Статистика траекторий частиц для однородной двумерной модели “Периодический газ Лоренца”

В. А. Быковский* А. В. Устинов†

Введение

Пусть $0 < \Delta < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $T > 0$. Открытый круг радиуса Δ с центром в некоторой точке назовем ее Δ-окрестностью. Определим подмножество $\Omega_\Delta(T)$ в $[0, 2\pi)$, состоящее из углов φ, для которых луч

$$\{(t\cos\varphi, t\sin\varphi) \,|\, t \geqslant 0\} \tag{1}$$

пересекает Δ-окрестность некоторой целочисленной точки $(m, n) \neq (0, 0)$ из круга

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant T^2\right\}.$$

Обозначим через $G_\Delta(T)$ нормированную меру $\Omega_\Delta(T)$:

$$G_\Delta(T) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{mes}\Omega_\Delta(T) \in [0, 1].$$

В 1918 г. Д. Пойа (см. [2], теория чисел, задача 239) доказал, что $G_\Delta(T) = 1$ для всех $T \geqslant \Delta^{-1}$. Отвечая на вопрос, поставленный в 1981 г. Я. Г. Синаем, в совместной работе [4] Ф. П. Бока, Р. Н. Гологан и А. Захареску доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ равномерно по $T \in [0, \Delta^{-1}]$

$$G_\Delta(T) = \int_0^{\Delta\cdot T} \sigma(t)dt + O_\varepsilon(\Delta^{1/8-\varepsilon}), \tag{2}$$

где

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{12}{\pi^2}, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ \frac{12}{\pi^2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)\left(1 - \log\left(\frac{1}{t} - 1\right)\right), & \text{если } \frac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

С физической точки зрения, величину $G_\Delta(T)$ можно интерпретировать как функцию распределения длин свободного пробега частиц, движущихся прямолинейно из начала координат до их первого попадания в Δ-окрестность некоторой ненулевой целочисленной точки. Речь идет об однородной двумерной модели “Периодический газ Лоренца”.

В связи с этим представляется интересной следующая более общая задача. Пусть $(m, n) = (m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi)) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ — центр первой Δ-окрестности, в которую попадет

*Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070, фонда РФФИ, грант № 07-01-00306 и проекта ДВО РАН 06-I-П-13-047

†Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070, фонда РФФИ, грант № 07-01-00306 и проекта ДВО РАН 06-III-А-01-017

луч (1). Обозначим через $T_\Delta(\varphi)$ расстояние от начала координат до $M_\Delta(\varphi)$ — проекции точки $(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi))$ на луч (1). Введем также величину $U_\Delta(\varphi) \in [-\Delta, \Delta]$, которая по абсолютной величине совпадает с расстоянием от $(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi))$ до $M_\Delta(\varphi)$. При этом $U_\Delta(\varphi) > 0$ ($U_\Delta(\varphi) < 0$), если при движении частицы по лучу (1) точка $(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi))$ остается справа (слева). Удобно рассматривать нормированные значения этих величин:

$$t_\Delta(\varphi) = \Delta \cdot T_\Delta(\varphi) \in [0, 1], \qquad u_\Delta(\varphi) = \Delta^{-1} \cdot U_\Delta(\varphi) \in [-1, 1].$$

Ориентируясь на терминологию из ядерной физики, назовем $u_\Delta(\varphi)$ нормированным прицельным параметром; $t_\Delta(\varphi)$ будем называть нормированным свободным пробегом.

Пусть $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$ и $-1 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant 1$. Как обычно, $\chi_I(\ldots)$ — характеристическая функция промежутка I на вещественной прямой. Главным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема . *При любом $\varepsilon > 0$ равномерно по t_0, u_1, u_2 и $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ для функции распределения*

$$\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta; \varphi_0, t_0, u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi_0} \chi_{[0,t_0]}(t_\Delta(\varphi))\chi_{[u_1,u_2]}(u_\Delta(\varphi))d\varphi$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(\Delta) = \int_0^{\varphi_0}\int_0^{t_0}\int_{u_1}^{u_2} \rho(\varphi, t, u) d\varphi\, dt\, du + O_\varepsilon(\Delta^{1/2-\varepsilon}),$$

где $\Delta \to 0$ и

$$\rho(\varphi, t, u) = \rho(t, u) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^3}, & \text{если } |u| \leqslant \frac{1}{t} - 1; \\ \frac{3}{\pi^3} \cdot \frac{1}{|u|}\left(\frac{1}{t} - 1\right), & \text{если } |u| > \frac{1}{t} - 1. \end{cases}$$

Замечание 1. *Если положить $\varphi_0 = 2\pi$, а также $u_1 = -1$ и $u_2 = 1$, то получим уточнение остаточного члена в асимптотической формуле (2), доказанной в работе [4].*

Замечание 2. *С физической точки зрения, функцию $\rho(\varphi, t, u)$ можно интерпретировать как плотность частиц, движущихся прямолинейно из начала координат под углом φ к оси абсцисс, которые проходят до первого рассеяния в Δ-окрестностях целочисленных точек расстояние $T = \Delta^{-1} \cdot t$ (свободный пробег) с прицельным параметром $U = \Delta \cdot u$.*

Замечание 3. *Плотность распределения $\rho(\varphi, t, u)$ не зависит от угла φ (изотропность).*

1 Применение непрерывных дробей

Очевидные симметрии в рассматриваемой задаче приводят к равенствам:

$$t_\Delta(\varphi) = t_\Delta(-\varphi) = t_\Delta\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$u_\Delta(\varphi) = -u_\Delta(-\varphi) = u_\Delta\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Поэтому теорему достаточно доказать только для $\varphi_0 \in [0, \pi/4]$, что и будет предполагаться в дальнейшем. При этом $\alpha = \operatorname{arctg} \varphi \in [0, 1]$.

Положим

$$l_\varphi(x, y) = x \sin \varphi - y \cos \varphi = \frac{\alpha x - y}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \tag{3}$$

$$l^*_\varphi(x, y) = x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{x + \alpha y}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \tag{4}$$

Замечание 4. *Из определений $l_\varphi(x, y)$ и $l^*_\varphi(x, y)$ немедленно следует, что $(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi))$ — такая целочисленная точка (m, n) с $|l_\varphi(m, n)| < \Delta$, $m > 0$ и $n \geqslant 0$, для которой величина $l^*_\varphi(m, n)$ принимает наименьшее значение, равное*

$$\Delta^{-1} \cdot t_0(\varphi) = l^*_\varphi(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi)).$$

При этом

$$\Delta \cdot u_0(\varphi) = l_\varphi(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi)).$$

Лемма 1. *Целочисленная пара $(m_\Delta(\varphi), n_\Delta(\varphi))$ однозначно определяется из условий*

$$m_\Delta(\varphi) = \min \left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; \|\alpha m\| < \Delta\sqrt{1 + \alpha^2} \right\},$$

$$|\alpha m_\Delta(\varphi) - n_\Delta(\varphi)| < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого натурального m, меньшего $m_\Delta(\varphi)$, выполняется неравенство

$$\|\alpha m\| \leqslant \|\alpha m_\Delta(\varphi)\|.$$

Тогда при некотором целом $n \geqslant 0$

$$|\alpha m - n| = \|\alpha m\| \leqslant \|\alpha m_\Delta(\varphi)\| = |\alpha m_\Delta(\varphi) - n_\Delta(\varphi)| <$$
$$< \Delta\sqrt{1 + \alpha^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$n < \alpha m + \frac{1}{2} \leqslant \alpha m_\Delta(\varphi) + \frac{1}{2} = \alpha m_\Delta(\varphi) - n_\Delta(\varphi) + n_\Delta(\varphi) + \frac{1}{2} <$$
$$< n_\Delta(\varphi) + \Delta\sqrt{1 + \alpha^2} + \frac{1}{2} < n_\Delta(\varphi) + 1.$$

То есть $n \leqslant n_\Delta(\varphi)$. Но тогда

$$m \cos \varphi + n \sin \varphi < m_\Delta(\varphi) \cos \varphi + n_\Delta(\varphi) \sin \varphi.$$

Это неравенство противоречит замечанию 4. Значит, наше предположение неверно и лемма 1 полностью доказана. □

Напомним, что любое вещественное число x каноническим способом раскладывается в непрерывную дробь

$$x = [q_0; q_1, \ldots, q_i, \ldots] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ddots + \cfrac{1}{q_i + \ddots}}$$

с целой частью $q_0 = [x]$ и неполными частными $q_i = q_i(x) \in \mathbb{N}$ при $i \geqslant 1$. Она конечна только для рациональных x и в этом случае ее последнее неполное частное (если оно присутствует в разложении) больше 1. По определению,

$$P_i = P_i(x) \quad \text{и} \quad Q_i = Q_i(x) \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

— числитель (целое) и знаменатель (натуральное) несократимой i-ой подходящей к x дроби

$$\frac{P_i}{Q_i} = [q_0; q_1, \dots, q_{i-1}].$$

При этом $P_1 = q_0$ и $Q_1 = 1$.

Лемма 2. *Целые $n_\Delta(\varphi)$ и $m_\Delta(\varphi)$ — числитель и знаменатель некоторой подходящей дроби к $\alpha = \operatorname{tg}\varphi \in [0, 1]$.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что не существует натуральных m, меньших $m_\Delta(\varphi)$, для которых $\|\alpha m\| \leqslant \|\alpha m_\Delta(\varphi)\|$. Отсюда, воспользовавшись теоремой Лагранжа о наилучших приближениях (см. [3]), получаем утверждение леммы 2. $\square$

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix} \tag{5}$$

с определителем $\det S = \pm 1$, у которых

$$1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad 0 \leqslant P \leqslant Q, \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q'.$$

Оно разбивается на два непересекающихся подмножества $\mathcal{M}_+$ и $\mathcal{M}_-$, состоящих из матриц с определителями $+1$ и -1 соответственно. В дальнейшем будем предполагать, что $*$ есть либо $+$, либо $-$, либо пустой символ. В зависимости от контекста, если это не приводит к недоразумениям, мы будем использовать обозначения P, P', Q, Q' вместо $P(S)$, $P'(S)$, $Q(S)$, $Q'(S)$ для элементов матрицы S в соответствии с (5).

Пусть $X \geqslant 1$ и

$$\mathcal{M}_*(X) = \left\{ S \in \mathcal{M}_* \;\middle|\; (P')^2 + (Q')^2 \leqslant X^2 \right\}.$$

Для $\alpha \in (0, 1)$ матрица

$$S_i(\alpha) = \begin{pmatrix} P_i(\alpha) & P_{i+1}(\alpha) \\ Q_i(\alpha) & Q_{i+1}(\alpha) \end{pmatrix}$$

есть элемент $\mathcal{M}$ с определителем $\det S_i(\alpha) = (-1)^i$. Обозначим через $\widetilde{\mathbb{N}}$ множество всех непустых конечных наборов $(q_1, \dots, q_n)$, составленных из натуральных чисел. Построим отображение

$$\mathcal{B}: \quad \widetilde{\mathbb{N}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k \to \mathcal{M},$$

положив

$$\mathcal{B}(q_1, \dots, q_n) = S = S(q_1, \dots, q_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix}.$$

При этом S имеет вид (5) с

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \dots, q_{n-1}] \quad \text{и} \quad \frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \dots, q_n].$$

Лемма 3. *Отображение $\mathcal{B}$ — биекция.*

Доказательство. Имеется единственная матрица из $\mathcal{M}$ с $Q' = 1$ и для нее

$$\mathcal{B}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1).$$

Пусть теперь $S \in \mathcal{M}$, $Q' = Q'(S) \geqslant 2$ и

$$\frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \dots, q_m, q_{m+1}] \tag{6}$$

— каноническое разложение в непрерывную дробь с $q_{m+1} \geqslant 2$. Если $\det S = (-1)^m$, то

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \dots, q_m],$$

поскольку P и Q однозначно определяются из равенства

$$PQ' - P'Q = \det S = (-1)^m$$

и ограничения $1 \leqslant Q \leqslant Q'$. Если же $\det S = (-1)^{m+1}$, то ввиду равенства

$$\frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \dots, q_m, q_{m+1} - 1, 1], \tag{7}$$

по тем же причинам

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \dots, q_m, q_{m+1} - 1].$$

Осталось только заметить, что имеется ровно два разложения (6) и (7) для P'/Q' в непрерывную дробь с натуральными числами в качестве неполных частных (последнее из них может быть единицей!). $\square$

Любопытно отметить (хотя это и не понадобится нам в дальнейшем), что $\mathcal{M}$ — полугруппа относительно обычного умножения матриц, а биекция $\mathcal{B}$ на самом деле есть полугрупповой изоморфизм. При этом

$$(q_1, \dots, q_n) * (q_{n+1}, \dots, q_{n+m}) = (q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$$

— соответствующая операция на конечных наборах натуральных чисел.

Сопоставим каждой матрице

$$S = S(q_1, \dots, q_n) = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

полуинтервал

$$\begin{aligned} I(S) = {}&\{\alpha = [0; q_1, \dots, q_{n-1}, q_n + \beta] \mid 0 \leqslant \beta < 1\} = \\ &= \left\{ \alpha = \frac{P' + \beta P}{Q' + \beta Q} \;\middle|\; 0 \leqslant \beta < 1 \right\} = \left\{ \alpha \in (0, 1] \;\middle|\; -1 < \frac{\alpha Q' - P'}{\alpha Q - P} \leqslant 0 \right\} \end{aligned} \tag{8}$$

При этом, в случае $S \in \mathcal{M}_+$

$$I(S) = \left[\frac{P'}{Q'}, \frac{P' + P}{Q' + Q}\right) = \left[\frac{P'}{Q'}, \frac{P'}{Q'} + \frac{1}{Q'(Q' + Q)}\right),$$

а в случае $S \in \mathcal{M}_-$

$$I(S) = \left(\frac{P'+P}{Q'+Q}, \frac{P'}{Q'}\right] = \left(\frac{P'}{Q'} - \frac{1}{Q'(Q'+Q)}, \frac{P'}{Q'}\right].$$

Далее для $S \in \mathcal{M}_+$ положим

$$I_\Delta(S) = \left\{\alpha \in (0,1] \;\middle|\; 0 \leqslant \alpha Q' - P' < \Delta\sqrt{1+\alpha^2} \leqslant -\alpha Q + P\right\},$$

а для $S \in \mathcal{M}_-$

$$I_\Delta(S) = \left\{\alpha \in (0,1] \;\middle|\; 0 \leqslant -\alpha Q' + P' < \Delta\sqrt{1+\alpha^2} \leqslant \alpha Q - P\right\}.$$

Из последнего представления для $I(S)$ в (8) немедленно вытекает включение

$$I_\Delta(S) \subset I(S), \tag{9}$$

а также следующее утверждение.

Замечание 5. *Величины* P/Q *и* P'/Q' *— последовательные подходящие дроби к* α*, однозначно определяемые по* α *и* Δ*.*

Пусть

$$f_S(\beta) = Q'\beta - \Delta\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'} + \det S \cdot \beta\right)^2}.$$

Так как

$$f'_S(\beta) = Q' - \Delta\frac{\det S \cdot \frac{P'}{Q'} + \beta}{\sqrt{1 + \left(\det S \cdot \frac{P'}{Q'} + \beta\right)^2}} > Q' - \Delta > 0$$

и

$$f_S(0) = -\Delta\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2} < 0,$$

то уравнение $f_S(\beta) = 0$ имеет единственный положительный корень, который мы обозначим через $\lambda = \lambda_S(\Delta)$. Заметим, что

$$\left(\frac{Q'\lambda}{\Delta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{P'}{Q'} + \det S \cdot \lambda\right)^2 \leqslant 3 + 2\lambda^2.$$

Так как

$$2 \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{Q'}{\Delta}\right)^2,$$

то

$$\lambda^2 \leqslant \frac{3}{\left(\frac{Q'}{\Delta}\right)^2 - 2} \leqslant \frac{3}{\left(\frac{Q'}{\Delta}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{Q'}{\Delta}\right)^2} = \left(\frac{2\Delta}{Q'}\right)^2.$$

Поэтому

$$\lambda_S(\Delta) \leqslant \frac{2\Delta}{Q'}. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$g_S(\beta) = Q\beta + \Delta\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'} + \det S \cdot \beta\right)^2},$$

для которой

$$g'_S(\beta) = Q + \Delta\frac{\det S \cdot \frac{P'}{Q'} + \beta}{\sqrt{1 + \left(\det S \cdot \frac{P'}{Q'} + \beta\right)^2}} > Q - \Delta > 0.$$

Это возрастающая функция и

$$g_S(0) = \Delta\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2}.$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Замечание 6. *Уравнение* $g_S(\beta) = \frac{1}{Q'}$ *имеет единственный (неотрицательный) корень* $\eta = \eta_S(\Delta)$ *только в случае*

$$\Delta\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2} \leqslant \frac{1}{Q'} \quad \Leftrightarrow \quad S \in \mathcal{M}(\Delta^{-1}).$$

Подытоживая вышесказанное и обращаясь к определению $I_\Delta(S)$, приходим к следующему утверждению.

Замечание 7. *Множество* $I_\Delta(S)$ *непустое только для* $S \in \mathcal{M}(\Delta^{-1})$ *и при* $S \in \mathcal{M}_+(\Delta^{-1})$ *оно совпадает с*

$$\left[\frac{P'}{Q'}, \frac{P'}{Q'} + \lambda_S(\Delta)\right) \cap \left[\frac{P'}{Q'}, \frac{P'}{Q'} + \eta_S(\Delta)\right],$$

а при $S \in \mathcal{M}_-(\Delta^{-1})$ *— с*

$$\left(\frac{P'}{Q'} - \lambda_S(\Delta), \frac{P'}{Q'}\right] \cap \left[\frac{P'}{Q'} - \eta_S(\Delta), \frac{P'}{Q'}\right].$$

Лемма 4. *Множества* $I_\Delta(S)$ *попарно не пересекаются и*

$$\bigcup_{S \in \mathcal{M}(\Delta^{-1})} I_\Delta(S) = \left[\frac{\Delta}{\sqrt{1-\Delta^2}}, 1\right].$$

Доказательство. Первая часть утверждения леммы непосредственно следует из замечания 5. Далее, пусть $P_j = P_j(\alpha)$ и $Q_j = Q_j(\alpha)$ — числитель и знаменатель j-ой подходящей дроби к числу $\alpha \in (0, 1]$. Так как последовательность

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha Q_1 - P_1, \ldots, \alpha_j = \alpha Q_j - P_j, \ldots \tag{11}$$

по абсолютной величине монотонно убывает к нулю, то существует

$$i = i_\Delta(\alpha) = \min\left\{ j \;\middle|\; |\alpha Q_j - P_j| < \Delta\sqrt{1+\alpha^2} \right\}.$$

Если $i = 1$, то (напомним, что $P_1 = 0$ и $Q_1 = 1$)

$$|\alpha Q_1 - P_1| = \alpha < \Delta\sqrt{1+\alpha^2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \left(0, \frac{\Delta}{\sqrt{1-\Delta^2}}\right).$$

Для всех остальных α всегда $i \geqslant 2$ и при этом $|\alpha Q_{i-1} - P_{i-1}| \geqslant \Delta\sqrt{1+\alpha^2}$. Принимая во внимание знакопеременность последовательности (11) и замечание 6, а также положив

$$S = \begin{pmatrix} P_{i-1} & P_i \\ Q_{i-1} & Q_i \end{pmatrix},$$

получим вторую часть утверждения леммы 4. □

2 Вспомогательные преобразования

В соответствии с ранее введенными обозначениями положим

$$\xi_S(\alpha) = \chi_{[u_1,u_2]}\left(\frac{\alpha Q' - P'}{\Delta\sqrt{1+\alpha^2}}\right),$$
$$I_\Delta^{(\alpha_0)}(S) = [0, \alpha_0] \cap I_\Delta(S).$$

Переходя к переменной $\alpha = \operatorname{tg}\varphi \in [0, 1]$ в интеграле, определяющем $\Phi(\Delta)$ (см. формулировку теоремы во введении), и применяя лемму 4, находим

$$\Phi(\Delta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{S\in\mathcal{M}(\Delta^{-1})}\int_{I_\Delta^{(\alpha_0)}(S)} \chi_{[0,t_0]}\left(\frac{\Delta(Q' + \alpha P')}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\xi_S(\alpha)\frac{d\alpha}{1+\alpha^2} + O(\Delta).$$

Так как

$$\left(\frac{Q' + \alpha P'}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha Q' - P'}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 = (P')^2 + (Q')^2,$$

то для любого $\alpha \in I_\Delta(S)$

$$(P')^2 + (Q')^2 - \Delta^2 < \left(\frac{Q' + \alpha P'}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 \leqslant (P')^2 + (Q')^2.$$

Поэтому, если

$$(t_0\Delta^{-1})^2 < (P')^2 + (Q')^2$$

и для некоторого $\alpha \in I_\Delta(S)$

$$\chi_{[0,t_0]}\left(\frac{\Delta(Q' + \alpha P')}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) = 1,$$

то

$$(t_0\Delta^{-1})^2 < (P')^2 + (Q')^2 < (t_0\Delta^{-1})^2 + \Delta^2 \leqslant (t_0\Delta^{-1})^2 + 1/8.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой

$$\int_{I_\Delta^{(\alpha_0)}(S)} d\alpha \leqslant \int_{I_\Delta(S)} d\alpha \leqslant \lambda_S(\Delta) \leqslant \frac{2\Delta}{Q'}$$

(см. также (10)), получаем равенство

$$\Phi(\Delta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{S\in\mathcal{M}(t_0\Delta^{-1})}\int_{I_\Delta^{(\alpha_0)}(S)}\xi_S(\alpha)\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}+R_1,$$

где

$$R_1\ll\Delta+\sum_{\substack{\left(\frac{t_0}{\Delta}\right)^2\leqslant(P')^2+(Q')^2<\left(\frac{t_0}{\Delta}\right)^2+\frac{1}{8}\\ 1\leqslant P'\leqslant Q'}}\frac{\Delta}{Q'}\ll\Delta+\frac{\Delta}{\frac{t_0}{\Delta}+\frac{1}{2}}\sum_{Q'\leqslant\frac{t_0}{\Delta}+\frac{1}{2}}1\ll\Delta.$$

В соответствии с оценкой (10), для $\alpha\in I_\Delta(S)$ по теореме Лагранжа

$$\left|\frac{1}{1+\alpha^2}-\frac{1}{1+(P'/Q')^2}\right|\leqslant\left|\alpha-\frac{P'}{Q'}\right|\leqslant\lambda_S(\Delta)\leqslant\frac{2\Delta}{Q'}.$$

Следовательно,

$$\Phi(\Delta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{S\in\mathcal{M}(t_0\Delta^{-1})}\frac{1}{1+(P'/Q')^2}\int_{I_\Delta^{(\alpha_0)}(S)}\xi_S(\alpha)d\alpha+R_2,$$

где

$$R_2\ll\Delta+\sum_{1\leqslant P'\leqslant Q'\leqslant\Delta^{-1}}\frac{\Delta}{Q'}\cdot\frac{\Delta}{Q'}\ll\Delta.$$

Опираясь на неравенство

$$\left|\alpha-\frac{P'}{Q'}\right|\leqslant\frac{2\Delta}{Q'}\qquad\forall\alpha\in I_\Delta(S)$$

и положив

$$\mathcal{M}_*^{(\alpha_0)}(X)=\{S\in\mathcal{M}_*(X)\mid P'\leqslant\alpha_0Q'\},$$

получим, что

$$\Phi(\Delta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{S\in\mathcal{M}^{(\alpha_0)}(t_0\Delta^{-1})}\frac{1}{1+(P'/Q')^2}\int_{I_\Delta(S)}\xi_S(\alpha)d\alpha+R_3,\tag{12}$$

где

$$R_3\ll\Delta+\sum_{\substack{1\leqslant P'\leqslant Q'\leqslant\Delta^{-1}\\ |\alpha_0Q'-P'|\leqslant2\Delta}}\frac{\Delta}{Q'}\ll\Delta+\Delta\sum_{Q'\leqslant\Delta^{-1}}\frac{1}{Q'}\ll\Delta\cdot\log\frac{1}{\Delta}.$$

Заметим что:

1) для $0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant1$

$$\Phi(\ldots,u_1,u_2)=\Phi(\ldots,0,u_2)-\Phi(\ldots,0,u_1);$$

2) для $-1\leqslant u_1\leqslant0\leqslant u_2\leqslant1$

$$\Phi(\ldots,u_1,u_2)=\Phi(\ldots,u_1,0)+\Phi(\ldots,0,u_2);$$

3) для $-1\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant0$

$$\Phi(\ldots,u_1,u_2)=\Phi(\ldots,u_1,0)-\Phi(\ldots,u_2,0).$$

Поэтому теорему достаточно доказать только в случаях $u_1 = 0$ и $u_2 = u_0$, или $u_1 = -u_0$ и $u_2 = 0$ с $u_0 \in [0, 1]$. При этом в соответствии с равенством (12)

$$\Phi_+(\Delta) = \Phi(\Delta; \varphi_0, t_0, 0, u_0) = \widetilde{\Phi}_+(\Delta) + O\left(\Delta \log \frac{1}{\Delta}\right) \tag{13}$$

и

$$\Phi_-(\Delta) = \Phi(\Delta; \varphi_0, t_0, -u_0, 0) = \widetilde{\Phi}_-(\Delta) + O\left(\Delta \log \frac{1}{\Delta}\right), \tag{14}$$

где

$$\widetilde{\Phi}_\pm(\Delta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S \in \mathcal{M}_\pm^{(\alpha_0)}(t_0 \Delta^{-1})} \frac{\min\{\lambda_S(u_0\Delta), \eta_S(\Delta)\}}{1 + (P'/Q')^2}.$$

Из уравнения, определяющего $\lambda_S(\Delta)$, и оценки (10) следует, что

$$\lambda_S(\Delta) = \widetilde{\lambda}_S(\Delta) + O\left(\left(\frac{\Delta}{Q'}\right)^2\right) \qquad \text{с} \qquad \widetilde{\lambda}_S(\Delta) = \frac{\Delta}{Q'}\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2}.$$

Аналогично, для $\eta_S(\Delta) \leqslant \lambda_S(\Delta)$ выполняется асимптотическое равенство

$$\eta_S(\Delta) = \widetilde{\eta}_S(\Delta) + O\left(\frac{\Delta^2}{QQ'}\right)$$

с

$$\widetilde{\eta}_S(\Delta) = \frac{1}{QQ'} - \frac{\Delta}{Q}\sqrt{1 + \left(\frac{P'}{Q'}\right)^2}.$$

Поэтому

$$\min\{\lambda_S(u_0\Delta), \eta_S(\Delta)\} = \min\left\{\widetilde{\lambda}_S(u_0\Delta), \widetilde{\eta}_S(\Delta)\right\} + O\left(\frac{\Delta^2}{QQ'}\right).$$

Положив

$$\Psi(x, y) = \Psi(Q'; x, y) = \frac{\min\left\{u_0\Delta Q'\sqrt{1 + x^2}, \frac{1}{y}(1 - \Delta Q'\sqrt{1 + x^2})\right\}}{1 + x^2},$$

окончательно находим

$$\widetilde{\Phi}_\pm(\Delta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S \in \mathcal{M}_\pm^{(\alpha_0)}(t_0 \Delta^{-1})} \frac{1}{(Q')^2} \Psi\left(\frac{P'}{Q'}, \frac{Q}{Q'}\right) + R_4, \tag{15}$$

где

$$R_4 \ll \sum_{1 \leqslant Q \leqslant Q' \leqslant \Delta^{-1}} \frac{\Delta^2}{QQ'} \ll \Delta^2 \log^2 \frac{1}{\Delta} \ll \Delta.$$

Введем функцию

$$\Psi_0(x, y) = \Psi_0(Q'; x, y) = \begin{cases} \Psi(Q'; x, y), & \text{если } x \leqslant \alpha_0, \sqrt{1 + x^2} \leqslant t_0(\Delta Q')^{-1}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для фиксированного значения $Q' = q$ числа P' и Q должны быть решениями сравнения $ab \equiv \pm 1 \pmod q$. Поэтому величины $\widetilde{\Phi}_{\pm}(\Delta)$ могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_{\pm}(\Delta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{q \leqslant \Delta^{-1}} \frac{1}{q^2} \sum_{a,b=1}^{q} \delta_q(ab \pm 1) \Psi_0\left(\frac{a}{q}, \frac{b}{q}\right) + O(\Delta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{q \leqslant \Delta^{-1}} \frac{1}{q^2} W_{\pm}(q) + O(\Delta), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$W_{\pm}(q) = \sum_{a,b=1}^{q} \delta_q(ab \pm 1) \Psi_0\left(\frac{a}{q}, \frac{b}{q}\right). \tag{17}$$

3 Применение оценок сумм Клостермана

Далее предполагается, что ε — сколь угодно малая положительная константа. С помощью оценок сумм Клостермана, принадлежащих Эстерману [5], стандартным образом доказывается следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть q, k, l — натуральные числа. Тогда*

$$\sum_{a=1}^{k} \sum_{b=1}^{l} \delta_q(ab \pm 1) = \frac{\varphi(q)}{q^2} kl + O_{\varepsilon}(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Доказательство см. в [1].

Лемма 6. *Пусть q — натуральное, $q \ll \Delta^{-1}$. Тогда для суммы $W_{\pm}(q)$, заданной равенством (17), справедлива асимптотическая формула*

$$W_{\pm}(q) = \varphi(q) \int_0^1 \int_0^1 \Psi_0(q; x, y)\, dx\, dy + O_{\varepsilon}(\Delta \cdot q^{\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

Доказательство. Применив к сумме $W_{\pm}(q)$ преобразование Абеля

$$\sum_{n=1}^{q} f(n) g(n) = g(q+1) \sum_{n=1}^{q} f(n) - \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{n=1}^{k} f(n)\right) (g(k+1) - g(k))$$

последовательно по переменным a и b (сначала выбираем $f(a) = \delta_q(ab-1)$, $g(a) = \Psi_0(a/q, b/q)$, а затем $f(b) = \sum\limits_{a=1}^{k} \delta_q(ab-1)$, $g(b) = \Delta_{1,0}\Psi_0(a/q, b/q)$), находим

$$W_{\pm}(q) = \sum_{k,l=1}^{q} \Delta_{1,1}\Psi_0(k/q, l/q) \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=1}^{l} \delta_q(ab-1).$$

Применяя к двойной внутренней сумме лемму 5, получаем

$$\begin{aligned} W_{\pm}(q) &= \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{k,l=1}^{q} \Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) kl + O_{\varepsilon}(A \cdot q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) = \\ &= \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{k,l=1}^{q} \Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q}, \frac{l}{q}\right) \sum_{u=1}^{k} \sum_{v=1}^{l} 1 + O_{\varepsilon}(A \cdot q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \end{aligned}$$

где

$$A=\sum_{k,l=1}^{q}\left|\Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q},\frac{l}{q}\right)\right|.$$

Делая суммирование по a и b внешним, а потом суммируя по k и l, находим

$$W_{\pm}(q)=\frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{a,b=1}^{q}\Psi_0\left(\frac{a}{q},\frac{b}{q}\right)+O_\varepsilon(A\cdot q^{\frac{1}{2}+\varepsilon})=$$
$$=\varphi(q)\int_0^1\int_0^1\Psi_0(x,y)dx\,dy+O_\varepsilon(A\cdot q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}+\Delta\cdot q).$$

Из определения функции $\Psi_0(x,y)$ немедленно следует, что

$$\Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q},\frac{l}{q}\right)\geqslant 0$$

во всех точках $\left(\frac{k}{q},\frac{l}{q}\right)$, за исключением быть может тех, для которых кривая

$$u_0\Delta q\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{y}(1-\Delta q\sqrt{1+x^2})\qquad(0\leqslant x,y\leqslant 1)$$

пересекает квадрат $[k/q,(k+1)/q]\times[l/q,(l+1)/q]$. Таких точек $O(q)$ и в каждой из них

$$\Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q},\frac{l}{q}\right)\ll\Delta_{1,0}\Psi_0\left(\frac{k}{q},\frac{l}{q}\right)\ll\Delta.$$

Поэтому

$$A=\sum_{k,l=1}^{q}\Delta_{1,1}\Psi_0\left(\frac{k}{q},\frac{l}{q}\right)+O(\Delta\cdot q)=$$
$$=\Psi_0(0,0)-\Psi_0\left(\frac{q+1}{q},0\right)-\Psi_0\left(0,\frac{q+1}{q}\right)+\Psi_0\left(\frac{q+1}{q},\frac{q+1}{q}\right)+O(\Delta\cdot q)=O(\Delta\cdot q)$$

и

$$W_{\pm}(q)=\varphi(q)\int_0^1\int_0^1\Psi_0(q;x,y)dx\,dy+O_\varepsilon(\Delta\cdot q^{\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

□

Теперь у нас есть все необходимое для доказательства основного результата. С учетом формул (13) и (14) достаточно проверить, что

$$\widetilde{\Phi}_{\pm}(\Delta)=\int_0^{\alpha_0}\frac{dx}{1+x^2}\int_0^{t_0}dr\int_0^{u_0}\rho(r,u)\,du+O_\varepsilon(\Delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon}),$$

где $\rho(r,u)$ определено в формулировке теоремы.

Подставляя результат леммы 6 в формулу (16), находим

$$\widetilde{\Phi}_{\pm}(\Delta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{q\leqslant\Delta^{-1}}\frac{\varphi(q)}{q^2}\int_0^1\int_0^1\Psi_0(q;x,y)dx\,dy+O_\varepsilon(\Delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon})=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{d\leqslant\Delta^{-1}}\frac{\mu(d)}{d^2}\sum_{n\leqslant(d\Delta)^{-1}}\int_0^1\int_0^1\frac{\Psi_0(nd;x,y)}{n}dx\,dy+O_\varepsilon(\Delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon}).\qquad(18)$$

Преобразуем внутреннюю сумму, пользуясь определением функции $\Psi_0(x,y)$:

$$\sum_{n\leqslant(d\Delta)^{-1}}\int_0^1\int_0^1\frac{\Psi_0(nd;x,y)}{n}dx\,dy=$$

$$=d\Delta\int_0^{\alpha_0}\frac{dx}{1+x^2}\int_0^1 dy\sum_{n\leqslant(d\Delta\sqrt{1+x^2})^{-1}}\min\left\{u_0\sqrt{1+x^2},\frac{1}{y}\left(\frac{1}{d\Delta n}-\sqrt{1+x^2}\right)\right\}.$$

Заменяя сумму по n интегралом и вводя новую переменную интегрирования $r=nd\Delta\sqrt{1+x^2}$, получаем

$$\sum_{n\leqslant(d\Delta)^{-1}}\int_0^1\int_0^1\frac{\Psi_0(nd;x,y)}{n}dx\,dy=\int_0^{\alpha_0}\frac{dx}{1+x^2}\int_0^{t_0}dr\int_0^1 dy\min\left\{u_0,\frac{1}{y}\left(\frac{1}{r}-1\right)\right\}+O(d\Delta)=$$

$$=\frac{\pi^3}{3}\int_0^{\alpha_0}\frac{dx}{1+x^2}\int_0^{t_0}dr\int_0^{u_0}\rho(r,u)du+O(d\Delta).$$

Подставляя последнюю формулу в (18), находим:

$$\widetilde{\Phi}_\pm(\Delta)=\frac{\pi^2}{6}\int_0^{\alpha_0}\frac{dx}{1+x^2}\int_0^{t_0}dr\int_0^{u_0}\rho(r,u)\,du\cdot\sum_{d\leqslant\Delta^{-1}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O_\varepsilon(\Delta^{\frac12-\varepsilon})=$$

$$=\int_0^{\alpha_0}\frac{dx}{1+x^2}\int_0^{t_0}dr\int_0^{u_0}\rho(r,u)\,du+O_\varepsilon(\Delta^{\frac12-\varepsilon}).$$

Теорема, сформулированная во введении, полностью доказана.

Список литературы

[1] Авдеева М. О. *О статистиках неполных частных конечных цепных дробей.* — Функц. анализ и его прил., 2004, т. 38, вып. 2, 1–11.

[2] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа*, т. 2, — М.: Наука, 1978.

[3] Хинчин А. Я. *Цепные дроби.* — М.: Наука, 1978.

[4] Boca F. P., Gologan R. N., Zaharescu A., *The statistics of the trajectory of a certain billiard in a flat two-torus*, Comm. Math. Phys., v. 240 (2003), № 1-2, 53–73.

[5] Estermann T. *On Kloosterman's sum.* — Mathematika, 1961, v. 8, 83–86.

Быковский Виктор Алексеевич
680000, Хабаровск, ул. Московская, д. 9, кв. 59
+7-(4212)-43-76-29 (д), +7-(4212)-32-46-76 (р)
vab@iam.khv.ru

Устинов Алексей Владимирович
680000, Хабаровск, ул. Запарина, д. 15, кв. 4
+7-(4212)-21-24-54 (д), +7-(4212)-31-24-91 (р)
ustinov@iam.khv.ru