О некоторых уравнениях третьей степени

А. В. УСТИНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 511.51

Ключевые слова: диофантовы уравнения, структура решений.

Аннотация

Работа посвящена изучению структуры решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 \end{cases}$$

и уравнения

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3.$$

Abstract

A. V. Ustinov, On some cubic equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 8 (2002), no. 1, pp. 263–271.

The paper considers the structure of solutions of the system

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 \end{cases}$$

and the equation

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3.$$

В книге Диксона [2] параграфы 51, 52 посвящены решению уравнений третьей степени в рациональных числах. Различными способами получены параметрические записи решений некоторых таких уравнений. Один из способов заключается в том, что соответствующие кубические формы представляются в виде определителя. Например,

$$x^2y + y^2z + z^2w + w^2x = \begin{vmatrix} z & -x & 0 \\ x & y & -w \\ w & z & y \end{vmatrix}$$

Уравнение

$$W^3 + X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$$

после замены переменных

$$\begin{aligned} W &= x + y + z + w, \\ X &= x - y - z + w, \\ Y &= -x + y - z + w, \\ Z &= -x - y + z + w \end{aligned}$$

может быть представлено в виде

$$\begin{vmatrix} w & 3z & -3y \\ -z & w & 3x \\ y & -x & w \end{vmatrix} = 0.$$

В данной работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3. \end{cases} \tag{1}$$

В теореме 1 для неё аналогичным методом получен параметрический вид всех нетривиальных решений. Система (1) изучалась в разных работах. В статье [1] параметризация решений получается исходя из того, что на алгебраическом многообразии, задаваемом системой (1), через любую рациональную точку всегда можно провести прямую с рациональным направляющим вектором. Теорема 2 описывает связь между этими способами параметризации. Вид решений позволяет получить следствия геометрического характера.

Кроме того, в настоящей работе исследуется уравнение

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3. \tag{2}$$

Будем называть тривиальными те решения системы (1) и уравнения (2), в которых значения переменных x_1, x_2, x_3 совпадают со значениями переменных y_1, y_2, y_3 с точностью до перестановки. Остальные решения назовём нетривиальными. После замены переменных

$$a_j = x_j - y_j, \quad b_j = x_j + y_j \quad (j = 1, 2, 3) \tag{3}$$

и применения тождества

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 3a_1a_2a_3 + (a_1 + a_2 + a_3)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3)$$

система (1) примет вид

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 + a_1a_2a_3 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

а уравнение (2) перепишется следующим образом:

$$a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 + D\,a_1a_2a_3 = 0, \tag{5}$$

где

$$D = \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{3a_1a_2a_3}.$$

Решения системы (4) и уравнения (5) будем называть тривиальным, если при переходе к исходным переменным x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 они преобразуются в тривиальные решения системы (1) и уравнения (2) соответственно. Остальные решения будем называть нетривиальными.

Теорема 1. *Пусть $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — нетривиальное рациональное решение системы* (4)*. Тогда существуют $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{Z}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, такие что*

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta(d_3^2 - d_2^2), \quad b_1 = \alpha d_1 + \beta d_2 d_3, \\ a_2 &= \beta(d_1^2 - d_3^2), \quad b_2 = \alpha d_2 + \beta d_1 d_3, \\ a_3 &= \beta(d_2^2 - d_1^2), \quad b_3 = \alpha d_3 + \beta d_1 d_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Систему (4) можно переписать в виде

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — её нетривиальное решение. Ему можно поставить в соответствие ненулевое целочисленное решение (d_1, d_2, d_3) линейной однородной системы уравнений

$$\begin{cases} d_1 a_1 + d_2 b_3 - d_3 b_2 = 0 \\ -d_1 b_3 + d_2 a_2 + d_3 b_1 = 0 \\ d_1 b_2 - d_2 b_1 + d_3 a_3 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Будем теперь считать d_1, d_2, d_3 параметрами, а a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — переменными. Если домножить уравнения системы (8) на d_1, d_2, d_3 соответственно и сложить, то в совокупности с первым уравнением (7) получим

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 d_1^2 + a_2 d_2^2 + a_3 d_3^2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Эту систему можно рассматривать как равенство нулю скалярных произведений вектора (a_1, a_2, a_3) и векторов $(1, 1, 1)$ и (d_1^2, d_2^2, d_3^2). Два последних вектора не могут быть коллинеарны, так как в этом случае имеем

$$d_1 = \varepsilon_1 d, \quad d_2 = \varepsilon_2 d, \quad d_3 = \varepsilon_3 d \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1).$$

Но тогда из (8) следует

$$\begin{aligned} a_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_3 b_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 b_3, \\ a_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 b_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 b_1, \\ a_3 &= \varepsilon_2 \varepsilon_3 b_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 b_2, \end{aligned}$$

что невозможно, так как любой набор знаков величин ε_1, ε_2, ε_3 приводит к тривиальному решению. Поэтому из системы (9) вектор (a_1, a_2, a_3) определяется однозначно, с точностью до постоянного множителя, как векторное произведение пары векторов $(1, 1, 1)$ и (d_1^2, d_2^2, d_3^2):

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta(d_3^2 - d_2^2), \\ a_2 &= \beta(d_1^2 - d_3^2), \\ a_3 &= \beta(d_2^2 - d_1^2). \end{aligned} \tag{10}$$

При известных a_1, a_2, a_3 переменные b_1, b_2, b_3 должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} \qquad\quad - d_3 b_2 + d_2 b_3 = -d_1 a_1 \\ d_3 b_1 \qquad\quad - d_1 b_3 = -d_2 a_2 \\ -d_2 b_1 + d_1 b_2 \qquad\quad = -d_3 a_3. \end{cases}$$

Матрица системы вырождена, следовательно решение представляется в виде суммы частного решения неоднородной системы и общего решения однородной. Частное решение можно взять в виде

$$b_1 = \beta d_2 d_3, \quad b_2 = \beta d_1 d_3, \quad b_3 = \beta d_1 d_2.$$

При этом общее решение запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha d_1 + \beta d_3 d_2, \\ b_2 &= \alpha d_2 + \beta d_1 d_3, \\ b_3 &= \alpha d_3 + \beta d_1 d_2, \end{aligned}$$

что в совокупности с (10) приводит к утверждению теоремы. Теорема доказана.

Пусть имеется решение $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ системы (4). Будем представлять его как точку в шестимерном пространстве. Вектор $(c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3)$ назовём вектором сдвига для этого решения, если прямая с таким направляющим вектором, проходящая через точку $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, лежит на поверхности (4).

Теорема 2. *Пусть $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — нетривиальное решение системы (4) и числа d_1, d_2, d_3 отличны от нуля. Тогда система равенств*

$$\begin{cases} \pm d_1 a_1 + d_2 b_3 - d_3 b_2 = 0 \\ -d_1 b_3 \pm d_2 a_2 + d_3 b_1 = 0 \\ \quad d_1 b_2 - d_2 b_1 \pm d_3 a_3 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

равносильна тому, что $(0, 0, 0, d_1, d_2, d_3)$ является вектором сдвига для решения $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

Доказательство. Если через точку $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ можно провести прямую с направляющим вектором $(0, 0, 0, d_1, d_2, d_3)$, то при любом значении t должны выполняться равенства

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1(b_1 + td_1)^2 + a_2(b_2 + td_2)^2 + a_3(b_3 + td_3)^2 + a_1 a_2 a_3 = 0. \end{cases}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях t, получим систему

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 d_1^2 + a_2 d_2^2 + a_3 d_3^2 = 0 \\ a_1 b_1 d_1 + a_2 b_2 d_2 + a_3 b_3 d_3 = 0 \\ a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + a_3 b_3^2 + a_1 a_2 a_3 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Из второго и третьего уравнений системы (12) следует, что вектор (a_1d_1, a_2d_2, a_3d_3) перпендикулярен векторам (d_1, d_2, d_3) и (b_1, b_2, b_3). Два последних вектора не могут быть коллинеарны, так как из этого следовало бы равенство

$$-a_1a_2a_3 = a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 = 0,$$

что возможно только для тривиального решения. Поэтому должна выполняться система равенств

$$\begin{cases} b_2d_3 - b_3d_2 = \mu a_1d_1 \\ b_3d_1 - b_1d_3 = \mu a_2d_2 \\ b_1d_2 - b_2d_1 = \mu a_3d_3 \end{cases} \tag{13}$$

с $\mu \neq 0$. Так как $d_1d_2d_3 \neq 0$, то мы можем выразить величины a_1, a_2, a_3 из (13). Подставляя их в четвёртое уравнение системы (12), получим

$$\begin{aligned} &\frac{b_2d_3 - b_3d_2}{\mu d_1}b_1^2 + \frac{b_3d_1 - b_1d_3}{\mu d_2}b_2^2 + \frac{b_1d_2 - b_2d_1}{\mu d_3}b_3^2 + a_1a_2a_3 = \\ &= -\frac{(b_2d_3 - b_3d_2)(b_3d_1 - b_1d_3)(b_1d_2 - b_2d_1)}{\mu d_1d_2d_3} + a_1a_2a_3 = \\ &= \frac{(1-\mu^2)a_3d_3a_2d_2a_1d_1}{d_1d_2d_3} = (1-\mu^2)a_1a_2a_3 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mu = \pm 1$, и выполнены соотношения (11).

С другой стороны, если верны равенства (11), то, домножая их на d_1, d_2, d_3 и складывая, получим

$$a_1d_1^2 + a_2d_2^2 + a_3d_3^2 = 0.$$

Если же их домножить на b_1, b_2, b_3 и сложить, то получим

$$a_1b_1d_1 + a_2b_2d_2 + a_3b_3d_3 = 0.$$

Следовательно, $(0, 0, 0, d_1, d_2, d_3)$ является вектором сдвига для решения $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любое нетривиальное рациональное решение системы* (1) *содержится в некотором двумерном пространстве рациональных решений.*

Доказательство. Для нетривиального решения могут быть определены соответствующие величины d_1, d_2, d_3. Пространство, натянутое на векторы $(0, 0, 0, d_1, d_2, d_3)$ и $(d_3^2 - d_2^2, d_1^2 - d_3^2, d_2^2 - d_1^2, d_2d_3, d_1d_3, d_1d_2)$, будет состоять из решений системы (1) и содержать исходное.

Следствие 2. *Любое нетривиальное решение системы* (1) *можно представить в виде суммы двух тривиальных.*

Доказательство. Вектор $(0, 0, 0, d_1, d_2, d_3)$ является тривиальным решением. Второй базисный вектор в плоскости, натянутой на векторы $(0, 0, 0, d_1, d_2, d_3)$ и $(d_3^2 - d_2^2, d_1^2 - d_3^2, d_2^2 - d_1^2, d_2d_3, d_1d_3, d_1d_2)$, можно выбрать таким образом, чтобы после перехода к исходным переменным выполнялось условие $x_1 = y_2$.

Следующие теоремы относятся к уравнению (2), в котором D считается рациональным числом, не зависящим от переменных a_1, a_2, a_3.

Теорема 3. *Пусть* $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$ *и* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ *— нетривиальное решение уравнения* (2), *такое что* $b_1b_2b_3 \neq 0$. *Тогда существуют* $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$ *и* $k \in \mathbb{Q}$, *такие что*

$$\begin{aligned}
a_1 &= k(s_2t_3 - s_3t_2)(s_2s_3 - D\,t_2t_3),\\
a_2 &= k(s_3t_1 - s_1t_3)(s_1s_3 - D\,t_1t_3),\\
a_3 &= k(s_1t_2 - s_2t_1)(s_1s_2 - D\,t_1t_2),\\
b_1 &= k(s_1s_2 - D\,t_1t_2)(s_1s_3 - D\,t_1t_3),\\
b_2 &= k(s_1s_2 - D\,t_1t_2)(s_2s_3 - D\,t_2t_3),\\
b_3 &= k(s_1s_3 - D\,t_1t_3)(s_2s_3 - D\,t_2t_3).
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть выполнено равенство (2). Его можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_1\sqrt{D} & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & a_2\sqrt{D} & b_1 \\ b_2 & -b_1 & a_3\sqrt{D} \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда система

$$\begin{cases} a_1\sqrt{D}\xi_1 + b_3\xi_2 - b_2\xi_3 = 0 \\ -b_3\xi_1 + a_2\sqrt{D}\xi_2 + b_1\xi_3 = 0 \\ b_2\xi_1 - b_1\xi_2 + a_3\sqrt{D}\xi_3 = 0 \end{cases}$$

будет иметь нетривиальное решение относительно переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 в $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Пусть $\xi_j = s_j + t_j\sqrt{D}$, $s_j, t_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 1, 2, 3)$. В каждом уравнении последней системы должны равняться нулю коэффициенты при 1 и при $\sqrt{D}$. Поэтому она равносильна системе

$$\begin{cases} a_1s_1 = b_2t_3 - b_3t_2 \\ a_2s_2 = b_3t_1 - b_1t_3 \\ a_3s_3 = b_1t_2 - b_2t_1 \\ a_1t_1D = b_2s_3 - b_3s_2 \\ a_2t_2D = b_3s_1 - b_1s_3 \\ a_3t_3D = b_1s_2 - b_2s_1. \end{cases} \tag{14}$$

Домножая первые три уравнения на t_1, t_2, t_3 и подставляя в них a_1, a_2, a_3 из последних трёх, получим

$$\begin{cases} b_2(s_1s_3 - D\,t_1t_3) = b_3(s_1s_2 - D\,t_1t_2) \\ b_3(s_1s_2 - D\,t_1t_2) = b_1(s_2s_3 - D\,t_2t_3) \\ b_1(s_2s_3 - D\,t_2t_3) = b_2(s_1s_3 - D\,t_1t_3). \end{cases} \tag{15}$$

Если бы в этих равенствах хотя бы одна из скобок равнялась нулю, то выполнялись бы соотношения

$$s_1 s_2 = D t_1 t_2, \quad s_1 s_3 = D t_1 t_3, \quad s_2 s_3 = D t_2 t_3.$$

Следовательно, при $t_1 t_2 t_3 \neq 0$ было бы

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_3}{t_3} = \sqrt{D},$$

что противоречит рациональности параметров. Если же $t_1 t_2 t_3 = 0$, то одна из переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 равна нулю. При $\xi_3 = 0$ получаем

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_2\sqrt{D}}{b_3},$$

что невозможно. Так как скобки отличны от нуля, то из системы (15) b_1, b_2, b_3 определяются однозначно с точностью до константы и имеют вид, указанный в теореме. А по ним из системы (14) находятся величины a_1, a_2, a_3, которые тоже будут иметь нужный вид. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$ *и* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ *— нетривиальное решение уравнения* (2), *такое что* $b_1 b_2 b_3 \neq 0$. *Тогда вектор*

$$(0,0,0,\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (0,0,0,s_1 + t_1\sqrt{D}, s_2 + t_2\sqrt{D}, s_3 + t_3\sqrt{D})$$

будет для этого решения вектором сдвига в том и только в том случае, когда величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 *будут нетривиальным решением системы*

$$\begin{cases} \pm a_1\sqrt{D}\xi_1 + b_3\xi_2 - b_2\xi_3 = 0 \\ -b_3\xi_1 \pm a_2\sqrt{D}\xi_2 + b_1\xi_3 = 0 \\ \ \ b_2\xi_1 - b_1\xi_2 \pm a_3\sqrt{D}\xi_3 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $(0,0,0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ — вектор сдвига для решения $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Тогда

$$\begin{cases} a_1 b_1 s_1 + a_2 b_2 s_2 + a_3 b_3 s_3 = 0 \\ a_1 b_1 t_1 + a_2 b_2 t_2 + a_3 b_3 t_3 = 0 \\ a_1 s_1 t_1 + a_2 s_2 t_2 + a_3 s_3 t_3 = 0 \\ a_1(s_1^2 + Dt_1^2) + a_2(s_2^2 + Dt_2^2) + a_3(s_3^2 + Dt_3^2) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Из первого и третьего уравнений системы (17) следует, что вектор $(a_1 s_1, a_2 s_2, a_3 s_3)$ перпендикулярен векторам (b_1, b_2, b_3) и (t_1, t_2, t_3). Два последних вектора не могут быть коллинеарны, так как из этого следует равенство

$$a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + a_3 b_3^2 = 0, \tag{18}$$

которое возможно только для тривиального решения. Значит,

$$\begin{cases} a_1 s_1 = \lambda(b_2 t_3 - b_3 t_2) \\ a_2 s_2 = \lambda(b_3 t_1 - b_1 t_3) \\ a_3 s_3 = \lambda(b_1 t_2 - b_2 t_1). \end{cases} \tag{19}$$

Аналогично, рассматривая вектор (a_1t_1, a_2t_2, a_3t_3), из второго и третьего уравнений системы (17) получим

$$\begin{cases} a_1t_1D = \mu(b_2s_3 - b_3s_2) \\ a_2t_2D = \mu(b_3s_1 - b_1s_3) \\ a_3t_3D = \mu(b_1s_2 - b_2s_1). \end{cases} \tag{20}$$

Если уравнения системы (19) домножить на s_1, s_2, s_3 соответственно и сложить с уравнениями системы (20), домноженными на t_1, t_2, t_3, то получим

$$0 = a_1(s_1^2 + Dt_1^2) + a_2(s_2^2 + Dt_2^2) + a_3(s_3^2 + Dt_3^2) = (\mu - \lambda)\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}.$$

Если бы векторы (b_1, b_2, b_3), (s_1, s_2, s_3) и (t_1, t_2, t_3) были компланарны, то из двух первых уравнений системы (17) снова следовало бы соотношение (18). Поэтому полученный определитель не равен нулю, и $\lambda = \mu$. Если теперь вернуться к переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3, то для них получим систему

$$\begin{cases} a_1\sqrt{D}\xi_1 + \lambda b_3\xi_2 - \lambda b_2\xi_3 = 0 \\ -\lambda b_3\xi_1 + a_2\sqrt{D}\xi_2 + \lambda b_1\xi_3 = 0 \\ \lambda b_2\xi_1 - \lambda b_1\xi_2 + a_3\sqrt{D}\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Её определитель должен равняться нулю, поэтому

$$\begin{vmatrix} a_1\sqrt{D}\xi_1 & \lambda b_3\xi_2 & -\lambda b_2\xi_3 \\ -\lambda b_3\xi_1 & a_2\sqrt{D}\xi_2 & \lambda b_1\xi_3 \\ \lambda b_2\xi_1 & -\lambda b_1\xi_2 & a_3\sqrt{D}\xi_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2(a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2) + a_1a_2a_3D = (1 - \lambda^2)a_1a_2a_3D = 0.$$

Отсюда $\lambda = \pm 1$.

С другой стороны, если выполнены равенства (16), то, умножая их на наборы (b_1, b_2, b_3) и (t_1, t_2, t_3) и складывая, получим первые три уравнения системы (17). Четвёртое справедливо в силу вырожденности матрицы. Теорема доказана.

Следствие 3. *Любое нетривиальное решение уравнения* (2) *содержится в некотором двумерном подпространстве решений.*

Следствие 4. *Любое нетривиальное рациональное решение уравнения* (2) *можно представить в виде суммы тривиального решения и решения системы*

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3, \end{cases}$$

оба из которых берутся из $\mathbb{Q}\sqrt{D}$.

Доказательства аналогичны доказательствам следствий 1 и 2.

Литература

[1] Chondhry A. Symmetric Dioph. Systems // Acta Arith. — 1991. — Vol. 59. — P. 291–307.

[2] Dickson L. E. Introduction to the Theory of Numbers. — Chicago, Univ. of Chicago press, 1931. (Русский перевод: Диксон Л. Е. Введение в теорию чисел. — Тбилиси, 1941.)

Статья поступила в редакцию в декабре 1997 г.