Элементарный подход к вычислению $\zeta(2n)$

Устинов А. В.*

Хорошо известно, что значения ζ–функции Римана в четных положительных точках вычисляются явно:

$$\zeta(2n) = B_{2n}\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n}2^{2n-1}}{(2n)!} \qquad (n \geq 1), \tag{1}$$

где B_n — числа Бернулли, которые определяются условиями

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}B_\nu = B_n \qquad (n \geq 2) \tag{2}$$

Существуют различные доказательства равенства (1). Одно из них основано на разложении полиномов Бернулли

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}B_\nu x^{n-\nu} \qquad (n \geq 0)$$

в ряд Фурье:

$$B_n(\{x\}) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n}\sum_{m\neq 0}\frac{e^{2\pi imx}}{m^n} \qquad (n \geq 2). \tag{3}$$

Подстановка $x = 0$ с учетом равенства $B_n(0) = B_n$ приводит к формуле (1).

В настоящей статье предлагается элементарное доказательство тождества (1). Вместо рядов Фурье будут рассматриваться конечные ряды Фурье, которые точно представляют функцию на конечном множестве точек и не нуждаются в теоремах сходимости. Приведенные ниже рассуждения можно считать элементарными, поскольку они не используют производных, интегралов, бесконечных рядов, и все тождества с тригонометрическими экспонентами могут быть переписаны с использованием лишь синусов и косинусов. Далее p будет натуральным числом; константы в знаках O и знаках Виноградова будут зависеть от n и не будут зависеть от p. Через $\Delta f(x)$ будем обозначать конечную разность функции $f(x)$:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

В работе [1] Коробовым были введены специальные числа P_n и специальные полиномы $P_n(x)$, которые можно считать дискретными аналогами чисел и полиномов Бернулли. Как и в работе [2], определим числа K_n и полиномы $K_n(x)$ (числа и полиномы Коробова) при помощи равенств

$$K_0 = 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}K_\nu p^{\underline{n-\nu}} = K_n \qquad (n \geq 2); \tag{4}$$

$$K_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}K_\nu\, x^{\underline{n-\nu}} \qquad (n \geq 0), \tag{5}$$

где $x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1)$. Они отличаются от чисел P_n и полиномов $P_n(x)$ из работы [1] константой:

$$K_n = n!\,P_n, \qquad K_n(x) = n!\,P_n(x),$$

и оказываются более удобными, поскольку имеют большее сходство с числами и многочленами Бернулли (см. [2], [3]).

Из определений (4) и (5) непосредственно следуют свойства (см. [1]):

*Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, гранты № 01-01-00738 и № 03-01-06147

1°. $K_n(0) = K_n \qquad (n \geq 0)$.

2°. $\Delta K_n(x) = n\, K_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1)$.

3°. $K_n(p) - K_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, \quad n \geq 0; \\ p, & \text{если } n = 1. \end{cases}$

4°. При $n \geq 1$

$$\sum_{z=0}^{p-1} K_n(z) = 0.$$

Далее понадобится разложение полинома $K_n(x)$ в конечный ряд Фурье, доказанное в работе [1]. Приведенное ниже доказательство отличается от рассуждений из статьи Коробова. Формула (3) доказывается путем интегрирования по частям. Аналогично разложение полинома $K_n(x)$ будет доказано с помощью преобразования Абеля.

Лемма 1 *Пусть $p \geq 2$ и функция $f(x)$ определена для всех целых x из интервала $0 \leq x \leq p$. Тогда*

$$\sum_{x=0}^{p-1} f(x) e^{-2\pi i \frac{mx}{p}} = -\frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1}[f(p) - f(0)] + \frac{1}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1} \sum_{x=0}^{p-1} \Delta f(x) e^{-2\pi i \frac{mx}{p}},$$

и, в частности, если $f(p) = f(0)$, то

$$\sum_{x=0}^{p-1} f(x) e^{-2\pi i \frac{mx}{p}} = \frac{1}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1} \sum_{x=0}^{p-1} \Delta f(x) e^{-2\pi i \frac{mx}{p}}.$$

Доказательство. В формуле преобразования Абеля

$$\sum_{x=0}^{p-1} f(x) \Delta g(x-1) = f(p) g(p-1) - f(0) g(-1) - \sum_{x=0}^{p-1} g(x) \Delta f(x)$$

положим $g(x) = e^{-2\pi i \frac{mx}{p}}$. Тогда после подстановки

$$g(-1) = g(p-1) = e^{2\pi i \frac{mx}{p}} \quad \text{и} \quad \Delta g(x-1) = e^{-2\pi i \frac{mx}{p}} (1 - e^{2\pi i \frac{m}{p}}),$$

получаем равенство, равносильное утверждению леммы:

$$(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1) \sum_{x=0}^{p-1} f(x) e^{-2\pi i \frac{mx}{p}} = -e^{2\pi i \frac{m}{p}} [f(p) - f(0)] + \sum_{x=0}^{p-1} \Delta f(x) e^{-2\pi i \frac{mx}{p}}.$$

Лемма 2 *При целых $p \geq 2$, $n \geq 1$, $x \in [0;\ p-1]$*

$$K_n(x) = -n! \sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}}.$$

Доказательство. Известно, что функция $f(x)$ определенная для целых x из интервала $0 \leq x \leq p-1$, в каждой из этих точек представляется конечным рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} C_p(k) e^{2\pi i \frac{kx}{p}},$$

с коэффициентами

$$C_p(k) = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{p-1} f(x) e^{-2\pi i \frac{kx}{p}} \qquad (0 \leq k < p).$$

Вычислим конечные коэффициенты Фурье функции $K_n(x)$. По свойству 4° $C_p(0) = 0$. При $1 \le m \le p-1$, пользуясь леммой 1 и свойствами 1°—4°, находим

$$C_p(m) = \frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1} K_n(x) e^{-2\pi i \frac{mx}{p}} = \frac{1}{p}\frac{n}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1}\sum_{x=0}^{p-1} K_{n-1}(x) e^{-2\pi i \frac{mx}{p}} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{p}\frac{n!}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{n-1}}\sum_{x=0}^{p-1} K_1(x) e^{-2\pi i \frac{mx}{p}} = -\frac{n!}{p}\frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{n}}\, K_1(x)\Big|_0^p = -n!\frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{n}}.$$

Следствие *При $p \ge 2$ и $n \ge 1$ справедлива формула*

$$K_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}}\sum_{m=1}^{p-1}\frac{\cos 2\pi \frac{m(1-n)}{p}}{\sin^{2n}\frac{\pi m}{p}}. \tag{6}$$

Доказательство. Подставляя $x = 0$ в утверждение леммы 2, находим

$$K_{2n} = -(2n)!\sum_{m=1}^{p-1}\frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{2n}}.$$

Так как K_{2n} — действительное число, то

$$K_{2n} = -(2n)!\sum_{m=1}^{p-1}\mathrm{Re}\frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}}\sum_{m=1}^{p-1}\frac{\cos 2\pi \frac{m(1-n)}{p}}{\sin^{2n}\frac{\pi m}{p}}.$$

Теорема *При $n \ge 1$ справедливо равенство*

$$\zeta(2n) = B_{2n}\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n}2^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что при $n \ge 1$ выполняется соотношение

$$K_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}}\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{\sin^{2n}\frac{\pi m}{p}} + O\left(p^{2n-2}\right). \tag{7}$$

При $n = 1$ оно совпадает со следствием из леммы 2. При $n > 1$ по формуле (6)

$$K_{2n} - \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}}\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{\sin^{2n}\frac{\pi m}{p}} \ll \sum_{m=1}^{p-1}\frac{\cos\frac{2\pi m(1-n)}{p} - 1}{\sin^{2n}\frac{\pi m}{p}} \ll$$

$$\ll \sum_{m=1}^{[(p-1)/2]}\frac{\sin^2\frac{\pi m(1-n)}{p}}{\sin^{2n}\frac{\pi m}{p}} \ll \sum_{m=1}^{[(p-1)/2]}\frac{(m/p)^2}{(m/p)^{2n}} < p^{2n-2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n-2}} = O(p^{2n-2}).$$

Далее заметим, что при $0 < x \le \pi/2$ справедливо равенство $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{x^2} + O(1)$. Значит, при $0 < x \le \pi/2$ и $n \ge 1$

$$\frac{1}{\sin^{2n} x} = \frac{1}{x^{2n}} + O\left(\frac{1}{x^{2n-2}}\right)$$

$$\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{\sin^{2n}\frac{\pi m}{p}} = 2\sum_{m=1}^{[(p-1)/2]}\left[\frac{1}{(\pi m/p)^{2n}} + O\left(\frac{p^{2n-2}}{m^{2n-2}}\right)\right] =$$

$$= 2\frac{p^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{m=1}^{[(p-1)/2]}\frac{1}{m^{2n}} + O(p^{2n-1}) = 2\frac{p^{2n}}{\pi^{2n}}\zeta(2n) + O(p^{2n-1}). \tag{8}$$

Из формул (7) и (8)

$$\zeta(2n) = \frac{K_{2n}}{p^{2n}}\cdot\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n}2^{2n-1}}{(2n)!}\left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right).$$

Индукцией по n легко проверяется, что из определений (2) и (4) вытекает равенство

$$\frac{K_n}{p^n} = B_n + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Следовательно,

$$\zeta(2n) = B_{2n}\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n}2^{2n-1}}{(2n)!}\left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right).$$

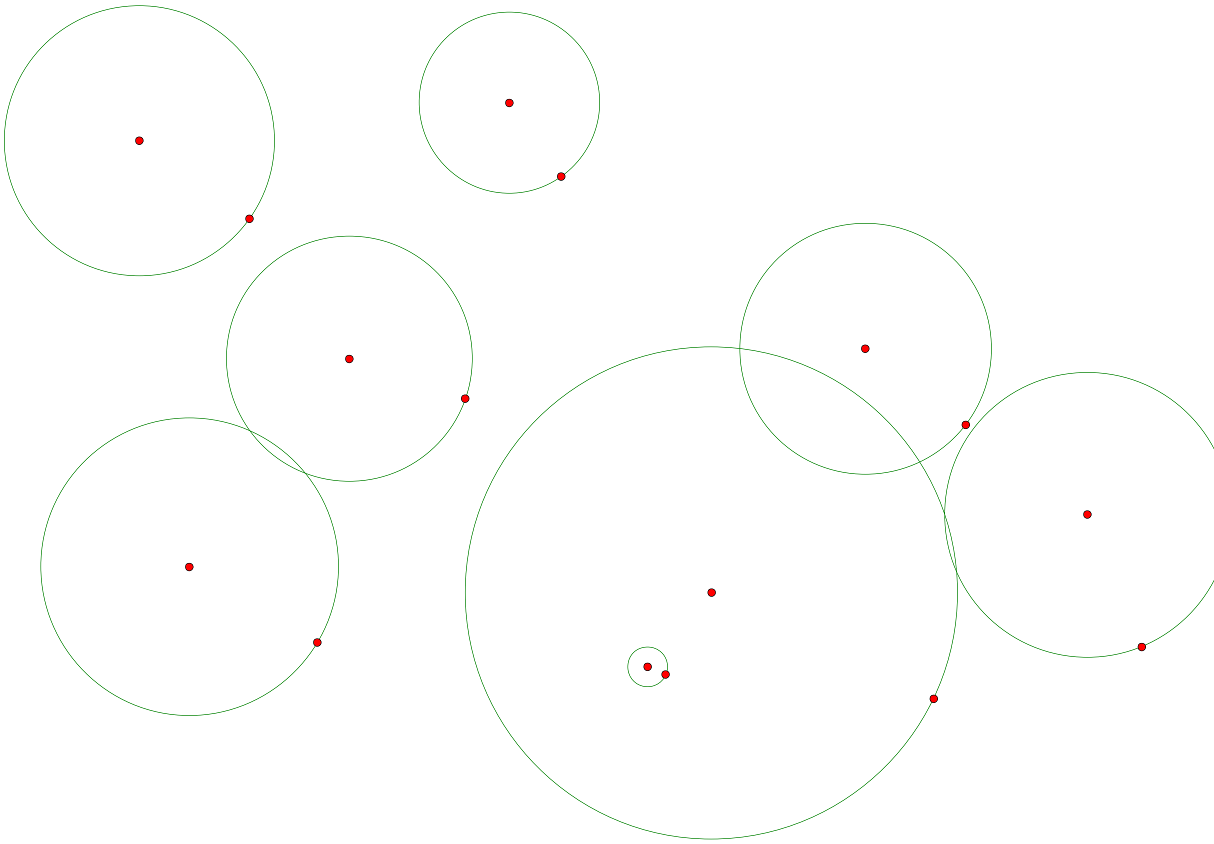
Переходя к пределу при $p \to \infty$, получаем утверждение теоремы.

Список литературы

[1] Коробов Н. М. *Специальные полиномы и их приложения.* — Диофантовы приближения. Матем. записки, 1996, т. 2, с. 77–89.

[2] Устинов А. В. *О формулах суммирования и интерполяции.* — Чебышевский сборник, т. 1, Труды IV межд. конф. „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“, т. 1, 52–71, Тула, 2001.

[3] Устинов А. В. *Об одном обобщении чисел Стирлинга.* — Чебышевский сборник, т. 3, № 2(4), с. 107–122, Тула, 2002.



119992, Москва, Воробьевы горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико–математический факультет,
кафедра теории чисел.
ustinov@mech.math.msu.su