Тула, 2001.

[8] Риордан Дж. *Комбинаторные тождества.* — М.: Наука, 1982.

[9] Устинов А. В. *О формулах суммирования и интерполяции.* — Чебышевский сборник, т. 1, Труды IV межд. конф. „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“, 52–71, Тула, 2001.

[10] Устинов А. В. *Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера.* — Мат. заметки, т. 71, №6 (2002), 931–936.

[11] Harary F., Mowshowitz A., Riordan J. *Labeled Trees with Unlabeled End–points.* — J. Combinatorial Theory, v. 6, (1969), 60–64.

[12] Moon J. W. *Connected Graphs with Unlabeled End–points.* — J. Combinatorial Theory, v. 6, (1969), 65–66.

[13] Moon J. W. *The Number of Labeled k–Trees.* — J. Combinatorial Theory, v. 6, (1969), 196–199.

119992, Москва, Воробьевы горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико–математический факультет,
кафедра теории чисел
ustinov@mech.math.msu.su