

О статистиках Гаусса—Кузьмина для конечных цепных дробей*

А. В. УСТИНОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ustinov@mech.math.msu.su

УДК 511.37+511.336

Ключевые слова: конечные цепные дроби, статистики Гаусса—Кузьмина.

Аннотация

В статье рассматриваются конечные цепные дроби для чисел a/b , когда целые точки (a, b) лежат внутри расширяющейся области. Для таких цепных дробей доказываются свойства, аналогичные статистикам Гаусса—Кузьмина.

Abstract

A. V. Ustinov, On Gauss–Kuz'min statistics for finite continued fractions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 6, pp. 195–208.

The article is devoted to finite continued fractions for numbers a/b when integer points (a, b) are taken from a dilative region. Properties similar to the Gauss–Kuz'min statistics are proved for these continued fractions.

1. Обозначения

1. Запись $[x_0; x_1, \dots, x_s]$ означает цепную дробь

$$x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{x_s}}}$$

длины s с формальными переменными x_0, x_1, \dots, x_s .

2. Для рационального r представление $r = [t_0; t_1, \dots, t_s]$ есть каноническое разложение r в цепную дробь, где $t_0 = [r]$ (целая часть r), t_1, \dots, t_s — натуральные числа и $t_s \geq 2$ при $s \geq 1$.
3. Для $x \in [0, 1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \dots, t_s]$ $s_x(r)$ есть количество номеров $j \in \{1, \dots, s\}$, для которых $[0; t_j, \dots, t_s] \leq x$. В частности, длина цепной дроби $s = s(r)$ есть $s_1(r)$.

*Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 03-51-5070.

4. Знак звёздочки в двойных суммах вида

$$\sum_n \sum_m^* \dots$$

означает, что переменные, по которым проводится суммирование, связаны дополнительным условием $(m, n) = 1$.

5. Если A — некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае.
 6. Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q :

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod{q}] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

7. Конечные разности функции $a(u, v)$ обозначаются

$$\begin{aligned} \Delta_{1,0}a(u, v) &= a(u+1, v) - a(u, v), & \Delta_{0,1}a(u, v) &= a(u, v+1) - a(u, v), \\ \Delta_{1,1}a(u, v) &= \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0}a(u, v)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1}a(u, v)). \end{aligned}$$

8. Сумма степеней делителей обозначается

$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

2. Введение

Детальный анализ алгоритма Евклида приводит к различным задачам о статистических свойствах конечных цепных дробей (см. [5, раздел 4.5.3]). Если на вход алгоритма подаётся пара натуральных чисел a и b ($a < b$), то основной интерес представляет число делений $s(a, b) = s(a/b)$, которое совпадает с количеством неполных частных в цепной дроби числа

$$\frac{a}{b} = [0; t_1, \dots, t_s].$$

Первый результат о средней длине алгоритма Евклида принадлежат Хейльбронну [10], который доказал, что

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{12 \log 2}{\pi^2} \log b + O\left(\frac{b}{\varphi(b)} \sigma_{-1}^3(b)\right).$$

Позднее Портер [14] для той же суммы получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{12 \log 2}{\pi^2} \log b + C_P + O(b^{-1/6+\varepsilon}),$$

где

$$C_P = \frac{\log 2}{\zeta(2)} \left(3 \log 2 + 4\gamma - 4 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 2 \right) - \frac{1}{2} -$$

константа, получившая название константы Портера; её окончательный вид был найден Ренчем (см. [12]). Промежуточные результаты в этом направлении принадлежат Тонкову [6, 15].

При усреднении по обоим параметрам a и b можно получать более детальную информацию. Так, Диксон [9] показал, что для любого положительного ε найдётся такая константа $c_0 > 0$, что

$$\left| s\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{12 \log 2}{\pi^2} \log b \right| < (\log b)^{1/2+\varepsilon}$$

для всех пар чисел (a, b) лежащих в области $1 \leq a \leq b \leq R$, за исключением, быть может, $R^2 \exp(-c_0(\log R)^{\varepsilon/2})$ пар.

Хенсли [11] уточнил результат Диксона и доказал, что разность между величиной $s(a/b)$ и её средним значением асимптотически имеет нормальное распределение, параметры которого можно указать явно.

В настоящее время Валле развиты методы, которые при усреднении по a и b позволяют исследовать среднее время работы различных вариантов алгоритма Евклида [17], включая бинарный [16].

Кроме того, во многих случаях разность между длиной работы алгоритма и её средним значением оказывается гауссовской величиной [8].

Более точную информацию о цепной дроби числа a/b даёт величина $s_x(a/b)$ являющаяся дискретным аналогом статистик Гаусса—Кузьмина $F_n(x)$. Для фиксированного $x \in [0, 1]$ функция $F_n(x)$ определяется как мера тех чисел

$$\alpha = [0; t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots] \in [0, 1],$$

для которых

$$\alpha_n = [0; t_{n+1}, t_{n+2}, \dots] \in [0, x].$$

В [13] Кузьмин доказал предположение Гаусса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \log_2(x + 1).$$

Окончательный результат в этом направлении принадлежит Бабенко [3], который доказал, что

$$F_n(x) = \log_2(x + 1) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^n \psi_j(x),$$

где $\lambda_j \rightarrow 0$, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$ и $\psi_j(x)$ — функции, аналитические в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1)$.

Арнольдом (см. [4, № 1993-11]) была поставлена задача о статистических свойствах элементов цепных дробей для чисел a/b , когда точки (a, b) берутся внутри сектора $a, b > 0$, $a^2 + b^2 \leq R^2$ или внутри расширяющейся области

$\Omega(R)$ общего вида. Более общим является вопрос об асимптотическом поведении суммы

$$N_x(R) = \sum_{(a,b) \in \Omega(R)} s_x \left(\frac{a}{b} \right),$$

аналогичный вопросу о статистиках Гаусса—Кузьмина. В случае сектора ответ на него был впервые получен Авдеевой и Быковским в [2]. Затем в [1] была доказана более точная асимптотическая формула

$$N_x(R) = \frac{3}{\pi} \log(1+x) R^2 \log R + O(R^2),$$

в которой остаточный член на $\sqrt{\log R}$ лучше, чем в [2]. Устиновым в [7] для величины $N_x(R)$ получена асимптотическая формула с двумя значащими членами

$$N_x(R) = \frac{3}{\pi} R^2 [\log(1+x) \log R + C(x)] + O(R^{17/9} \log^2 R)$$

со сложно устроенной функцией $C(x)$.

В настоящей работе рассматривается аналогичный вопрос для произвольной области $\Omega(R)$, которая получается гомотетией с коэффициентом $R > 1$ из некоторой фиксированной области Ω_0 :

$$\Omega(R) = R \cdot \Omega_0 = \left\{ (x, y) : x, y > 0, \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R} \right) \in \Omega_0 \right\}.$$

Область Ω_0 задаётся в полярных координатах,

$$\Omega_0 = \left\{ (\rho, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq r(\varphi) \right\},$$

и имеет площадь

$$V_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2(\varphi) d\varphi.$$

При условии, что на всем отрезке $[0, \pi/4]$ функция $r(\varphi)$ удовлетворяет ограничениям

$$r(\varphi) \geq \varepsilon_0 > 0, \quad r'(\varphi) \leq r(\varphi) \operatorname{arctg} \varphi,$$

для величины

$$N_x(R) = \sum_{(a,b) \in \Omega(R)} s_x \left(\frac{a}{b} \right)$$

доказывается асимптотическая формула с двумя значащими членами

$$N_x(R) = \frac{2V_0}{\zeta(2)} R^2 (\log(x+1) \log R + C(x)) + O(R^{2-1/5} \log^3 R).$$

Она уточняет предыдущий частный результат, полученный в [7], и показывает, что главный значащий член в статистиках Гаусса—Кузьмина для конечных цепных дробей зависит не от формы области Ω_0 , а лишь от её площади.

3. Вспомогательное преобразование

Обозначим через $N_x^*(R)$ сумму

$$N_x^*(R) = \sum_{\substack{(a,b) \in \Omega(R) \\ (a,b)=1}} s_x \left(\frac{a}{b} \right).$$

Так как

$$N_x(R) = \sum_{d \leq R} N_x^* \left(\frac{R}{d} \right),$$

то для решения задачи достаточно получить асимптотическую формулу для $N_x^*(R)$.

Пусть $T_x^*(R)$ — число решений системы

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = \pm 1, \\ mP + nP' = a, \\ mQ + nQ' = b, \\ a^2 + b^2 \leq R^2 r^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$1 \leq Q \leq Q', \quad 1 \leq P' \leq Q', \quad 0 \leq P \leq Q, \quad 1 \leq m \leq xn, \quad (m, n) = 1. \quad (2)$$

Аналогично [7, лемма 3] проверяется, что для любого $R \geq 2$ и $x \in [0; 1]$ справедливо равенство

$$N_x^*(R) = T_x^*(R) + \frac{R^2}{\zeta(2)} [x < 1] V_0(x) + O(R \log R), \quad (3)$$

где

$$V_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} x} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Для дальнейшего исследования величины $T_x^*(R)$ введём параметр U , лежащий в пределах $1 \leq U \leq R$. Через T_1 обозначим число решений системы (1) с ограничениями (2), которые удовлетворяют дополнительному условию $Q' \leq U$. Число решений, для которых $Q' > U$, обозначим через T_2 . Тогда

$$T_x^*(R) = T_1 + T_2.$$

Каждую из величин T_1 и T_2 исследуем отдельно.

4. Вычисление величины T_1

Лемма 1. Пусть $q \geq 1$ — целое и функция $a(u, v)$ задана в целых точках (u, v) , где $1 \leq u, v \leq q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет

неравенствам

$$a(u, v) \geq 0, \quad \Delta_{1,0}a(u, v) \leq 0, \quad \Delta_{0,1}a(u, v) \leq 0, \quad \Delta_{1,1}a(u, v) \geq 0 \quad (4)$$

во всех точках, где эти условия определены. Тогда для суммы

$$W = \sum_{u,v=1}^q \delta_q(uv-1)a(u, v)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{u,v=1}^q a(u, v) + O(A\psi(q)\sqrt{q}),$$

где $\psi(q) = \sigma_0(q)\sigma_{-1/2}(q)\log^2(q+1)$ и $A = a(1, 1)$ — наибольшее значение функции $a(u, v)$.

Доказательство см. в [7].

Пусть q — натуральное и $x \in [0, 1]$. Для целых u и v , лежащих в пределах $1 \leq u, v \leq q$ через $I_q(u, v)$ будем обозначать отрезок

$$\left[\arctg \left(\frac{u}{q} - \frac{x}{q(q+vx)} \right), \arctg \frac{u}{q} \right].$$

Лемма 2. Пусть $r(\varphi) \in C^{(1)}([0, \pi/4])$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $r'(\varphi) \leq r(\varphi) \operatorname{tg} \varphi$ при $\varphi \in [0, \pi/4]$. Тогда для суммы

$$W_1(q) = \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^q \delta_q(uv-1) \int_{I_q(u,v)} r^2(\varphi) d\varphi$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_1(q) = V_0 \log(1+x) \frac{\varphi(q)}{q^2} + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right),$$

где

$$V_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Доказательство. Из условий $r(\varphi) \geq 0$ и $r'(\varphi) \leq r(\varphi) \operatorname{tg} \varphi$ вытекает, что функция

$$a(u, v) = \int_{I_q(u,v)} r^2(\varphi) d\varphi$$

удовлетворяет условиям (4). Следовательно, по лемме 1

$$W_1(q) = \frac{\varphi(q)}{2q^2} \sum_{u,v=1}^q \int_{I_q(u,v)} r^2(\varphi) d\varphi + O\left(\frac{\psi(q)\sqrt{q}}{q^2}\right).$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении (с учётом того, что $r(\varphi) = O(1)$ и $r'(\varphi) = O(1)$) находим

$$\int_{I_q(u,v)} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{x}{q(q+vx)} \frac{1}{1+\frac{u^2}{q^2}} \left(r^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{q} \right) + O \left(\frac{1}{q^2} \right) \right),$$

$$\frac{x}{q+vx} = \log(q+vx) - \log(q+(v-1)x) + O \left(\frac{1}{q^2} \right),$$

$$\frac{1}{q(1+\frac{u^2}{q^2})} r^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{q} \right) = \int_{u-1}^u r^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{z}{q} \right) d \operatorname{arctg} \frac{z}{q} + O \left(\frac{1}{q^2} \right).$$

Поэтому

$$W_1(q) = \frac{\varphi(q)}{2q^2} \sum_{u=1}^q \int_{u-1}^u r^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{z}{q} \right) d \operatorname{arctg} \frac{z}{q} \times$$

$$\times \sum_{v=1}^q [\log(q+vx) - \log(q+(v-1)x)] + O \left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}} \right) =$$

$$= V_0 \log(1+x) \frac{\varphi(q)}{q^2} + O \left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}} \right).$$

Из леммы 2 легко выводится следующее утверждение.

Следствие 1. При $N \geq 1$ для суммы

$$W_2 = \sum_{q \leq N} W_1(q)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_2 = V_0 \frac{\log(1+x)}{\zeta(2)} \left(\log N + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + f(x) + O \left(\frac{\log^5(N+1)}{\sqrt{N}} \right), \quad (5)$$

где $f(x)$ — функция, задаваемая рядом

$$f(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \left(W_1(q) - V_0 \log(1+x) \frac{\varphi(q)}{q^2} \right). \quad (6)$$

Замечание. Аналогично для суммы

$$W_3(q) = \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^q \delta_q(uv-1) \int_{I'_q(u,v)} r^2(\varphi) d\varphi,$$

где

$$I'_q(u,v) = \left[\operatorname{arctg} \frac{u}{q}, \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{q} + \frac{x}{q(q+vx)} \right) \right],$$

при $q \geq 2$ доказывается асимптотическая формула

$$W_3(q) = \frac{\pi}{4} \log(1+x) \frac{\varphi(q)}{q^2} + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right),$$

и соответственно для суммы

$$W_4 = \sum_{2 \leq q \leq N} W_3(q)$$

при $N \geq 1$ получается представление

$$W_4 = V_0 \frac{\log(1+x)}{\zeta(2)} \left(\log N + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + g(x) + O\left(\frac{\log^5(N+1)}{\sqrt{N}}\right), \quad (7)$$

где

$$g(x) = \sum_{q=2}^{\infty} \left(W_3(q) - V_0 \log(1+x) \frac{\varphi(q)}{q^2} \right). \quad (8)$$

Суммирование начинается с $q = 2$, так как при $q = 1$ получается четвёрка $Q' = Q = P' = 1$, $P = 2$, которая не удовлетворяет условиям (2).

Точно так же, как в [7], с помощью формул (5) и (7) доказывается асимптотическая формула для величины T_1 .

Теорема 1. Пусть $1 \leq U \leq R$. Тогда для величины T_1 , равной числу решений системы (1), (2) с дополнительным ограничением $Q' \leq U$, справедлива асимптотическая формула

$$T_1 = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2 (\log(x+1) \log U + C_1(x)) + O(R^2 U^{-1/2} \log^5 R) + O(RU \log R),$$

где

$$C_1(x) = \log(x+1) \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + \frac{\zeta(2)}{2V_0} (f(x) + g(x)), \quad (9)$$

а функции $f(x)$ и $g(x)$ определены равенствами (6) и (8).

5. Вычисление величины T_2

Лемма 3 ([7, лемма 7]). Пусть $q \geq 1$ и $f(u)$ — неотрицательная невозрастающая функция на отрезке $[0; q]$, причём $f(0) \leq q$. Тогда

$$\sum_{u=1}^q \sum_{1 \leq v \leq f(u)} \delta_q(uv \pm 1) = \frac{\varphi(q)}{q^2} V(\Omega) + O(q^{3/4} \sigma_0(q) \log(q+1)),$$

где Ω — область на плоскости Ouv , задаваемая условиями

$$0 \leq u \leq q, \quad 0 \leq v \leq f(u),$$

и $V(\Omega)$ — её площадь.

Далее будем рассматривать функцию $v(u)$, которая в области $1 \leq u \leq q - 1$, $0 \leq v \leq q$ неявно задана уравнением

$$a^2 + b^2 = R^2 r^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right), \quad (10)$$

где

$$a = m \frac{uv \pm 1}{q} + nu, \quad b = mv + nq.$$

В следующем утверждении будем считать, что функция $v(u)$ определена хотя бы в одной точке.

Лемма 4. Пусть $R \geq 1$ — действительное, m, n, q — натуральные числа и $1 \leq m \leq n$. Предположим также, что задана функция $r(\varphi) \in C^{(1)}([0, \pi/4])$, которая на всем отрезке $[0, \pi/4]$ удовлетворяет условиям

$$r(\varphi) \geq \varepsilon_0 > 0, \quad r'(\varphi) \leq r(\varphi) \operatorname{arctg} \varphi.$$

Тогда при

$$q^2 > U_0 = \frac{13}{\varepsilon_0^2} \max_{\varphi \in [0, \pi/4]} r(\varphi) |r'(\varphi)| \quad (11)$$

функция $v(u)$ имеет область определения отрезок $[q_0, q - 1]$ ($1 \leq q_0 \leq q - 1$) и на этом отрезке является невозрастающей функцией.

Доказательство. Во-первых, заметим, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(a^2 + b^2)}{\partial v} &= 2a \frac{mu}{q} + 2bm \geq 2m, \\ \left| \frac{R^2 \partial r^2(\operatorname{arctg} a/b)}{\partial v} \right| &= \frac{2R^2 r |r'| m}{(a^2 + b^2) q^2} \leq \frac{2R^2 r |r'| m}{n^2 q^4}, \end{aligned}$$

где $r = r(\operatorname{arctg} a/b)$, $r' = r'(\operatorname{arctg} a/b)$.

Так как функция $v(u)$ должна быть определена хотя бы в одной точке, то параметр R удовлетворяет неравенству

$$\left(m \frac{q^2 + 1}{q} + nq \right)^2 + (mv + nq)^2 \geq R^2 \varepsilon_0^2.$$

Отсюда $R^2 \leq 13n^2 q^2 / \varepsilon_0^2$, и при $q^2 > U_0$

$$\left| \frac{R^2 \partial r^2(\operatorname{arctg} a/b)}{\partial v} \right| \leq \frac{2 \cdot 13}{\varepsilon_0^2} \frac{r |r'| m}{q^2} < 2m \leq \frac{\partial(a^2 + b^2)}{\partial v}.$$

Значит, при фиксированном u равенство (10) определяет не более одного значения v .

Дифференцируя $v(u)$ как неявную функцию, находим

$$\frac{dv}{du} = - \frac{b^2}{m} \frac{a/b - r'/r}{au + bq \pm mr'/r}.$$

По условию леммы $r'/r \leq a/b$, значит, числитель полученного выражения неотрицателен. Далее, так как $m/n \leq 1$ и $q^2 > r'/r$, то

$$au + bq \pm m \frac{r'}{r} \geq nq^2 \pm m \frac{r'}{r} = n \left(q^2 \pm \frac{m}{n} \frac{r'}{r} \right) > 0.$$

Следовательно, функция $v(u)$ не возрастает и определена на некотором отрезке $[u_0, q-1]$, где $1 \leq u_0 \leq q-1$.

Лемма 5. Пусть функция $r(\varphi)$ удовлетворяет ограничениям из леммы 4, U_0 определено формулой (11), $U_0^{1/2} \leq U < R$ и $R_1 = R/U$. Тогда для величины T_2 , равной числу решений системы (1), (2) с дополнительным ограничением $Q' > U$, справедлива асимптотическая формула

$$T_2 = 2 \sum_{n < R_1} \sum_{m \leq nx}^* \sum_{U < q \leq R} \frac{\varphi(q)}{q^2} V(m, n, q) + O(R^2 U^{-1/4} \log^2 R),$$

где $V(m, n, q)$ — площадь области $\Omega(m, n, q)$ на плоскости Ouv , задаваемой условиями

$$0 \leq u, v \leq q, \quad \left(\frac{u^2}{q^2} + 1 \right) (mv + nq)^2 \leq R^2 r^2 \left(\arctg \frac{u}{q} \right).$$

Доказательство. Согласно определению величины T_2

$$T_2 = \sum_{1 \leq n < R_1} \sum_{m \leq nx}^* \sum_{U < q \leq R/n} \sum_{u, v=1}^q \delta_q(uv \pm 1) \left[a^2 + b^2 \leq R^2 r^2 \left(\arctg \frac{a}{b} \right) \right],$$

где

$$a = m \frac{uv \pm 1}{q} + nu, \quad b = mv + nq.$$

Применяя леммы 4 и 3, находим

$$T_2 = \sum_{1 \leq n < R_1} \sum_{m \leq nx}^* \sum_{U < q \leq R/n} \left(\frac{\varphi(q)}{q^2} V_{\pm}(m, n, q) + O(q^{3/4} \sigma_0(q) \log q) \right),$$

где $V_{\pm}(m, n, q)$ — площадь области $\Omega_{\pm}(m, n, q)$ на плоскости Ouv , задаваемой условиями

$$0 \leq u, v \leq q, \tag{12}$$

$$\left(m \frac{uv \pm 1}{q} + nu \right)^2 + (mv + nq)^2 \leq R^2 r^2 \left(\arctg \frac{u}{q} \pm \frac{m}{q(mv + nq)} \right). \tag{13}$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что

$$V_{\pm}(m, n, q) = V(m, n, q) + O(q). \tag{14}$$

Действительно, из этого равенства будет следовать асимптотическая формула

$$T_2 = 2 \sum_{n < R_1} \sum_{m \leq nx}^* \sum_{U < q \leq R/n} \frac{\varphi(q)}{q^2} V(m, n, q) + O(R^2 U^{-1/4} \log^2 R),$$

которая равносильна утверждению леммы, поскольку условие $q \leq R/n$ можно заменить более простым $q < R$ (при $nq > R$ область $\Omega(m, n, q)$ пуста и $V(m, n, q) = 0$).

Для доказательства формулы (14) рассмотрим, на сколько могут отличаться отрезки изменения переменной v , задаваемые неравенствами (12), (13) при фиксированном u в пределах $1 \leq u \leq q - 1$. Хотя бы один из этих отрезков не должен быть пустым, поэтому должно выполняться одно из неравенств

$$\left(m \frac{uv \pm 1}{q} + nu\right)^2 + (mv + nq)^2 > R^2 r^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{q} \pm \frac{m}{q(mv + nq)}\right),$$

а значит, $R \ll nq$. Пусть пара (u, v) лежит в области $\Omega(m, n, q)$, но не лежит в одной из областей $\Omega_{\pm}(m, n, q)$ (или наоборот). Так как

$$\sqrt{\left(m \frac{uv \pm 1}{q} + nu\right)^2 + (mv + nq)^2} = (mv + nq) \sqrt{\frac{u^2}{q^2} + 1} + O\left(\frac{m}{q}\right)$$

и

$$r \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{q} \pm \frac{m}{q(mv + nq)}\right) = r \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{q}\right) + O\left(\frac{m}{nq^2}\right),$$

то

$$Rr \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{q}\right) - (mv + nq) \sqrt{\frac{u^2}{q^2} + 1} \ll \frac{Rm}{nq^2} + \frac{m}{q} \ll \frac{m}{q}.$$

Поэтому при фиксированном значении u переменная v меняется внутри интервала длины $O(1/q)$.

Учитывая, что площади областей $\Omega(m, n, q)$ и $\Omega_{\pm}(m, n, q)$, попавшие внутрь полос $0 \leq u \leq 1$ и $q - 1 \leq u \leq q$, отличаются не больше чем на q , приходим к равенству (14). Лемма 5 доказана.

Лемма 6 ([7, лемма 9]). Пусть $1 \leq U \leq R$, $R_1 = R/U$. Тогда для суммы

$$W_5 = \sum_{n < R_1} \sum_{m \leq nx}^* \sum_{U < q \leq R} \frac{\varphi(q)}{q^2} V(m, n, q)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_5 = \frac{U^2}{\zeta(2)} \int_0^1 dt \int_0^{R_1(t)} \xi F^*(\xi) d\xi + O(R^2 U^{-1} \log R),$$

где $R_1(t) = R_1 r(\operatorname{arctg} t) / \sqrt{t^2 + 1}$ и

$$F^*(\xi) = \sum_{n < \xi} \sum_{m \leq nx}^* \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right) [\xi \geq m+n] + \\ + \sum_{n < \xi} \sum_{m \leq nx}^* \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\xi}\right) [\xi < m+n].$$

Следствие 2. Пусть $1 \leq U \leq R$, $R_1 = R/U$ и

$$R_1(t) = R_1 \frac{r(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Тогда для величины T_2 справедлива асимптотическая формула

$$T_2 = 2 \frac{U^2}{\zeta(2)} \int_0^1 dt \int_0^{R_1(t)} \xi F^*(\xi) d\xi + O(R^2 U^{-1/4} \log^2 R).$$

Доказательство вытекает из лемм 5 и 6.

Лемма 7 ([7, лемма 10]). При $N > 1$ для суммы

$$F^*(N) = \sum_{n < N} \sum_{m \leq nx}^* \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right) - \sum_{n < N} \sum_{\substack{m \leq nx \\ m+n > N}}^* \frac{1}{m} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{m+n} \right)$$

справедлива асимптотическая формула

$$F^*(N) = \frac{\log(x+1)}{\zeta(2)} \log N + \frac{H(x)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log^2(N+1)}{N}\right),$$

где

$$H(x) = \log(x+1) \left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2} \log(x+1) + \gamma - 1 \right) + h(x)$$

и

$$h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{m/x \leq n < m/x+m} \frac{1}{n} - \log(x+1) \right). \quad (15)$$

Непосредственным вычислением проверяется следующее утверждение.

Лемма 8. Пусть $R_1 > 0$ и при $t \in [0, 1]$

$$R_1(t) = R_1 \frac{r(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Тогда

$$\int_0^1 dt \int_0^{R_1(t)} \xi d\xi = V_0 R_1^2,$$

$$\int_0^1 dt \int_0^{R_1(t)} \xi \log \xi d\xi = V_0 R_1^2 \left(\log R_1 - \frac{1}{2} \right) + V_1 R_1^2,$$

где

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2(\varphi) \log(r(\varphi) \cos \varphi) d\varphi.$$

Теорема 2. Пусть $1 \leq U \leq R$, $R_1 = R/U$. Тогда для величины T_2 , равной числу решений системы (1) с дополнительным ограничением $Q' > U$, справедлива асимптотическая формула

$$T_2 = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2 (\log(x+1) \log R_1 + C_2(x)) + O(R^2 U^{-1/4} \log^2 R) + O(RU \log^2 R),$$

где

$$C_2(x) = \log(x+1) \left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \gamma - \frac{\log(x+1)}{2} - \frac{3}{2} + \frac{V_1}{V_0} \right) + h(x), \quad (16)$$

а функция $h(x)$ определена равенством (15).

Доказательство получается подстановкой результатов лемм 7 и 8 в следствие 2.

6. Основной результат

Теорема 3. Пусть $R \geq 2$. Тогда для величины $N_x(R)$ справедлива асимптотическая формула

$$N_x(R) = \frac{2V_0}{\zeta(2)} R^2 (\log(x+1) \log R + C(x)) + O(R^{2-1/5} \log^3 R),$$

где

$$C(x) = \log(x+1) \left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + 2\gamma - \frac{\log(x+1)}{2} - \frac{3}{2} + \frac{V_1}{V_0} \right) + \\ + h(x) + \frac{\zeta(2)}{2V_0} (f(x) + g(x) + V_0(x)[x < 1]),$$

а функции $f(x)$ и $g(x)$ определены равенствами (6) и (8).

Доказательство. Из теорем 1 и 2 вытекает равенство

$$T_x^*(R) = T_1 + T_2 = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2 (\log(x+1) \log R + C_1(x) + C_2(x)) + \\ + O(R^2 U^{-1/2} \log^5 R) + O(R^2 U^{-1/4} \log^2 R) + O(RU \log^2 R).$$

Выбирая $U = R^{4/5}$ и подставляя результат в формулу (3), получаем

$$N_x^*(R) = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2 (\log(x+1) \log R + C_3(x)) + O(R^{9/5} \log^2 R),$$

где

$$C_3(x) = C_1(x) + C_2(x) + \frac{\zeta(2)}{2} \frac{V_0(x)}{V_0} [x < 1].$$

Наконец, применяя равенство

$$N_x(R) = \sum_{d \leq R} N_x^* \left(\frac{R}{d} \right),$$

приходим к утверждению теоремы.

Литература

- [1] Авдеева М. О. О статистиках неполных частных конечных цепных дробей // Функцион. анализ и его прил. — 2004. — Т. 38, № 2. — С. 1—11.
- [2] Авдеева М. О., Быковский В. А. Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса—Кузьмина. — Препринт. — Владивосток: Дальнаука, 2002.
- [3] Бабенко К. И. Об одной задаче Гаусса // ДАН СССР. — 1978. — Т. 238, № 5. — С. 1021—1024.
- [4] Задачи Арнольда. — М.: Фазис, 2000.
- [5] Кнут Д. Э. Искусство программирования. — М.; Санкт-Петербург; Киев: Вильямс, 2000. — Т. 2: Получисленные алгоритмы.
- [6] Тонков Т. О средней длине конечных цепных дробей // Math. Balkanica. — 1974. — Т. 4. — С. 617—629.
- [7] Устинов А. В. О статистических свойствах конечных цепных дробей // Труды по теории чисел. — СПб., 2005. — С. 186—211. — (Зап. научн. семин. ПОМИ; т. 322).
- [8] Baladi V., Valle B. Euclidean algorithms are Gaussian // J. Number Theory. — 2005. — Vol. 110, no. 2. — P. 331—386.
- [9] Dixon J. D. The number of steps in the Euclidean algorithm // J. Number Theory. — 1970. — Vol. 2. — P. 414—422.
- [10] Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions // Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; New York: Plenum Press, 1968. — P. 89—96.
- [11] Hensley D. The number of steps in the Euclidean algorithm // J. Number Theory. — 1994. — Vol. 49, no. 2. — P. 142—182.
- [12] Knuth D. E. Evaluation of Porter's Constant // Comput. Math. Appl. — 1976. — Vol. 2. — P. 137—139.
- [13] Kuz'min R. O. Sur un problème de Gauss // Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. — Bologna, 1928. — P. 83—89.
- [14] Porter J. W. On a theorem of Heilbronn // Mathematika. — 1975. — Vol. 22, no. 1. — P. 20—28.
- [15] Tonkov T. On the average length of finite continued fractions // Acta Arith. — 1974. — Vol. 26. — P. 47—57.
- [16] Vallée B. Dynamics of the binary Euclidean algorithm: Functional analysis and operators // Algorithmica. — 1998. — Vol. 22. — P. 660—685.
- [17] Vallée B. A unifying framework for the analysis of a class of Euclidean algorithms // Proceedings of LATIN'2000. — Springer. — P. 343—354. — (Lect. Notes Comp. Sci.; Vol. 1776).