Короткое доказательство тождества Эйлера для континуантов

А. В. Устинов*

Континуантами называются многочлены $K_n(x_1,\dots,x_n)$, которые определяются начальными условиями

$$K_0() = 1, \quad K_1(x_1) = x_1$$

и рекуррентным соотношением

$$K_n(x_1,\dots,x_n) = x_n K_n(x_1,\dots,x_{n-1}) + K_n(x_1,\dots,x_{n-2}) \qquad (n \ge 2)$$

(удобно также считать, что $K_{-1} = 0$). Они возникают при решении задач, связанных с цепными дробями и алгоритмом Евклида. Континуанты удовлетворяют различным соотношениям, наиболее общим из которых является тождество Эйлера

$$\begin{gathered} K_{m+n}(x_1,\dots,x_{m+n})K_l(x_{m+1},\dots,x_{m+l}) - K_{m+l}(x_1,\dots,x_{m+l})K_n(x_{m+1},\dots,x_{m+n}) = \\ = (-1)^n K_{m-1}(x_1,\dots,x_{m-1})K_{n-l-1}(x_{m+l+2},\dots,x_{m+n}) \quad (m \ge 1, l \ge 0, n \ge l+1). \end{gathered} \tag{1}$$

Обычно оно проверяется индукцией по двум из трех параметров l, m, n. Следующее доказательство основано на том, что определитель кососимметрической матрицы 4×4 (как и любой матрицы четного порядка) является квадратом некоторого многочлена (пфаффиана матрицы):

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = (af + cd - be)^2.$$

Рассуждения будут проводится для многочленов $k_n(x_1,\dots,x_n)$, которые определяются начальными условиями

$$k_0() = 1, \quad k_1(x_1) = x_1$$

и рекуррентным соотношением

$$k_n(x_1,\dots,x_n) = x_n k_n(x_1,\dots,x_{n-1}) - k_n(x_1,\dots,x_{n-2}) \qquad (n \ge 2). \tag{2}$$

Они возникают как числители и знаменатели цепных дробей вида

$$x_1 - \cfrac{1}{x_2 - \ddots - \cfrac{1}{x_n}}$$

*Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070

и связаны с многочленами $K_n(x_1,\dots,x_n)$ соотношением

$$k_n(x_1,\dots,x_n)=i^{-n}K_n(ix_1,\dots,ix_n) \qquad (i=\sqrt{-1}). \tag{3}$$

Теорема *Пусть $m\geq 1$, $l\geq 0$ и $n\geq l+1$. Тогда*

$$k_{m+n}(x_1,\dots,x_{m+n})k_l(x_{m+1},\dots,x_{m+l})-k_{m+l}(x_1,\dots,x_{m+l})k_n(x_{m+1},\dots,x_{m+n})+$$
$$+k_{m-1}(x_1,\dots,x_{m-1})k_{n-l-1}(x_{m+l+2},\dots,x_{m+n})=0. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим кососимметрическую матрицу $A=(a_{u,v})_{u,v=1}^{m+n+2}$, элементами которой при $1\leq u<v\leq m+n+2$ являются величины

$$a_{u,v}=k_{v-u-1}(x_u,\dots,x_{v-2}).$$

Например, при $m=n=1$,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x_1 & x_1x_2-1 \\ -1 & 0 & 1 & x_2 \\ -x_1 & -1 & 0 & 1 \\ 1-x_1x_2 & -x_2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из рекуррентных соотношений (2) вытекает, что каждый столбец матрицы A является линейной комбинацией двух предыдущих (если такие существуют). Значит, у матрицы A любой минор порядка 3 или больше равен нулю. Рассматривая один из главных миноров, находим

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{1,m+1} & a_{1,m+l+2} & a_{1,m+n+2} \\ -a_{1,m+1} & 0 & a_{m+1,m+l+2} & a_{m+1,m+n+2} \\ -a_{1,m+l+2} & -a_{m+1,m+l+2} & 0 & a_{m+l+2,m+n+2} \\ -a_{1,m+n+2} & -a_{m+1,m+n+2} & -a_{m+l+2,m+n+2} & 0 \end{pmatrix}=$$
$$=(a_{1,m+1}a_{m+l+2,m+n+2}+a_{1,m+n+2}a_{m+1,m+l+2}-a_{1,m+l+2}a_{m+1,m+n+2})^2=0,$$

что равносильно равенству (4). Теорема доказана.

Тождество Эйлера (1) получается из формулы (4) путем применения соотношения (3).

119992, Москва, Воробьевы горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра теории чисел.
ustinov@mech.math.msu.su