Полиномы Коробова и теневой анализ

Устинов А. В.*

Моим учителям ФМШ № 18 А. П. Веселову, О. А. Чалых, Н. М. Бовт и Б. М. Ивлеву

1 Введение

Числа Бернулли являются одной из самых важных и интересных последовательностей. Впервые они появились в посмертной работе Якоба Бернулли "Ars Conjectandi" [10] в связи с суммированием степеней натуральных чисел.

Позднее оказалось, что числа и полиномы Бернулли играют важную роль в самых разных областях математики. Они возникают в алгебраической теории чисел, p–адическом анализе, комбинаторике, теории ζ–функции Римана, исчислении конечных разностей, приближенном анализе, топологии... В августе 2003 библиография по числам Бернулли [13] содержала 2842 ссылки на 1423 автора.

В 1996 году Коробовым (см. [3]) были введены специальные числа и специальные полиномы, которые можно назвать дискретными аналогами чисел Бернулли B_n и полиномов Бернулли $B_n(x)$. По своим свойствам они занимают промежуточное положение между между полиномами Бернулли 1–го рода $B_n(x)$ и 2–го рода $b_n(x)$.

В свое время числа и полиномы Бернулли сыграли ключевую роль в создании теневого анализа (см. [16]–[19]). Рота вместе со своей школой построил теорию, которая строго обосновывает "символическое исчисление", использовавшееся ранее для нестрогого вывода формул ([2] 9.5, [7] гл. XVII). В настоящее время теневой анализ превратился в самостоятельную дисциплину с приложениями в комбинаторике, анализе, физике, теории графов и других областях (см. [11]).

В первой части настоящей работы рассказывается об основных свойствах полиномов Коробова $K_n(x)$ и по аналогии с полиномами Бернулли 2–го рода вводятся полиномы Коробова 2–го рода $k_n(x)$ Затем дается краткий обзор основных понятий и теорем теневого анализа. В третьей части статьи теневой анализ применяется к доказательству различных свойств полиномов Коробова.

2 Полиномы Коробова

Обозначения. Для всякой функции $f(x)$ через $\Delta f(x)$ и $\Delta_a f(x)$ будем обозначать ее конечные разности с шагом 1 и a соответственно: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta_a f(x) = f(x+a) - f(x)$.

Символы $x^{\underline{n}}$ и $x^{\underline{n,p}}$ будем использовать для записи убывающих факториальных степеней:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-(n-1)), \qquad x^{\underline{n,p}} = x(x-p)(x-2p)\dots(x-(n-1)p).$$

Через $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ и $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}$ будем обозначать *числа Стирлинга 1–го и 2–го рода*, которые при $n \geq 0$ и $0 \leq m \leq n$ определяются равенствами (см. [2]):

$$x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-m} x^m, \qquad x^n = \sum_{m=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} x^{\underline{m}}. \tag{1}$$

Обозначения $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_p$ и $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_p$ будем использовать для *обобщенных чисел Стирлинга 1–го и 2–го рода*, которые при $n \geq 0$ и $0 \leq m \leq n$ задаются как коэффициенты в следующих разложениях

*Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, гранты № 01-01-00738 и № 03-01-06147

(см. [6]):

$$x^{\underline{n,p}} = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_p (-1)^{n-m} x^{\underline{m}}, \qquad x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}_p x^{\underline{m,p}}. \tag{2}$$

$\delta_{m,n}$ — символ Кронекера: $\delta_{m,n} = 1$ при $m = n$ и $\delta_{m,n} = 0$ при $m \neq n$.

Определения и примеры. Напомним, что *числа Бернулли* B_n *и полиномы Бернулли* $B_n(x)$ определяются с помощью следующих экспоненциальных производящих функций (см., например, [1]):

$$F_B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}, \tag{3}$$

$$F_B(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}. \tag{4}$$

В частности,

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0,$$
$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Для фиксированного действительного p, *числа Коробова* K_n *и полиномы Коробова* $K_n(x)$ определим при помощи равенств (см. [3], [5]):

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \frac{t^n}{n!} = \frac{pt}{(t+1)^p - 1}, \tag{5}$$

$$F_K(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p - 1}. \tag{6}$$

В случаях, когда нужно явно указать зависимость чисел K_n и полиномов $K_n(x)$ от параметра p, будем использовать обозначения $K_n^{(p)}$, $K_n^{(p)}(x)$.

Первые примеры выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered} K_0 = 1, \quad K_1 = -\frac{p-1}{2}, \quad K_2 = \frac{p^2-1}{6}, \quad K_3 = -\frac{p^2-1}{4}, \\ K_0(x) = 1, \quad K_1(x) = x - \frac{p-1}{2}, \quad K_2(x) = x^2 - px + \frac{p^2-1}{6}, \\ K_3(x) = x^3 - \frac{3(p+1)}{2}x^2 + \frac{p(p+3)}{2}x - \frac{p^2-1}{4}. \end{gathered} \tag{7}$$

По ним можно заметить, что числа и полиномы Коробова связаны с числами и полиномами Бернулли формулами

$$\lim_{p\to\infty} p^{-n} K_n = B_n, \qquad \lim_{p\to\infty} p^{-n} K_n(px) = B_n(x) \qquad (n \geq 0).$$

Этот факт сразу следует из определений (3)–(6) и равенств

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p(t/p)}{(1+t/p)^p - 1} = \frac{t}{e^t - 1}, \qquad \lim_{p\to\infty} \frac{p(t/p)\,(1+t/p)^{px}}{(1+t/p)^p - 1} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}.$$

С другой стороны, при $p = 0$ числа и полиномы Коробова (7) превращаются соответственно в *числа и полиномы Бернулли 2–го рода* (см. [12], [14], [16])

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = \frac{1}{4},$$
$$b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = x + \frac{1}{2}, \quad b_2(x) = x^2 - \frac{1}{6},$$
$$b_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4},$$

которые определяются с помощью следующих экспоненциальных производящих функций:

$$F_b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\ln(1+t)}, \tag{8}$$
$$F_b(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t(1+t)^x}{\ln(1+t)}. \tag{9}$$

Для произвольного $n \geq 0$ это утверждение также является следствием определений (5)–(6), (8)–(9) и равенства

$$\lim_{p\to 0} \frac{pt}{(1+t)^p - 1} = \frac{t}{\ln(1+t)}.$$

Таким образом можно сказать, что полиномы Коробова по своим свойствам занимают промежуточное положение между полиномами Бернулли 1–го и 2-го рода.

По аналогии с числами и полиномами Бернулли 2–го рода можно определить числа и полиномы Коробова 2–го рода.

Определение 1 *Для $n \geq 0$ определим числа $k_n = k_n^{(p)}$ и полиномы $k_n(x) = k_n^{(p)}(x)$ (числа и полиномы Коробова 2–го рода) с помощью равенств*

$$F_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{(1+pt)^{1/p} - 1}, \tag{10}$$
$$F_k(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t(1+pt)^{x/p}}{(1+pt)^{1/p} - 1}. \tag{11}$$

Функции $F_k(t)$ и $F_k(x,t)$ подобраны так, что при (одновременных) заменах

$$x \to x/p, \quad t \to pt, \quad p \to 1/p. \tag{12}$$

они превращаются в производящие функции чисел и многочленов Коробова первого рода $F_K(t)$ и $F_K(x,t)$ Причем при повторных заменах происходит обратное превращение. Отсюда следует, что многочлены Коробова 1–го и 2–го рода связаны друг с другом соотношениями

$$k_n^{(p)}(x) = p^n K_n^{(1/p)}(x/p), \qquad K_n^{(p)}(x) = p^n k_n^{(1/p)}(x/p), \tag{13}$$

и в этом смысле играют двойственную роль по отношению друг к другу. Полиномы Коробова 1–го рода близки к $B_n(x)$ в равномерной норме и к $b_n(x)$ — в p–адической. В то же время полиномы Коробова 2–го рода в равномерной норме оказываются близки к $b_n(x)$, а в p–адической — к $B_n(x)$.

Из (7) и (13) получаются первые примеры чисел k_n и полиномов $k_n(x)$:

$$k_0 = 1, \quad k_1 = \frac{p-1}{2}, \quad k_2 = -\frac{p^2-1}{6}, \quad k_3 = \frac{p(p^2-1)}{4},$$
$$k_0(x) = 1, \quad k_1(x) = x + \frac{p-1}{2}, \quad k_2(x) = x^2 - x - \frac{p^2-1}{6},$$
$$k_3(x) = x^3 - \frac{3(p+1)}{2}x^2 + \frac{3p+1}{2}x + \frac{p(p^2-1)}{4}.$$

Основные свойства полиномов Коробова. В работах [3]–[6] были доказаны различные свойства полиномов $K_n(x)$. Почти все они при помощи формул (13) легко преобразуются в свойства полиномов $k_n(x)$:

1°.	$K_n(0) = K_n$	$k_n(0) = k_n$	$(n \geq 0)$
2°.	$\Delta K_n(x) = n\, K_{n-1}(x)$	$\Delta_p k_n(x) = np\, k_{n-1}(x)$	$(n \geq 1)$
3°.	$\Delta_p K_n(x) = np\, x^{\underline{n-1}}$	$\Delta k_n(x) = n\, x^{\underline{n-1,p}}$	$(n \geq 1)$
4°.	$K_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} K_{n-\nu} x^{\underline{\nu}}$	$k_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} k_{n-\nu} x^{\underline{\nu,p}}$	$(n \geq 0)$
5°.	$K_n(x+y) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} K_{n-\nu}(y) x^{\underline{\nu}}$	$k_n(x+y) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} k_{n-\nu}(y) x^{\underline{\nu,p}}$	$(n \geq 0)$
6°.	$K_n(p-x) = (-1)^n K_n(x+n-2)$	$k_n(1-x) = (-1)^n k_n(x+(n-2)p)$	$(n \geq 0)$
7°.	$\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} K_n^{(mp)}(x+\nu p) = mK_n^{(p)}(x)$	$\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} k_n^{(p)}(x+\nu/m) = m^{1-n} k_n^{(mp)}(mx)$	$(n \geq 0)$

(Исключение составляет последнее свойство, в котором существенно, что p — натуральное число. Оно проверяется непосредственно по определению (11).) При $p \to \infty$ и при $p = 0$ с учетом равенств

$$K_n^{(0)} = b_n(x), \qquad \lim_{p\to\infty} p^{-n} K_n^{(p)}(px) = B_n(x),$$
$$k_n^{(0)} = B_n(x), \qquad \lim_{p\to\infty} p^{-n} k_n^{(p)}(px) = b_n(x),$$

они становятся известными свойствами полиномов Бернулли 1–го и 2–го рода:

1°	$B_n(0) = B_n$	$b_n(0) = b_n$	$(n \geq 0)$
2°	$B_n'(x) = n\, B_{n-1}(x)$	$\Delta b_n(x) = n\, b_{n-1}(x)$	$(n \geq 1)$
3°	$\Delta B_n(x) = n\, x^{n-1}$	$b_n'(x) = n\, x^{\underline{n-1}}$	$(n \geq 1)$
4°	$B_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_{n-\nu} x^{\nu}$	$b_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_{n-\nu} x^{\underline{\nu}}$	$(n \geq 0)$
5°	$B_n(x+y) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_{n-\nu}(y) x^{\nu}$	$b_n(x+y) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_{n-\nu}(y) x^{\underline{\nu}}$	$(n \geq 0)$
6°	$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$	$b_n(-x) = (-1)^n b_n(x+n-2))$	$(n \geq 0)$
7°	$\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} B_n(x+\nu/m) = m^{1-n} B_n(mx)$	$\int\limits_{mx}^{mx+1} y^{\underline{n}}\, dy = b_n(mx)$	$(n \geq 0)$

Для дальнейшего изложения понадобятся следующие соотошения, которые являются прямыми следствиями свойств 2° и 3°:

$$\int_0^1 B_n(x+y)\, dy = x^n, \qquad \int_0^1 (x+y)^{\underline{n}} dy = b_n(x), \tag{14}$$
$$\frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1} K_n(x+y) = x^{\underline{n}}, \qquad \frac{1}{p}\sum_{y=0}^{p-1} (x+y)^{\underline{n,p}} = k_n(x). \tag{15}$$

3 Основные понятия теневого анализа

Линейные функционалы. Поскольку книга [16] малодоступна для российского читателя, остановимся коротко на некоторых понятиях *теневого анализа* (umbral calculus).

Пусть $P = \mathbb{C}[x]$ — *алгебра полиномов от переменной* x. Через P^* будем обозначать *пространство линейных функционалов на* P. Для действия функционала $L \in P^*$ на полиноме $q(x) \in P$ принято обозначение, заимствованное из физики: $\langle L \,|\, q(x) \rangle$. Пусть, далее, $\mathcal{F} = \mathbb{C}[[t]]$ — *алгебра экспоненциальных производящих функций от переменной* t, то есть множество формальных степенных рядов

вида
$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}. \tag{16}$$
Всякому такому ряду будем ставить в соответствие функционал $L\in P^*$, определяемый условиями
$$\langle L\,|\,x^n\rangle = a_n \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{17}$$
Очевидно, что это соответствие задает изоморфизм линейных пространств P^* и $\mathcal{F}$. Поэтому можно отождествлять функционал L с соответствующим ему рядом $f_L(t)$ и писать $\langle f_L(t)|\, q(x)\rangle$ вместо $\langle L\,|\,q(x)\rangle$. Так как пространство $\mathcal{F}$ является алгеброй, то изоморфизм между $\mathcal{F}$ и P^* позволяет ввести структуру алгебры и на пространстве P^*. При этом произведению двух функционалов L и M будет соответствовать функционал (ряд)
$$f_{LM}(t)=f_L(t)\cdot f_M(t).$$
Алгебра формальных степенных рядов (она же алгебра линейных операторов на P) называется *теневой алгеброй* (umbral algebra). Если $f_L(t)$ и $f_M(t)$ — экспоненциальные производящие функции последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_k\}$, то ряд $f_{LM}(t)=f_L(t)\cdot f_M(t)$ является экспоненциальной производящей функцией последовательности $\{c_m\}$, которая называется *биномиальной сверткой* $\{a_n\}$ и $\{b_k\}$:
$$c_m=\sum_{n+j=m}\binom{m}{j}a_n b_j \qquad (m\ge 0).$$
Поэтому значение функционала f_{LM} на одночлене x^m можно выписать в явном виде:
$$\langle f_{LM}(t)|\, x^m\rangle = \sum_{n+j=m}\binom{m}{j}\,\langle f_L(t)|\, x^n\rangle\,\langle f_M(t)|\, x^j\rangle \qquad (m\ge 0). \tag{18}$$

Приведем простейшие примеры линейных функционалов.

1. Дифференцирование данного многочлена в точке $x=0$: $\langle t^n|\, q(x)\rangle = q^{(n)}(x)\big|_{x=0}$.
2. Вычисление значения $q(x)$ в некоторой точке y: $\langle e^{yt}|\, q(x)\rangle = q(y)$.
3. Конечная разность в точке $x=0$: $\langle e^{yt}-1|\, q(x)\rangle = q(y)-q(0)=\Delta_y q(0)$.
4. Интегрирование по отрезку $[0,y]$: $\left\langle \frac{e^{yt}-1}{t}\middle|\, q(x)\right\rangle = \int\limits_0^y q(u)\,du$.
5. Суммирование по целым точкам некоторого интервала: $\left\langle \frac{e^{nt}-1}{e^t-1}\middle|\, q(x)\right\rangle = \sum\limits_{m=0}^{n-1} q(m)$.

Все эти соотношения легко доказываются с помощью формул (16) и (17). (В силу линейности, их достаточно проверить для одночленов $q(x)=x^n$.)

Отметим, что два последних примера позволяют переписать на языке теневого анализа определения чисел Стирлинга (1):
$$\langle t^m|\, x^{\underline{n}}\rangle = m!(-1)^{n-m}\begin{bmatrix} n\\ m\end{bmatrix}, \tag{19}$$
$$\left\langle (e^t-1)^m\,\middle|\, x^n\right\rangle = m!\begin{Bmatrix} n\\ m\end{Bmatrix}, \tag{20}$$
и обобщенных чисел Стирлинга (2):
$$\left\langle (e^t-1)^m\,\middle|\, x^{\underline{n,p}}\right\rangle = m!(-1)^{n-m}\begin{bmatrix} n\\ m\end{bmatrix}_p, \tag{21}$$
$$\left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p}\right)^m\middle|\, x^{\underline{n}}\right\rangle = m!\begin{Bmatrix} n\\ m\end{Bmatrix}_p. \tag{22}$$

Линейные операторы. Следующим важным объектом являются линейные операторы, действующие на P. Обозначение t^n используется для оператора n–кратного дифференцирования:

$$t^n q(x) = q^{(n)}(x) \qquad (n \geq 0).$$

Оператор t^0, соответственно, является тождественным. Каждому ряду (16) (по линейности) соответствует линейный оператор $f(t)$, действующий по правилу

$$f(t)q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{q^{(n)}(x)}{n!}. \tag{23}$$

Для записи операторов намеренно используется та же переменная t. Это приводит к тому, что каждый элемент f алгебры $\mathcal{F}$ выступает сразу в трех ролях: во–первых, f — это экспоненциальная производящая функция; во-вторых, f — линейный функционал; в–третьих, f — линейный оператор. Но путаницы не возникает, поскольку различные обозначения

$$f(t), \quad \langle f(t) |\, q(x) \rangle \quad \text{и} \quad f(t)q(x)$$

однозначно определяют роль $f(t)$ в каждом конкретном случае.

Так как $(t^l t^j)x^n = t^l(t^j x^n)$, то для любых $f(t)$, $g(t) \in \mathcal{F}$ и $q(x) \in P$ выполняется равенство $[f(t)g(t)]q(x) = f(t)[g(t)q(x)]$, и выражения вида $f(t)g(t)q(x)$ не содержат в себе никакой неопределенности. В частности, всегда выполняется равенство

$$f(t)g(t)q(x) = g(t)f(t)q(x),$$

и для обратимых по умножению функций $f(t)$

$$u(x) = f(t)w(x) \quad \Longleftrightarrow \quad w(x) = f^{-1}(t)u(x). \tag{24}$$

Использование одной и той же переменной t оправдывается соотношением

$$\langle f(t)g(t) |\, q(x) \rangle = \langle f(t) |\, g(t)q(x) \rangle. \tag{25}$$

Для мономов x^n оно является прямым следствием формулы (18), а для полиномов общего вида следует из линейности рассматриваемых функционалов. Аналогично проверяются следующие полезные равенства

$$\langle f(t) |\, q(ax) \rangle = \langle f(at) |\, q(x) \rangle, \tag{26}$$

$$\langle f'(t) |\, q(x) \rangle = \langle f(t) |\, xq(x) \rangle. \tag{27}$$

Как и для функционалов, укажем простейшие примеры линейных операторов.

1. Дифференцирование данного многочлена: $t^k q(x) = q^{(k)}(x)$.
2. Оператор сдвига на y: $e^{yt}q(x) = q(x+y)$.
3. Оператор конечной разность с шагом y: $(e^{ty}-1)q(x) = q(x+y) - q(x) = \Delta_y q(x)$.
4. Интегрирование по некоторому отрезку: $\frac{e^{yt}-1}{t}q(x) = \int_x^{x+y} q(u)\,du$.
5. Оператор суммирования: $\frac{e^{nt}-1}{e^t-1}q(x) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} q(x+m)$.

Эти равенства, как и в случае функционалов, достаточно доказать для одночленов $q(x) = x^n$. Проверка всякий раз сводится к подсчету суммы (23).

Менее тривиальными являются операторы, обратные к операторам интегрирования и суммирования. Чтобы описать их действие заметим, что формулы (14) могут быть записаны в виде

$$\frac{e^t-1}{t} B_n(x) = x^n, \tag{28}$$

$$\frac{e^t-1}{t} x^{\underline{n}} = b_n(x). \tag{29}$$

Отсюда, в силу (24),

$$\frac{t}{e^t-1}x^n = B_n(x), \tag{30}$$
$$\frac{t}{e^t-1}b_n(x) = x^{\underline{n}}.$$

Аналогично соотношения (15) равносильны равенствам

$$\frac{e^{pt}-1}{p(e^t-1)}K_n(x) = x^{\underline{n}}, \tag{31}$$
$$\frac{e^{pt}-1}{p(e^t-1)}x^{\underline{n,p}} = k_n(x),$$

откуда

$$\frac{p(e^t-1)}{e^{pt}-1}x^{\underline{n}} = K_n(x), \tag{32}$$
$$\frac{p(e^t-1)}{e^{pt}-1}k_n(x) = x^{\underline{n,p}}.$$

Последовательности Шеффера. Если $g(0) \neq 0$, то ряд $g(t) \in \mathcal{F}$ обратим по умножению. Если для ряда $f(t) \in \mathcal{F}$ выполняются условия $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, то для такого ряда существует и единственный ряд $\overline{f}(t) \in \mathcal{F}$ обратный по отношению к операции композиции: $f(\overline{f}(t)) = \overline{f}(f(t)) = t$. Такие ряды принято называть δ–рядами.

Методом неопределенных коэффициентов нетрудно проверить, что если ряд $g(t)$ обратим по умножению, а $f(t)$ — δ–ряд, то существует ровно одна последовательность полиномов $\{s_n(x)\}$ таких, что $\deg s_n(x) = n$ и

$$\langle g(t)f^m(t)|\, s_n(x)\rangle = n!\delta_{m,n}. \tag{33}$$

Последовательность $\{s_n(x)\}$ называется *последовательностью Шеффера* для пары $(g(t), f(t))$. Условие (33) легко проверяется, если известна экспоненциальная производящая функция последовательности $\{s_n(x)\}$. Оно равносильно равенству ([16], теорема 2.3.4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{g\left(\overline{f}(t)\right)}\, e^{x\overline{f}(t)}. \tag{34}$$

Приведем простейшие примеры последовательностей Шеффера.

1. $s_n(x) = x^n$: $g(t) = 1$, $f(t) = t$;
2. $s_n(x) = x^{\underline{n}}$: $g(t) = 1$, $f(t) = e^t - 1$;
3. $s_n(x) = x^{\underline{n,p}}$: $g(t) = 1$, $f(t) = \frac{e^{pt}-1}{p}$;
4. $s_n(x) = B_n(x)$: $g(t) = \frac{e^t-1}{t}$, $f(t) = t$;
5. $s_n(x) = b_n(x)$: $g(t) = \frac{t}{e^t-1}$, $f(t) = e^t - 1$.

Большое количество других специальных полиномов, таких как полиномы Абеля, Бесселя, Гуда, Лагерра, Эрмита и т. д., также являются последовательностями Шеффера для соответствующих пар $(g(t), f(t))$.

Если $\{s_n(x)\}$ — последовательность Шеффера для пары функций $(g(t), f(t))$, то это позволяет решать различные вопросы, связанные с полиномами $s_n(x)$. Примером может служить задача о представлении многочлена $q(x) \in P$ в виде линейной комбинации многочленов $s_n(x)$. Ответ задается формулой

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g(t)f^n(t)|\, q(x)\rangle\, \frac{s_n(x)}{n!}. \tag{35}$$

(Для доказательства достаточно к обеим части этого равенства применить функционал $g(t)f^n(t)$.) Другие примеры, связанные с доказательствами аналитических и арифметических свойств специальных полиномов могут быть найдены в книге [16].

4 Полиномы Коробова и теневой анализ

Из определения (6) и критерия (34) следует, что полиномы $K_n(x)$ являются последовательностью Шеффера для пары функций $g(t) = \frac{e^{pt}-1}{p(e^t-1)}$ и $f(t) = e^t - 1$. Аналогично, полиномы $k_n(x)$ соответствуют функциям $g(t) = \frac{p(e^t-1)}{e^{pt}-1}$ и $f(t) = \frac{e^{pt}-1}{p}$. Поэтому многочисленные свойства полиномов $K_n(x)$ и $k_n(x)$ могут быть получены как следствия общих теорем о последовательностях Шеффера.

В качестве простейших приложений теневого анализа к полиномам Коробова докажем для них формулы, аналогичные известным разложениям

$$B_n(x) = B_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n}{\nu} \left\{ {n-1 \atop \nu-1} \right\} x^{\underline{\nu}},$$
$$b_n(x) = b_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n}{\nu} \left[{n-1 \atop \nu-1} \right] (-1)^{n-\nu} x^{\nu}.$$

Предложение 1 *При $n \geq 0$ справедливы равенства*

$$K_n(x) = K_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n}{\nu} \left\{ {n-1 \atop \nu-1} \right\}_p x^{\underline{\nu,p}}, \tag{36}$$

$$k_n(x) = k_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n}{\nu} \left[{n-1 \atop \nu-1} \right]_p (-1)^{n-\nu} x^{\underline{\nu}}. \tag{37}$$

Доказательство. Как отмечалось ранее, $\{s_n(x)\} = x^{\underline{n,p}}$ — последовательность Шеффера для пары $(1, (e^{pt}-1)/p)$. Следовательно, по формуле (35)

$$K_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^{\nu} \middle| K_n(x) \right\rangle \frac{x^{\underline{\nu,p}}}{\nu!}.$$

При $\nu = 0$

$$\left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^{\nu} \middle| K_n(x) \right\rangle = \langle 1 | K_n(x) \rangle = K_n(0) = K_n.$$

При $\nu \geq 1$ применяя последовательно формулу (25), свойство 3° полиномов $K_n(x)$ и равенство (22), находим

$$\left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^{\nu} \middle| K_n(x) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^{\nu-1} \middle| \frac{e^{pt}-1}{p} K_n(x) \right\rangle =$$
$$= \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^{\nu-1} \middle| \frac{1}{p} \Delta_p K_n(x) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p} \right)^{\nu-1} \middle| n x^{\underline{n-1}} \right\rangle = (\nu-1)! \left\{ {n-1 \atop \nu-1} \right\}_p,$$

что и доказывает формулу (36).

Для доказательства равенства (37) достаточно в (36) сделать замены (12) и применить тождество $\left\{ {n \atop m} \right\}_{\frac{1}{p}} = \left(-\frac{1}{p} \right)^{n-m} \left[{n \atop m} \right]_p$ (см. [6], предложение 2).

В работах [3]–[4] доказаны формулы, связывающие между собой полиномы $B_n(x)$ и $K_n(x)$. Ниже эти формулы выводятся средствами теневого анализа, причем устанавливается явное значение свободного члена, отсутствовавшее в работах [3]–[4].

Предложение 2 *При $n \geq 0$ справедливы равенства*

$$K_n(px) = b_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n}{\nu} \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{bmatrix} (-1)^{n-\nu} p^\nu B_\nu(x), \tag{38}$$

$$p^n B_n(x) = B_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n}{\nu} \begin{Bmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{Bmatrix} K_\nu(px), \tag{39}$$

$$k_n(x) = p^n b_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n}{\nu} \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{bmatrix} (-p)^{n-\nu} B_\nu(x), \tag{40}$$

$$B_n(x) = p^n B_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n}{\nu} \begin{Bmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{Bmatrix} p^{n-\nu} k_\nu(px). \tag{41}$$

Доказательство. Снова воспользуемся формулой (35). В первом случае необходимо вычислить коэффициенты $\left\langle \frac{e^t-1}{t} t^\nu \middle| K_n(px) \right\rangle$ $(0 \leq \nu \leq n)$. При $\nu = 0$ по формулам (26), (25), (31) и (29) находим

$$\left\langle \frac{e^t-1}{t} \middle| K_n(px) \right\rangle = \left\langle \frac{e^{pt}-1}{pt} \middle| K_n(x) \right\rangle = \left\langle \frac{e^t-1}{t} \cdot \frac{e^{pt}-1}{p(e^t-1)} \middle| K_n(x) \right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{e^t-1}{t} \middle| \frac{e^{pt}-1}{p(e^t-1)} K_n(x) \right\rangle = \left\langle \frac{e^t-1}{t} \middle| x^{\underline{n}} \right\rangle = b_n.$$

Аналогично при $\nu \geq 1$, применяя последовательно равенства (26), (25), свойство 3° полиномов $K_n(x)$ и формулу (19), получаем

$$\left\langle (e^t-1)t^{\nu-1} \middle| K_n(px) \right\rangle = p^{\nu-1} \left\langle (e^{pt}-1)t^{\nu-1} \middle| K_n(x) \right\rangle = p^{\nu-1} \left\langle t^{\nu-1} \middle| (e^{pt}-1) K_n(x) \right\rangle =$$
$$= p^\nu \left\langle t^{\nu-1} \middle| n x^{\underline{n-1}} \right\rangle = p^\nu (-1)^{n-\nu} n(\nu-1)! \begin{bmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{bmatrix}.$$

Для доказательства второго тождества также воспользуемся формулой (35). Согласно равенству (26), полиномы $K_n(px)$ являются последовательностью Шеффера для пары функций $g(t) = \frac{e^t-1}{p(e^{t/p}-1)}$, $f(t) = e^{t/p} - 1$. Поэтому

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left\langle \frac{e^t-1}{p(e^{t/p}-1)} (e^{t/p}-1)^\nu \middle| B_n(x) \right\rangle \frac{K_n(px)}{\nu!}.$$

При $\nu = 0$ из формул (25), (28), (26) и (30) находим

$$\left\langle \frac{e^t-1}{p(e^{t/p}-1)} \middle| B_n(x) \right\rangle = \left\langle \frac{t}{p(e^{t/p}-1)} \cdot \frac{e^t-1}{t} \middle| B_n(x) \right\rangle = \left\langle \frac{t}{p(e^{t/p}-1)} \middle| \frac{e^t-1}{t} B_n(x) \right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{t}{p(e^{t/p}-1)} \middle| x^n \right\rangle = \left\langle \frac{t}{e^t-1} \middle| \left(\frac{x}{p}\right)^n \right\rangle = \frac{B_n}{p^n}.$$

Аналогично при $\nu \geq 1$ по свойству 3° полиномов $K_n(x)$ и формулам (26), (19)

$$\left\langle \frac{e^t-1}{p} (e^{t/p}-1)^{\nu-1} \middle| B_n(x) \right\rangle = \left\langle (e^{t/p}-1)^{\nu-1} \middle| \frac{n x^{n-1}}{p} \right\rangle =$$
$$= \frac{n}{p^n} \left\langle (e^t-1)^{\nu-1} \middle| x^{n-1} \right\rangle = \frac{(\nu-1)! n}{p^n} \begin{Bmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{Bmatrix}.$$

Равенства (40) и (41) получаются из равенств (38) и (39) с помощью замен (12).

Известны следующие формулы, связывающие между собой полиномы Бернулли 1–го и 2–го рода:

$$B_n(x) = (1-n)K_n - nB_{n-1} + nB_{n-1}b_1(x) + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{n(n-1)}{\nu(\nu-1)} \begin{Bmatrix} n-2 \\ \nu-2 \end{Bmatrix} b_\nu(x),$$

$$b_n(x) = (1-n)b_n - n(n-2)b_{n-1} + nb_{n-1}B_1(x) + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{n(n-1)}{\nu(\nu-1)} \begin{bmatrix} n-2 \\ \nu-2 \end{bmatrix} (-1)^{n-\nu} B_\nu(x).$$

Докажем аналогичные формулы для многочленов $K_n(x)$ и $k_n(x)$.

Предложение 3 *При $n \geq 0$ справедливы равенства*

$$K_n(x) = (1-n)K_n + n(2-n-p)K_{n-1} + nK_{n-1}k_1(x) + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{n(n-1)}{\nu(\nu-1)} \begin{bmatrix} n-2 \\ \nu-2 \end{bmatrix}_p k_\nu(x), \tag{42}$$

$$k_n(x) = (1-n)k_n - n(p(n-2)-1)k_{n-1} + nk_{n-1}K_1(x) + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{n(n-1)}{\nu(\nu-1)} \begin{Bmatrix} n-2 \\ \nu-2 \end{Bmatrix}_p (-1)^{n-\nu} K_\nu(x). \tag{43}$$

Доказательство. По формуле (35)

$$K_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left\langle (e^t-1)\left(\frac{e^{pt}-1}{p}\right)^{\nu-1} \middle| K_n(x) \right\rangle \frac{k_\nu(x)}{\nu!}.$$

При $\nu = 0$ необходимо найти величину $\langle f(t) |\, K_n(x)\rangle$, где $f(t) = \frac{p(e^t-1)}{e^{pt}-1}$. Подставляя $f(t) = e^{(1-p)t} - \frac{1-e^{-pt}}{p} f'(t)$ и пользуясь формулой (27), получаем

$$\langle f(t) |\, K_n(x)\rangle = \left\langle e^{(1-p)t} \middle| K_n(x) \right\rangle - \left\langle f'(t) \middle| \frac{1-e^{-pt}}{p} K_n(x) \right\rangle =$$
$$= K_n(1-p) - \left\langle f'(t) \left| n(x-p)^{\underline{n-1}} \right.\right\rangle = K_n(1-p) - n \left\langle f(t) \left| x(x-p)^{\underline{n-1}} \right.\right\rangle.$$

Так как $x(x-p)^{\underline{n-1}} = (x-p+1)^{\underline{n}} + (p-1)(x-p)^{\underline{n-1}}$, то из (32)

$$\langle f(t) |\, K_n(x)\rangle = (1-n)K_n(1-p) - n(p-1)K_{n-1}(-p).$$

Далее, по свойству 2° полиномов $K_n(x)$, $K_n(1-p) = nK_{n-1}(-p) = K_n(-p)$, значит

$$\langle f(t) |\, K_n(x)\rangle = (1-n)K_n(-p) + n(2-n-p)K_{n-1}(-p).$$

Наконец, согласно свойству 3°, $K_n(-p) = K_n - np(-p)^{\underline{n-1}}$, и, следовательно,

$$\langle f(t) |\, K_n(x)\rangle = (1-n)K_n + n(2-n-p)K_{n-1}.$$

Пусть $\nu = 1$. Тогда получаем коэффициент $\langle e^t - 1 |\, K_n(x)\rangle = nK_{n-1}$.
При $\nu \geq 2$

$$\left\langle (e^t-1)\left(\frac{e^{pt}-1}{p}\right)^{\nu-1} \middle| K_n(x) \right\rangle = n \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p}\right)^{\nu-1} \middle| K_{n-1}(x) \right\rangle =$$
$$= n \left\langle \left(\frac{e^{pt}-1}{p}\right)^{\nu-2} \middle| (n-1)x^{\underline{n-2}} \right\rangle = n(n-1)(\nu-2)! \begin{bmatrix} n-2 \\ \nu-2 \end{bmatrix}_p.$$

Как и раньше, равенство (43) получается из (42) с помощью замен (12) и формулы $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{\frac{1}{p}} = \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-m} \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}_p$ (см. [6], предложение 2).

Исторический комментарий. Числа K_n возникали у Эйлера в его “Интегральном исчислении” (см. [9], раздел 2, гл. IV, задача 160). Эйлер рассматривает неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$p\frac{y(x)}{a} - \binom{p}{2}\frac{y'(x)}{a^2} + \binom{p}{3}\frac{y''(x)}{a^3} - \ldots = z(x)$$

и находит его частное решение в виде ряда:

$$y(x) = \frac{a}{p}z(x) + \frac{p-1}{2p}z'(x) + \frac{p^2-1}{12ap}z''(x) + \frac{p^2-1}{24a^2p}z'''(x) - \frac{(p^2-1)(p^2-19)}{720a^3p}z^{(4)}(x) - \ldots$$

На языке теневого анализа можно сказать, что Эйлер решает уравнение

$$z(x) = \frac{1-(1-t/a)^p}{t}\, y(x) = \frac{p}{a}\cdot\frac{1}{F_K(t/a)}\, y(x),$$

и в качестве частного решения предъявляет функцию

$$y(x) = \frac{a}{p}\cdot F_K\,(t/a)\, z(x) = \frac{a}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_n}{n!}\cdot\frac{z^{(n)}(x)}{a^n}.$$

Числа близкие к числам Коробова 2–го рода k_n можно найти в "Дифференциальном исчислении" Эйлера. В главе "О применении дифференциального исчисления к решению уравнений" (см. [8], часть 2, гл. IX, § 237) он предлагает различные способы приближенного и точного решения алгебраических уравнений (точные решения предъявляются в виде рядов). В частности, Эйлер рассматривает задачу о вычислении корней вида $\sqrt[p]{a^p+b}$. Наряду с методом касательных Ньютона, основанном на на приближенном равенстве

$$\sqrt[p]{a^p+b} \approx a + \frac{p}{pa^{p-1}},$$

он предлагает использовать формулу

$$\sqrt[p]{a^p+b} = a + \frac{p}{pa^{p-1}F(a,b)},$$

где $F(a,b)$ — специальным образом подобранная функция. Эйлер выписывает первые слагаемые ряда для $F(a,b)$:

$$F(a,b) = 1 + \frac{p-1}{2p}\cdot\frac{b}{a^p} - \frac{p^2-1}{12p^2}\cdot\frac{b^2}{a^{2p}} + \frac{p^2-1}{24p^2}\cdot\frac{b^3}{a^{3p}} - \ldots,$$

которая на самом деле равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{n!}\left(\frac{b}{pa^p}\right)^n = F_k\left(\frac{b}{pa^p}\right).$$

Числа $k_n(x)$ также входят в формулу суммирования Лабока (см. [7], [15]). С помощью чисел Коробова она может быть записана в виде

$$\sum_{x=0}^{ap-1} F(x) = p\sum_{x=0}^{a-1} F(px) + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{k_\nu}{\nu!}\left.\frac{\Delta_p^{\nu-1}F(x)}{p^{\nu-1}}\right|_0^{ap} + a\frac{k_m}{m!}F^{(m)}(\xi),$$

где ξ — некоторая точка отрезка $[0,ap]$.

Список литературы

[1] Гельфонд А. О. *Исчисление конечных разностей.* — М.: Наука, 1967.

[2] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* — М.: Мир, 1998.

[3] Коробов Н. М. *Специальные полиномы и их приложения.* — Диофантовы приближения. Матем. записки, 1996, т. 2, с. 77–89.

[4] Коробов Н. М. *О некоторых свойствах специальных полиномов.* — Чебышевский сборник, т. 1, 40–49, Тула, 2001.

[5] Устинов А. В. *О формулах суммирования и интерполяции.* — Чебышевский сборник, т. 1, 52–71, Тула, 2001.

[6] Устинов А. В. *Об одном обобщении чисел Стирлинга.* — Чебышевский сборник, т. 3, № 2(4), с. 107–122, Тула, 2002.

[7] Стефенсен И. Ф. *Теория интерполяции.* — М.–Л.: ОНТИ, 1935.

[8] Эйлер Л. *Дифференциальное исчисление.* — М.–Л.: Гос. изд-во тех.–теор. лит., 1949.

[9] Эйлер Л. *Интегральное исчисление, т. 2* — М.: Гос. изд-во тех.–теор. лит., 1957.

[10] Bernoulli J. *Ars Conjectandi* — Basel, (1713). (Reprinted on pp. 106-286 in Vol. 3 of "Die Werke von Jakob Bernoulli", Birkhauser Verlag, Basel, 1975.

[11] Bucchianico, A. Di , Loeb D. *A Selected Survey of Umbral Calculus* — The electronic journal of combinatorics (2000), http://www.combinatorics.org/Surveys/ds3.pdf

[12] Comtet, L. *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions* — rev. enl. ed. Dordrecht, Netherlands: Reidel, 1974.

[13] Dilcher, K., Skula, L. and Slavutskii, I. Sh. *A Bibliography of Bernoulli Numbers* — http://www.mathstat.dal.ca/ dilcher/bernoulli.html.

[14] Jordan, C. *Calculus of Finite Differences*, 3rd ed. New York: Chelsea, 1965.

[15] Lubbock, J. W. Cambridge Philos. Trans. 3, 323, 1829.

[16] Roman, S. *The Umbral Calculus* — New York: Academic Press, 1984.

[17] Rota, G.–C. *The number of partitions of a set*, Amer. Math. Monthly, 71 (1964), 498–504.

[18] Rota, G.–C. *Finite operator calculus* — Academic Press, New–York, (1975).

[19] Rota, G.–C. and Taylor, B. D. *The classical umbral calculus*, SIAM J. Math. Ann., 25 (1994), 694–711.

119992, Москва, Воробьевы горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико–математический факультет,
кафедра теории чисел.
ustinov@mech.math.msu.su