Полиномы Коробова

Устинов А. В.

Часто при решении “непрерывных” задач оказываются полезными их “дискретные” аналоги. Например, при интегрировании или интерполяции функций многих переменных можно ограничиться лишь их значениями в узлах достаточно мелкой равномерной сетки (см. [2]). Ряд формул приближенного анализа, связанных с интерполяцией гладких функций, строится с помощью полиномов Бернулли $B_n(x)$. При построении аналогичных формул для функций, заданных на равномерной сетке, Коробовым в работе [1] были введены полиномы, которые можно считать “дискретными” аналогами полиномов Бернулли. Будем называть их полиномами Коробова и обозначать $K_n^{(p)}(x)$.

Полиномы $B_n(x)$ и $K_n^{(p)}(x)$ однозначно определяются условиями (см. [3]):

$$\begin{array}{cc} B_0(x) = 1, & K_0^{(p)}(x) = 1, \\ B_n'(x) = nB_{n-1}(x), & \Delta K_n^{(p)}(x) = nK_{n-1}^{(p)}(x), \\ \Delta B_n(x) = nx^{n-1}, & \frac{1}{p}\Delta_p K_n^{(p)}(x) = nx^{\underline{n-1}}, \end{array}$$

где $p \neq 0$ — фиксированное действительное число, $\Delta_p f(x) = f(x+p) - f(x)$, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ — конечные разности функции $f(x)$, и $x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-(n-1))$.

Первые примеры выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{cc} B_1(x) = x - \frac{1}{2}, & K_1^{(p)}(x) = x - \frac{p-1}{2}, \\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, & K_2^{(p)}(x) = x^2 - px + \frac{p^2-1}{6}. \end{array}$$

Следующие соотношения определяют полиномы Бернулли 2–го рода $b_n(x)$ (см. [6]) и полиномы Коробова 2–го рода $k_n^{(p)}(x)$ (см. [5]):

$$\begin{array}{cc} b_0(x) = 1, & k_0^{(p)}(x) = 1, \\ \Delta b_n(x) = nb_{n-1}(x), & \frac{1}{p}\Delta_p k_n^{(p)}(x) = nk_{n-1}^{(p)}(x), \\ b_n'(x) = nx^{\underline{n-1}}, & \Delta k_n^{(p)}(x) = nx^{\underline{n-1}}, \end{array}$$

В частности,

$$\begin{array}{cc} b_1(x) = x + \frac{1}{2}, & k_1^{(p)}(x) = x + \frac{p-1}{2}, \\ b_2(x) = x^2 - \frac{1}{6}, & k_2^{(p)}(x) = x^2 - x - \frac{p^2-1}{6}. \end{array}$$

Полиномы Коробова занимают промежуточное положение между между полиномами Бернулли 1–го рода $B_n(x)$ и 2–го рода $b_n(x)$:

$$\begin{array}{lll} K_n^{(0)}(x) = b_n(x), & \lim\limits_{p\to\infty} p^{-n}K_n^{(p)}(px) = B_n(x) & (n \geq 0), \\ k_n^{(0)}(x) = B_n(x), & \lim\limits_{p\to\infty} p^{-n}k_n^{(p)}(px) = b_n(x) & (n \geq 0). \end{array}$$

и обладают столь же многочисленными свойствами. Они оказываются полезными при построении формул приближенного суммирования и интерполяции (см. [3]), а также являются естественными объектами с точки зрения теневого анализа (см. [5], [6]).

Числа и полиномы Бернулли связаны с другими специальными числами и полиномами, возникающими в комбинаторном анализе. Так для исследования арифметических свойств чисел Бернулли важны формулы, связывающие их с числами Стирлинга 1–го рода $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ и 2–го рода $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}$. Аналогично исследование свойств чисел Коробова $K_n^{(p)} = K_n^{(p)}(0)$, $k_n^{(p)} = k_n^{(p)}(0)$ приводит к обобщенным числам Стирлинга $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_p$ и $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_p$, которые занимают промежуточное положение между числами Стирлинга 1–го и 2–го рода (см. [4]):

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_0 = (-1)^{m-n} \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}, \quad \lim_{p\to\infty} p^{n-m} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix},$$
$$\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_0 = (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \quad \lim_{p\to\infty} p^{n-m} \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}.$$

Кроме того, оказывается, что обобщенные числа Стирлинга возникают при подсчете графов специального вида. Например, числа

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_p = (p-1)(p-2)\dots(p-(n-1))$$

являются решением следующей задачи: Дан цикл длины p, где $p \geq 2$ — натуральное число. Требуется найти число способов расставить n меток 1, 2, ..., n на n различных вершинах этого цикла. Разметки, которые можно совместить поворотом, отождествляются.

Аналогично числа $\left\{{m \atop n}\right\}_p$ являются решением задачи о расстановке m различных меток по различным вершинам n циклов длины p с дополнительным требованием: на каждом из циклов хотя бы одна вершина должна быть помечена. При этом отождествляются разметки, которые можно совместить поворотом или перестановкой циклов.

Обобщенные числа Стирлинга 2–го рода возникают при подсчете числа плоских помеченных деревьев, с непомеченными концами.

Список литературы

[1] Коробов Н. М. *Специальные полиномы и их приложения.* — Диофантовы приближения. Математические записки, 1996, т. 2, с. 77–89.

[2] Коробов Н. М. *Теоретико–числовые методы в приближенном анализе (2–ое издание).* — М.: МЦНМО, 2003 (в печати).

[3] Устинов А. В. *О формулах суммирования и интерполяции.* — Чебышевский сборник, т. 1, 52–71, Тула, 2001.

[4] Устинов А. В. *Об одном обобщении чисел Стирлинга.* — Чебышевский сборник, т. 3, № 2(4), с. 107–122, Тула, 2002.

[5] Устинов А. В. *Полиномы Коробова и теневой анализ* — Чебышевский сборник, т. 4, № 4(8), с. 137–152, Тула, 2003.

[6] Roman, S. *The Umbral Calculus* — New York: Academic Press, 1984.

119992, Москва, Воробьевы горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико–математический факультет,
кафедра теории чисел.
ustinov@mech.math.msu.su