Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида

А. В. Устинов*

1 Обозначения

1. Запись $[x_0; x_1, \ldots, x_s]$ означает цепную (непрерывную) дробь
$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \ddots + \cfrac{1}{x_s}}$$
длины s с формальными переменными x_0, x_1, …, x_s.

2. Для рационального r обычно (если не сделано дополнительных оговорок) будет использоваться каноническое разложение в цепную дробь $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ длины $s = s(r)$, где $t_0 = [r]$ (целая часть r), t_1, …, t_s — неполные частные (натуральные числа) и $t_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$. Через $s_1(r)$ будем обозначать сумму неполных частных числа r: $s_1(r) = t_0 + t_1 + \ldots + t_s$. Для r, записанного в виде несократимой дроби, через $q(r)$ будем обозначать знаменатель этой дроби.

3. Если A — некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае.

4. Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q:
$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod p] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

5. Знак звездочки в двойных суммах вида
$$\sum_n \sum_m{}^* \ldots$$
означает, что переменные, по которым проводится суммирование, связаны дополнительным условием $(m, n) = 1$.

6. Конечные разности функции $a(u, v)$:
$$\Delta_{1,0} a(u,v) = a(u+1,v) - a(u,v), \quad \Delta_{0,1} a(u,v) = a(u,v+1) - a(u,v),$$
$$\Delta_{1,1} a(u,v) = \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0} a(u,v)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1} a(u,v)).$$

7. Сумма степеней делителей натурального q:
$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

*Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070 и проекта ДВО РАН 06-III-A-01-017

8. Дилогарифм Эйлера

$$\mathrm{Li}_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}=-\int_0^z\frac{\log(1-z)}{z}dz.$$

2 Введение

Детальный анализ алгоритма Евклида приводит к различным задачам о статистических свойствах конечных цепных дробей (см. [6, разд. 4.5.3]). Если на вход алгоритма подается пара натуральных чисел c и d ($c<d$), то основной интерес представляет число выполняемых делений с остатком, которое совпадает с $s(c/d)$ — количеством неполных частных в цепной дроби

$$c/d=[0;t_1,\ldots,t_s].$$

Впервые вопрос о поведении величины $s(c/d)$ в среднем был исследован Хейльбронном. В 1968 г. он (см. [13]) доказал асимптотическую формулу

$$\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{1\leqslant c\leqslant d\\(c,d)=1}}s(c/d)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log d+O(\log^4\log d).$$

Позднее Портер (см. [19]) для того же среднего получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами

$$\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{1\leqslant c\leqslant d\\(c,d)=1}}s(c/d)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log d+C_P-1+O_\varepsilon(d^{-1/6+\varepsilon}),$$

где ε — любое положительное и

$$C_P=\frac{\log 2}{\zeta(2)}\left(3\log 2+4\gamma-4\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-2\right)-\frac{1}{2}$$

— константа, получившая название константы Портера (её окончательный вид был найден Ренчем, см. [16]).

При усреднении по обоим параметрам c и d вероятностными и эргодическими методами получены следующие результаты. Диксон в работе [11] показал, что для любого положительного ε найдётся такая константа $c_0>0$, что

$$\left|s(c/d)-\frac{12\log 2}{\pi^2}\log d\right|<(\log d)^{1/2+\varepsilon}$$

для всех пар чисел (c,d) лежащих в области $1\leqslant c\leqslant d\leqslant R$, за исключением, быть может, $R^2\exp(-c_0(\log R)^{\varepsilon/2})$ пар. Хенсли в статье [14] уточнил результат Диксона и доказал, что разность между величиной $s(a/b)$ и ее средним значением асимптотически имеет нормальное распределение, параметры которого можно указать явно. В частности, Хенсли доказал асимптотическую формулу для второго момента величины $s(c/d)$. Позднее Валле [20] были доказаны асимптотические формулы для математического ожидания, дисперсии и моментов более высокого порядка со степенными понижениями в остаточных членах (см. [10]).

При фиксированном значении d, для дисперсии величины $s(c/d)$ известна лишь правильная с точностью до константы оценка, принадлежащая Быковскому [2]:

$$\frac{1}{d}\sum_{c=1}^{d}\left(s\left(\frac{c}{d}\right)-\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log d\right)^2\ll\log d.$$

Она получена методами аналитической теории чисел, опирающимися на оценки сумм Клостермана.

В настоящей работе с использованием подхода, предложенного в [2], исследуется среднее значение $s(c/d)$

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s(c/d) \tag{1}$$

при $R \geqslant 2$ Для него доказывается асимптотическая формула с лучшим, чем можно получить из результата Портера, понижением в остаточном члене, а именно:

$$E(R) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)} \log R + B + O(R^{-1} \log^5 R), \tag{2}$$

где

$$B = C_P - 1 + \frac{\log 2}{\zeta(2)} \left(2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1 \right).$$

Кроме того, для дисперсии

$$D(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} (s(c/d) - E(R))^2 \tag{3}$$

доказывается формула

$$D(R) = \delta_1 \cdot \log R + \delta_0 + O_\varepsilon(R^{-1/4+\varepsilon}), \tag{4}$$

где $\delta_1 > 0$, δ_0 — абсолютные константы и ε — сколь угодно малое положительное число. Отметим, что в соответствующем результате работы [10] утверждается лишь существование некоторой константы $\gamma > 0$ вместо $1/4$ в показателе остаточного члена.

Автор выражает благодарность В. А. Быковскому за обсуждение полученных результатов и полезные советы.

3 О цепных дробях

Следуя работе [2], обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix}$$

с определителем $\det S = \pm 1$, у которых

$$1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad 0 \leqslant P \leqslant Q, \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q'.$$

Для вещественного $R > 0$ через $\mathcal{M}(R)$ будем обозначать конечное подмножество в $\mathcal{M}$, состоящее из всех матриц S с дополнительным условием $Q' \leqslant R$.

Отметим два свойства множества $\mathcal{M}$ (см. [2]).

1°. Каждому конечному (непустому) набору натуральных чисел $(q_1, \ldots, q_s)$ можно поставить в соответствие матрицу $S \in \mathcal{M}$ по правилу

$$S = S(q_1, \ldots, q_s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_s \end{pmatrix}.$$

При этом

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix},$$

где
$$\frac{P}{Q}=[0;q_1,\ldots,q_{s-1}] \quad \text{и} \quad \frac{P'}{Q'}=[0;q_1,\ldots,q_s]$$
(здесь последние неполные частные могут быть и единицами).

Отображение
$$(q_1,\ldots,q_s)\to S(q_1,\ldots,q_s)$$
является биекцией между множеством всех конечных наборов натуральных чисел и множеством $\mathcal{M}$.

2°. Если $Q<Q'$ и $(Q,Q')=1$, то имеются ровно две пары
$$(P,P') \quad \text{и} \quad (Q-P,Q'-P'),$$
дополняющие в качестве первой строки вторую (Q,Q') до матрицы из $\mathcal{M}$. Кроме того, если
$$\frac{Q}{Q'}=[0;q_s,\ldots,q_1]=[0;q_s,\ldots,q_1-1,1] \qquad (q_1\geqslant 2),$$
то соответствующие матрицы имеют вид
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&q_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0&1\\1&q_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P&P'\\Q&Q'\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&q_1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&q_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0&1\\1&q_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q-P&Q'-P'\\Q&Q'\end{pmatrix}. \tag{5}$$
При $Q=Q'$ существует только одна матрица $S=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ из $\mathcal{M}$.

В следующей лемме для рациональных чисел $r\in(0,1]$ будет использоваться (единственное) разложение в цепную дробь с единицей на конце:
$$r=[0;t_1,\ldots,t_s,1] \qquad (s\geqslant 0).$$
Оно удобнее канонического разложения тем, что единообразно описывает все такие числа, включая $r=1$.

Лемма 1. *Пусть c и d — натуральные числа, $1\leqslant c\leqslant d$ и*
$$\frac{c}{d}=[0;t_1,\ldots,t_{s-1},t_s,1] \qquad (s\geqslant 0). \tag{6}$$
Тогда:

1) уравнение
$$S\cdot\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}, \tag{7}$$
в котором неизвестными являются числа k, $l\in\mathbb{N}$ $(k\leqslant l)$ и матрица $S\in\mathcal{M}$, имеет s решений;

2) уравнение
$$S_1\cdot S_2\cdot\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \tag{8}$$
имеет $s(s-1)/2$ решений относительно неизвестных
$$k,l\in\mathbb{N},\quad 1\leqslant k\leqslant l, \qquad S_1,S_2\in\mathcal{M}.$$

Доказательство. Если $k/l = [0; q_1, \ldots, q_m, 1]$ $(m \geqslant 0)$,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_n \end{pmatrix}$$

и числа c, d определены равенством (7), то

$$\frac{c}{d} = [0; z_1, \ldots, z_n, q_1, \ldots, q_m, 1].$$

Поэтому из условий (6), (7) и свойства 1° множества $\mathcal{M}$ вытекает, что для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant s)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_j \end{pmatrix}, \qquad \frac{k}{l} = [0; t_{j+1}, \ldots, t_s, 1].$$

Значит, количество решений уравнения (7) совпадает с числом способов, которыми можно выбрать j в пределах от 1 до s и равно s.

Аналогично из условий (6) и (8) следует, что для некоторых j и r $(1 \leqslant j < r \leqslant s)$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_j \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_{j+1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_r \end{pmatrix}, \quad \frac{k}{l} = [0; t_{r+1}, \ldots, t_s, 1].$$

Поэтому количество решений уравнения (8) равно числу пар (j, r) таких, что $1 \leqslant j < r \leqslant s$, то есть $s(s-1)/2$. □

4 О математическом ожидании и дисперсии

Для действительного $R \geqslant 1$ положим

$$\mathcal{L}_1(R) = \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s(c/d), \qquad \mathcal{L}_2(R) = \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s^2(c/d).$$

Тогда, в соответствии с (1) и (3),

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \cdot \mathcal{L}_1(R), \tag{9}$$

$$D(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \cdot \mathcal{L}_2(R) - E^2(R). \tag{10}$$

Поэтому, чтобы доказать основные результаты (2) и (4), для сумм $\mathcal{L}_1(R)$ и $\mathcal{L}_2(R)$ нужно будет получить асимптотические формулы с 2 и 3 значащими членами соответственно.

Через $\lambda(d)$ обозначим число решений уравнения

$$kQ + lQ' = d$$

относительно неизвестных k, l, Q и Q' таких, что

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad (Q, Q') = 1. \tag{11}$$

Через $N^*(R)$ обозначим число решений неравенства

$$kQ + lQ' \leqslant R \tag{12}$$

относительно неизвестных k, l, Q, Q', связанных условиями (11); другими словами

$$N^*(R) = \sum_{d \leqslant R} \lambda(d).$$

Соответственно, через $M^*(R)$ обозначим число решений неравенства

$$k(aQ+bQ')+l(mQ+nQ')\leqslant R, \tag{13}$$

в котором

$$1\leqslant k\leqslant l,\quad 1\leqslant Q\leqslant Q',\quad (Q,Q')=1,\quad \begin{pmatrix} a & m\\ b & n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}. \tag{14}$$

Следующее утверждение сводит задачу о подсчете величин $E(R)$ и $D(R)$ к исследованию неравенств (12) и (13).

Лемма 2. *Пусть* $R\geqslant 1$. *Тогда*

$$\mathcal{L}_1(R)=2N^*(R)-\left[\frac{R}{2}\right]\cdot\left[\frac{R+1}{2}\right], \tag{15}$$

$$\mathcal{L}_2(R)=4M^*(R)+\left[\frac{R}{2}\right]\cdot\left[\frac{R+1}{2}\right]. \tag{16}$$

Доказательство. Из первого пункта леммы 1 вытекает, что сумма

$$\sum_{c\leqslant d}s(c/d)$$

равна числу решений уравнения

$$\begin{pmatrix} * & *\\ Q & Q'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k\\ l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} *\\ d\end{pmatrix}, \tag{17}$$

где

$$\begin{pmatrix} * & *\\ Q & Q'\end{pmatrix}\in\mathcal{M},\quad 1\leqslant k\leqslant l.$$

Если $Q'\geqslant 2$, то по свойству 2° множества $\mathcal{M}$ для пары (Q,Q') существует ровно две пары чисел (P,P'), которые дополняют строку (Q,Q') до матрицы из $\mathcal{M}$. Значит, в этом случае число решений уравнения (17) равно $2\lambda(d)$. Если же $Q'=1$, то $Q=1$, и число решений уравнения (17) совпадает с числом решений уравнения $k+l=d$, где $1\leqslant k\leqslant l$, то есть равно $[d/2]$.

Таким образом,

$$\sum_{d\leqslant R}\sum_{c\leqslant d}s(c/d)=\sum_{d\leqslant R}\left(2\lambda(d)-\left[\frac{d}{2}\right]\right)=$$
$$=2\sum_{d\leqslant R}\lambda(d)-\left[\frac{R}{2}\right]\cdot\left[\frac{R+1}{2}\right]=2N^*(R)-\left[\frac{R}{2}\right]\cdot\left[\frac{R+1}{2}\right].$$

Тем самым первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства равенства (16) заметим, что по лемме 1 сумма

$$\frac{1}{2}\sum_{c\leqslant d}s(c/d)(s(c/d)-1)$$

совпадает с числом решений уравнения

$$\begin{pmatrix} * & *\\ Q & Q'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & m\\ b & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k\\ l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} *\\ d\end{pmatrix}, \tag{18}$$

где
$$\begin{pmatrix} * & * \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \quad 1 \leqslant k \leqslant l.$$
Если $Q' \geqslant 2$, то по свойству 2° множества $\mathcal{M}$ число решений уравнения (18) равно удвоенному числу решений уравнения
$$k(aQ + bQ') + l(mQ + nQ') = d$$
с ограничениями (14). Если же $Q' = 1$, то $Q = 1$, $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, и уравнение (18) имеет вид
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} * & * \\ a+b & m+n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix}. \tag{19}$$
По свойству 2° (см. равенство (5)) множество пар $(a+b, m+n)$ совпадает с множеством всех пар (Q, Q') таких, что $1 \leqslant Q < Q'$ и $(Q, Q') = 1$. Таким образом, уравнение (19) может быть записано в виде
$$kQ + lQ' = d,$$
где
$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant Q < Q', \quad (Q, Q') = 1.$$
Число решений такого уравнения равно $\lambda(d) - [d/2]$. Значит,
$$\frac{1}{2} \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s(c/d)(s(c/d) - 1) = 2M^*(R) - \sum_{d \leqslant R} \left(\lambda(d) - \left[\frac{d}{2} \right] \right) =$$
$$= 2M^*(R) - N^*(R) + \left[\frac{R}{2} \right] \cdot \left[\frac{R+1}{2} \right].$$
Отсюда
$$\mathcal{L}_2(R) = 4M^*(R) + \mathcal{L}_1(R) - 2N^*(R) + 2 \left[\frac{R}{2} \right] \cdot \left[\frac{R+1}{2} \right].$$
Подставляя в последнюю формулу значение $\mathcal{L}_1(R)$ из (15), получаем нужную формулу для суммы $\mathcal{L}_2(R)$. □

5 Вспомогательные утверждения

Лемма 3. *Пусть $\alpha = p(\alpha)/q(\alpha)$ — рациональное число, β, a, b — действительные, $a \leqslant b$ и $f(x) = \alpha x + \beta$. Тогда*
$$\sum_{a < x \leqslant b} \{f(x)\} = \frac{b-a}{2} + O\left(\left(\frac{b-a}{q(\alpha)} + 1 \right) s_1(\alpha) \right).$$

Доказательство см. в [15, § 2, теорема 2].

Лемма 4. *Для любого натурального b*
$$\sum_{a=1}^{b} s_1(a/b) \ll b \cdot \log^2(b+1).$$

Доказательство см. в [17].

Лемма 5. *Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и функции $\rho(x)$, $\sigma(x)$ определены равенствами*

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \qquad \sigma(x) = \int_0^x \rho(u)du.$$

Тогда

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x)dx.$$

Доказательство см. в [5, теорема I,1].

В основе следующего утверждения, в частных случаях доказанного в работе [1], лежат оценки сумм Клостермана, принадлежащие Эстерману [12].

Лемма 6. *Пусть $q \geqslant 1$ — натуральное и функция $a(u,v)$ задана в целых точках (u,v), где $1 \leqslant u, v \leqslant q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет неравенствам*

$$a(u,v) \geqslant 0, \quad \Delta_{1,0}a(u,v) \leqslant 0, \quad \Delta_{0,1}a(u,v) \leqslant 0, \quad \Delta_{1,1}a(u,v) \geqslant 0$$

во всех точках, где эти неравенства определены. Тогда для суммы

$$W = \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv \pm 1)a(u,v)$$

(при любом выборе знака в символе $\pm$) справедлива асимптотическая формула

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{u,v=1}^{q} a(u,v) + O(A\psi(q)\sqrt{q}),$$

где $\psi(q) = \sigma_0(q)\sigma_{-1/2}(q)\log^2(q+1)$, и $A = a(1,1)$ — наибольшее значение функции $a(u,v)$.

Доказательство см. в [7, лемма 5].

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 1 из работы [3].

Лемма 7. *Пусть $n \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 0$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[P_1, P_2] \subset [0, n]$ и при $x \in [P_1, P_2]$*

$$\frac{1}{c} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{c}$$

для некоторых $1 \leqslant w \leqslant c$. Тогда

$$\sum_{P_1<x\leqslant P_2} \sum_{1\leqslant y\leqslant f(x)} \delta_n(xy \pm 1) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{P_1<x\leqslant P_2 \\ (x,n)=1}} f(x) + O_{\varepsilon,w}((nc^{-1/3} + c^{2/3})n^{\varepsilon}).$$

Лемма 8. *При $R \geqslant 1$ для суммы*

$$\Phi(R) = \sum_{Q'\leqslant R} \sum_{Q\leqslant Q'} \frac{1}{Q'(Q+Q')} \tag{20}$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(R) = \log 2\left(\log R + \log 2 + \gamma\right) - \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{1}{R}\left(\log 2\rho(R) + \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\Phi(R) = \log 2 \sum_{Q' \leqslant R} \frac{1}{Q'} + \sigma_0 - \sum_{Q' > R} \frac{1}{Q'} \left(\sum_{Q=1}^{Q'} \frac{1}{Q+Q'} - \log 2 \right), \tag{21}$$

где

$$\sigma_0 = \sum_{Q'=1}^{\infty} \frac{1}{Q'} \left(\sum_{Q=1}^{Q'} \frac{1}{Q+Q'} - \log 2 \right). \tag{22}$$

Для суммы σ_0 методом производящих функций находится точное значение (см. [16]):

$$\sigma_0 = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{2}. \tag{23}$$

Кроме того, по лемме 5,

$$\sum_{Q' \leqslant R} \frac{1}{Q'} = \log R + \gamma + \frac{\rho(R)}{R} + O\left(\frac{1}{R^2} \right),$$
$$\sum_{Q=1}^{Q'} \frac{1}{Q+Q'} = \log 2 - \frac{1}{4Q'} + O\left(\frac{1}{(Q')^2} \right).$$

Подставляя три последних равенства в формулу (21), приходим к утверждению леммы. □

Лемма 9. *При $\xi \geqslant 2$ для суммы*

$$F(\xi) = \sum_{n<\xi} \sum_{m \leqslant n} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right) - \sum_{n<\xi} \sum_{\substack{m \leqslant n \\ m+n>\xi}} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n} \right) \tag{24}$$

справедлива асимптотическая формула

$$F(\xi) = \log 2 \left(\log \xi + \frac{\log 2}{2} + \gamma - 1 \right) + \frac{1}{2\xi}(1 - \log 2) + \frac{2 \log 2}{\xi} \cdot \rho(\xi/2) + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2} \right). \tag{25}$$

Доказательство. Заметим, что

$$F(\xi) = F_1(\xi) - F_2(\xi) + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2} \right), \tag{26}$$

где

$$F_1(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi-1} \sum_{m \leqslant nx} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right) = \Phi(\xi - 1),$$
$$F_2(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi-1} \sum_{\substack{m \leqslant n \\ m+n>\xi}} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n} \right),$$

а сумма $\Phi(R)$ определена равенством (20). По лемме 8

$$F_1(\xi) = \log 2(\log \xi + \log 2 + \gamma) - \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{1}{\xi} \left(\log 2(\rho(\xi) - 1) + \frac{1}{4} \right) + O\left(\frac{1}{\xi^2} \right).$$

Далее, по лемме 5, при $n > \xi/2$

$$\sum_{\xi-n<m \leqslant n} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n} \right) = g(n) + \frac{1}{n} \left(\log 2 + \frac{1}{2\xi} \right) - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{\xi^2(\xi - n)} \right),$$

где

$$g(n)=\frac{1}{\xi}(\log n-\log(\xi-n))+\frac{1}{n}(\log(\xi-n)-\log\xi).$$

Значит,

$$F_2(\xi)=\sum_{\xi/2<n\leqslant\xi-1}g(n)+\left(\log 2+\frac{1}{2\xi}\right)\sum_{\xi/2<n\leqslant\xi-1}\frac{1}{n}-\frac{1}{4\xi}+O\left(\frac{\log\xi}{\xi^2}\right).$$

Вновь применяя лемму 5, находим

$$\sum_{\xi/2<n\leqslant\xi-1}\frac{1}{n}=\log 2+\frac{1}{\xi}(\rho(\xi)-1-2\rho(\xi/2))+O\left(\frac{1}{\xi^2}\right),$$

$$\sum_{\xi/2<n\leqslant\xi-1}g(n)=\int_{\xi/2}^{\xi}g(n)dn+O\left(\frac{\log\xi}{\xi^2}\right).$$

После замены переменной $n=x\xi$ с учетом равенств $\mathrm{Li}_2(1)=\zeta(2)$, $\mathrm{Li}_2(1/2)=\dfrac{\zeta(2)}{2}-\dfrac{\log^2 2}{2}$ (см. [18]), получаем

$$\int_{\xi/2}^{\xi}g(n)dn=\int_{1/2}^{1}\left(\log x-\log(1-x)+\frac{\log(1-x)}{x}\right)dx=$$
$$=\left(x\log x+(1-x)\log(1-x)-\mathrm{Li}_2(x)\right)\Big|_{x=1/2}^{1}=\log 2-\frac{1}{2}\left(\zeta(2)+\log^2 2\right).$$

Следовательно,

$$F_2(\xi)=\log 2+\frac{1}{2}\left(\log^2 2-\zeta(2)\right)+\frac{\log 2}{\xi}\left(\rho(\xi)-2\rho(\xi/2)-1/2\right)-\frac{1}{4\xi}+O\left(\frac{\log\xi}{\xi^2}\right).$$

Подставляя найденные асимптотические формулы для $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ в равенство (26), приходим к утверждению леммы. $\square$

Определим четыре суммы

$$\sigma_1(\alpha,R)=\sum_{n\leqslant R}\sum_{m=1}^{n}\frac{[\alpha m+n\leqslant R]}{(\alpha m+n)^2},\qquad \sigma_2(\alpha,R)=\sum_{n\leqslant R}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(\alpha m+n)^2},$$
$$\sigma_3(\alpha,R)=\sum_{n\leqslant R}\sum_{m=1}^{n}[\alpha m+n\leqslant R],\qquad \sigma_4(\alpha,R)=\sum_{n\leqslant R}\sum_{m=1}^{n}\frac{[\alpha m+n\leqslant R]}{\alpha m+n},$$

и введем функцию

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho(nx)}{n^2}.$$

Лемма 10. *Пусть* $1\leqslant U\leqslant R/2$. *Тогда*

$$\sigma_1(\alpha,R)=\frac{1}{\alpha+1}\left(\log R+c_1(\alpha)+\frac{\alpha}{R}\left(\rho(R)+\frac{1}{2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$
$$\sigma_2(\alpha,R)=\frac{1}{\alpha+1}\left(\log R+c_2(\alpha)\frac{1}{R}+\left(\rho(R)+\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha+1}\right)\right)+O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

где

$$c_1(\alpha)=\frac{\log(\alpha+1)}{\alpha}-\frac{\zeta(2)}{2}\cdot\frac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha+1}+\gamma-1+2\alpha(\alpha+1)\int_0^1\frac{h(\xi)}{(\alpha\xi+1)^3}d\xi, \tag{27}$$
$$c_2(\alpha)=c_1(\alpha)-\frac{\log(\alpha+1)}{\alpha}+1.$$

Кроме того, для рационального $\alpha \in (0,1]$ со знаменателем $q(\alpha)$

$$\sigma_3(\alpha,R) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)} - \frac{\alpha R}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R}{q(\alpha)}+1\right)s_1(\alpha)\right),$$
$$\sigma_4(\alpha,R) = \frac{R}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\log R + O\left(\left(\frac{\log R}{q(\alpha)}+1\right)s_1(\alpha)\right).$$

Доказательство. Для вычисления $\sigma_1(\alpha,R)$ воспользуемся леммой 5:

$$\begin{aligned}\sigma_1(\alpha,R) &= \sum_{n\leqslant \frac{R}{\alpha+1}}\sum_{m\leqslant n}\frac{1}{(\alpha m+n)^2} + \sum_{\frac{R}{\alpha+1}<n\leqslant R}\sum_{m\leqslant \frac{R-n}{\alpha}}\frac{1}{(\alpha m+n)^2} = \\ &= \sum_{n\leqslant \frac{R}{\alpha+1}}\left(\int_0^n \frac{dm}{(\alpha m+n)^2} + \frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{(\alpha+1)^2}-1\right) + 2\alpha\int_0^n \frac{\rho(m)dm}{(\alpha m+n)^3}\right) + \\ &+ \sum_{\frac{R}{\alpha+1}<n\leqslant R}\left(\int_0^{(R-n)/\alpha}\frac{dm}{(\alpha m+n)^2} + \frac{\rho(R)}{R} - \frac{1}{2n^2}\right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha+1}\left(\log R + c_1(\alpha) + \frac{\alpha}{R}\left(\rho(R)+\frac{1}{2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right).\end{aligned}$$

Асимптотическая формула для суммы $\sigma_2(\alpha,R)$ проверяется аналогично.

Очевидно, что $\sigma_3(\alpha,R)$ можно переписать в виде

$$\sigma_3(\alpha,R) = \sum_{n\leqslant \frac{R}{\alpha+1}} n + \sum_{\frac{R}{\alpha+1}<n\leqslant R}\left[\frac{R-n}{\alpha}\right].$$

Применяя ко второй сумме лемму 3, находим

$$\sigma_3(\alpha,R) = \sum_{n\leqslant R} f(n) - \frac{\alpha R}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R}{q(\alpha)}+1\right)s_1(\alpha)\right),$$

где $f(n) = \min\left\{n, \frac{R-n}{\alpha}\right\}$. Применяя к сумме значений функции $f(n)$ на каждом из отрезков линейности лемму 5, получаем требуемую формулу для $\sigma_3(\alpha,R)$.

Пусть $1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_P < R$ — значения, которые принимает форма $\alpha m + n$, когда $1 \leqslant m \leqslant n$, $\alpha m + n \leqslant R$. Тогда

$$\sigma_4(\alpha,R) = \sum_{j=1}^{P}\frac{1}{\lambda_j}.$$

Применим к этой сумме преобразование Абеля в интегральной форме

$$\sum_{j=1}^{P} a_j\cdot g(\lambda_j) = A(\lambda_P)\cdot g(\lambda_P) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_P} A(t)g'(t)dt, \tag{28}$$

где

$$A(t) = \sum_{\lambda_j\leqslant t} a_j.$$

Для этого выберем $a_j = 1$ $(j = 1,\ldots,P)$, $g(t) = 1/t$. Тогда $A(t) = \sigma_3(\alpha,t)$ и

$$\sigma_4(\alpha,R) = \frac{\sigma_3(\alpha,\lambda_P)}{\lambda_P} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_P}\frac{\sigma_3(\alpha,t)}{t^2}dt.$$

Далее, так как $\lambda_1 > 1$, $\lambda_P - R \ll 1$, $\sigma_3(\alpha, R) \ll R^2$ и $\sigma_3(\alpha, \lambda_P) = \sigma_3(\alpha, R)$, то

$$\sigma_4(\alpha, R) = \frac{\sigma_3(\alpha, R)}{R} + \int_1^R \frac{\sigma_3(\alpha, t)}{t^2} dt + O(1) =$$
$$= \frac{R}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \log R + O\left(\left(\frac{\log R}{q(\alpha)} + 1\right) s_1(\alpha)\right).$$

□

Лемма 11. *Справедливо равенство*

$$\int_0^1 \frac{c_1(\alpha)}{\alpha+1} d\alpha = \log 2\left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2}\right). \tag{29}$$

Доказательство. Если $F(x) = \int f(x)dx$, то

$$\int_0^1 \rho(nx) f(x) dx = n \int_0^1 F(x) dx - {\sum_{k=0}^{n}}' F\left(\frac{k}{n}\right)$$

(здесь штрих в сумме означает, что при $k = 0$ и при $k = n$ слагаемые берутся с коэффициентом $1/2$). Таким образом вычисление интеграла с функцией $h(\xi)$ выражается через сумму (22) и сводится к равенству (23):

$$\int_0^1 \frac{h(x)}{(x+1)^2} dx = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q}\left(\frac{1}{q+1} + \ldots + \frac{1}{2q} - \log 2 + \frac{1}{4q}\right) =$$
$$= \sigma_0 + \frac{\zeta(2)}{4} = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{4}. \tag{30}$$

Остальные интегралы считаются непосредственно. □

Для матрицы $S = \left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$ через $f_S(t)$ будем обозначать функцию

$$f_S(t) = \frac{1}{(mt+n)((a+m)t + (b+n))}. \tag{31}$$

Штрих в суммах вида

$${\sum_{b,m=1}^{n}}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot \ldots$$

будет означать, что (в соответствии со свойством 2° множества $\mathcal{M}$) при $n = 1$ из двух знаков в символе $\pm$ выбирается знак “минус”, а при $n > 1$ оба знака берутся независимо; под a в таких суммах будет подразумеваться дробь $\frac{bm\pm 1}{n}$.

Для действительного $U \geqslant 1$ рассмотрим суммы

$$A_0(U) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} f_S(0), \qquad A_1(U) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} f_S(1),$$

$$B(U,t) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} f'_S(t), \qquad W_1(U) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 f_S(t) dt,$$

$$W_2(U) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \log(mt+n) \cdot f_S(t) dt, \qquad W_3(U) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 c_1\left(\frac{at+b}{mt+n}\right) \cdot f_S(t) dt.$$

Лемма 12. *При $U \geqslant 2$*

$$\begin{aligned}
A_0(U) =&\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log U + C_{A_0} + O\left(\frac{\log U}{U}\right),\\
A_1(U) =&\frac{\log 2}{\zeta(2)}\log U + C_{A_1} + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right),\\
B(U,t) =&-\frac{2\log 2}{\zeta(2)(t+1)^2}\log U + C_B(t) + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right),\\
W_1(U) =&\frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + C_1 + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right),\\
W_2(U) =&\frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\log U + C_2 + O\left(\frac{\log^6 U}{U^{1/2}}\right),\\
W_3(U) =&\frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2}\right)\log U + C_3 + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right),
\end{aligned}$$

где $C_B(t)$ — непрерывная функция от переменной t; C_{A_0}, C_{A_1}, C_1, C_2, C_3 — абсолютные константы,

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm\pm 1)\int_0^1 f_S(\xi)d\xi - 2\log^2 2\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\right). \tag{32}$$

Доказательство. Асимптотические формулы для сумм $A_0(U)$, $A_1(U)$, $B(U,t)$, $W_1(U)$ и $W_2(U)$ доказаны в работе [9] (см. лемму 6, замечание 2, следствия 1 и 2).

Сумму $W_3(U)$ запишем в виде

$$W_3(U) = \sum_{n\leqslant U} w_3(n),$$

где

$$\begin{aligned}
w_3(n) &= \sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm\pm 1)\int_0^1 c_1\left(\frac{at+b}{mt+n}\right)\frac{dt}{(mt+n)((a+m)t+(b+n))} =\\
&= \sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm\pm 1)c_1\left(\frac{b}{n}\right)\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n}+1\right)(mt+n)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

К возникшей двойной сумме нельзя непосредственно применить лемму 6, однако каждая из сумм

$$\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm\pm 1)\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n}+1\right)(mt+n)^2}\cdot C_0,$$

$$\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm\pm 1)\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n}+1\right)(mt+n)^2}\left(C_0 + c_1\left(\frac{b}{n}\right)\right)$$

при достаточно большом C_0 удовлетворяет условиям леммы 6. Следовательно,

$$\begin{aligned}
w_3(n) =&2\frac{\varphi(n)}{n^2}\sum_{b,m=1}^{n} c_1\left(\frac{b}{n}\right)\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n}+1\right)(mt+n)^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right) =\\
=&2\log 2\frac{\varphi(n)}{n^2}\int_0^1 \frac{c_1(\alpha)}{\alpha+1}d\alpha + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Далее, по формуле (29),

$$w_3(n) = 2\log^2 2\left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2}\right)\frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right).$$

Отсюда

$$W_3(U) = 2\log^2 2\left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2}\right)\sum_{n\leqslant U}\frac{\varphi(n)}{n^2} + C_3' + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right),$$

где

$$C_3' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(w_3(n) - 2\log^2 2\left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2}\right)\frac{\varphi(n)}{n^2}\right).$$

Подстановка в полученное равенство соотношения

$$\sum_{n\leqslant U}\frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}\left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + O\left(\frac{\log U}{U}\right)$$

завершает доказательство леммы. □

Лемма 13. *Пусть $R, U \geqslant 2$ и R — полуцелое число. Тогда для суммы*

$$W_4(R,U) = \sum_{S\in\mathcal{M}(U)}\sum_{q\leqslant R}\sum_{x=1}^{q}\frac{1}{q^2}f_S\left(\frac{x}{q}\right),$$

где функция $f_S(t)$ определена равенством (31), справедлива асимптотическая формула

$$W_4(R,U) = \frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\log R\log U + \left(\frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + C_1\right)\log R + C_4 +$$
$$+\frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\log 2 + \gamma - \frac{\zeta(2)}{2\log 2}\right)\log U + \frac{1}{2R}\cdot\left(\frac{\log 2}{\zeta(2)}\log U + C_{A_0} - C_{A_1}\right) + O\left(\frac{\log^5 U\cdot\log R}{U^{1/2}}\right) + O\left(\frac{\log U}{R^2}\right),$$

где C_4 — абсолютная константа и C_{A_0}, C_{A_1} — константы из леммы 12.

Доказательство. Применяя лемму 5 к функции

$$g(x) = \frac{1}{(mx+nq)((a+m)x+(b+n)q)} = \frac{1}{q^2}f_S\left(\frac{x}{q}\right),$$

получаем

$$\sum_{x=1}^{q}\frac{1}{q^2}f_S\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q}\int_0^1 f_S(t)dt + \frac{1}{2q^2}(f(1)-f(0)) - \frac{1}{q^2}\int_0^1\rho(qt)f_S'(t)dt.$$

Отсюда, с учетом соотношения

$$\int_0^1\rho(qt)f_S'(t)dt = -\frac{1}{q}\int_0^1\sigma(qt)f_S''(t)dt \ll \frac{1}{n^2q},$$

по лемме 5 находим

$$W_4(R,U) = (\log R + \gamma)W_1(U) + \frac{1}{2}\left(\zeta(2) - \frac{1}{R}\right)(A_1(U) - A_0(U)) - \int_0^1 h(t)B(U,t)dt + O\left(\frac{\log U}{R^2}\right).$$

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы для входящих в нее величин из леммы 12 и применяя формулу (30), получаем утверждение леммы. □

Лемма 14. *Пусть $R, U \geqslant 2$. Тогда для суммы*

$$W_5(R,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leqslant R} \sum_{k \leqslant l} \left(\frac{R}{bk+nl} - \max\left\{1, \frac{R}{(a+b)k+(m+n)l}\right\}\right) [bk+nl \leqslant R]$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_5(R,U) = \frac{\log 2}{2\zeta(2)} R^2 \log U + \frac{R^2}{2}(C_{A_0} - C_{A_1}) + O(R^2 U^{-1/2} \log^5 U) + O(RU \log^2 U),$$

где C_{A_0}, C_{A_1} — константы из леммы 12.

Доказательство. Перепишем сумму $W_5(R,U)$ в виде

$$W_5(R,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \left(\sigma_5\left(\frac{b}{n}, \frac{R}{n}\right) - \sigma_5\left(\frac{a+b}{m+n}, \frac{R}{m+n}\right), \right)$$

где, в обозначениях леммы 10

$$\sigma_5(\alpha, R) = R\sigma_4(\alpha, R) - \sigma_3(\alpha, R) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right) s_1(\alpha)\right).$$

Значит, по лемме 4,

$$W_5(R,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \left(\frac{R^2}{2n(b+n)} - \frac{R^2}{2(m+n)(a+b+m+n)} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{n^{5/2}} + \frac{R}{n}\right) s_1\left(\frac{b}{n}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{R^2}{2}(A_0(U) - A_1(U)) + O(R^{3/2}) + O(RU \log^2 U).$$

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы для $A_1(U)$ и $A_0(U)$ из леммы 12 и замечая, что $R^{3/2} \ll RU + R^2 U^{-1/2}$, приходим к требуемой формуле для $W_5(R,U)$. □

Лемма 15. *Пусть $R, U \geqslant 2$. Тогда для сумм*

$$W_6(R,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant R} \sum_{Q \leqslant Q'} \frac{1}{mQ + nQ'},$$

$$W_7(R,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant R} \sum_{Q \leqslant Q'} \frac{1}{(a+m)Q + (b+n)Q'},$$

справедливы асимптотические формулы

$$W_6(R,U) = RU + O(U \log R) + O(RU^{1/2} \log^5 U),$$
$$W_7(R,U) = \log 2 \cdot RU + O(U \log R) + O(RU^{1/2} \log^5 U).$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы для суммы $W_7(R,U)$. Асимптотическая формула для $W_6(R,U)$ проверяется аналогично.

Пользуясь равенством

$$\sum_{Q' \leqslant R} \sum_{Q \leqslant Q'} \frac{1}{(a+m)Q + (b+n)Q'} = R \int_0^1 \frac{dt}{(mt+n)(1+\frac{b}{n})} + O\left(\frac{\log R}{n}\right),$$

находим

$$W_7(R,U)=R\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&m\\b&n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\int_0^1\frac{dt}{(mt+n)(1+\frac{b}{n})}+O(U\log R).$$

Далее, по лемме 6,

$$W_7(R,U)=2\log 2\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t}dt\cdot R\sum_{n\leqslant U}\left(\frac{\varphi(n)}{n}+O\left(\frac{\psi(n)}{n^{1/2}}\right)\right)+O(U\log R).$$

Применяя равенства

$$\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t}dt=-\mathrm{Li}_2(-1)=\frac{\zeta(2)}{2},\qquad\sum_{n\leqslant U}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{U}{\zeta(2)}+O(\log U),$$

приходим к нужной формуле для суммы $W_7(R,U)$. $\square$

Лемма 16. *Пусть* $2\leqslant U,R_1\leqslant R$ *и*

$$W_8(R_1,U)=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&m\\b&n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\int_0^1\sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n},\frac{R_1}{mt+n}\right)dt.$$

Тогда

$$W_8(R_1,U)=\frac{R_1^2}{2}W_1(U)-\frac{R_1U}{2}(1-\log 2)+O(R_1U^{1/2}\log^5 R)+O(U^2\log^2 R).\tag{33}$$

Доказательство. Пусть $p\geqslant 2$ — простое число. По определению, $\sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n},\frac{R_1}{mt+n}\right)$ — невозрастающая функция от переменной t и $\sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n},\frac{R_1}{mt+n}\right)\ll R_1^2/n^2$. Следовательно,

$$W_8(R_1,U)=\frac{1}{p}\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&m\\b&n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{x=1}^{p-1}\sigma_3\left(\frac{a\frac{x}{p}+b}{m\frac{x}{p}+n},\frac{R_1}{m\frac{x}{p}+n}\right)+O\left(\frac{R_1^2\log R}{p}\right).$$

Далее, применяя лемму 10 и замечая, что

$$q\left(\frac{ax+bp}{mx+np}\right)=mx+np\geqslant np,\quad s_1\left(\frac{ax+bp}{mx+np}\right)\ll s_1\left(\frac{m}{n}\right)+s_1\left(\frac{x}{p}\right),$$

получаем следующее представление для $W_8(R_1,U)$:

$$W_8(R_1,U)=\frac{1}{2p}\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&m\\b&n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{x=1}^{p-1}\left(R_1^2\cdot f_S\left(\frac{x}{p}\right)-\left(\frac{R_1}{m\frac{x}{p}+n}-\frac{R_1}{(a+m)\frac{x}{p}+b+n}\right)\right)+$$
$$+O\left(\frac{1}{p}\sum_{n\leqslant U}\sum_{m\leqslant n}{}^{*}\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{R_1}{n^2p}+1\right)\left(s_1\left(\frac{m}{n}\right)+s_1\left(\frac{x}{p}\right)\right)\right)+O\left(\frac{R_1^2\log R}{p}\right).$$

По лемме 4

$$\frac{1}{p}\sum_{n\leqslant U}\sum_{m\leqslant n}{}^{*}\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{R_1}{n^2p}+1\right)\left(s_1\left(\frac{m}{n}\right)+s_1\left(\frac{x}{p}\right)\right)\ll\left(\frac{R_1}{p}\log R+U^2\right)\log^2 R.$$

Таким образом при p в пределах $R_1^2 \leqslant p \leqslant 2R_1^2$ получаем

$$W_8(R_1,U) = \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \left(R_1^2 \cdot f_S(t) - \left(\frac{R_1}{mt+n} - \frac{R_1}{(a+m)t+b+n} \right) \right) dt + O(U^2 \log^2 R).$$

Как и при доказательстве леммы 15 находим, что

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{dt}{mt+n} = U + O(U^{1/2} \log^5 U),$$

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{dt}{(a+m)t+b+n} = \log 2 \cdot U + O(U^{1/2} \log^5 U).$$

Следовательно,

$$W_8(R_1,U) = \frac{R_1^2}{2} W_1(U) - \frac{R_1 U}{2}(1 - \log 2) + O(R_1 U^{1/2} \log^5 R) + O(U^2 \log^2 R).$$

□

6 Асимптотическая формула для математического ожидания

Обозначим через $N(R)$ число решений неравенства

$$kQ + lQ' \leqslant R \tag{34}$$

относительно неизвестных

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant Q \leqslant Q'. \tag{35}$$

Теорема 1. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда*

$$N(R) = \frac{\log 2}{2} R^2 \log R + \frac{R^2}{4} \left(\log 2 (3 \log 2 + 4\gamma - 3) - \zeta(2) \right) + O(R \log^4 R).$$

Доказательство. Пусть U — полуцелое число, лежащее в пределах $1 \leqslant U \leqslant R$. Через $N_1(R,U)$ обозначим число решений неравенства (34) с ограничениями (35), удовлетворяющих дополнительному условию $Q' \leqslant U$. Число решений, для которых $Q' > U$ обозначим через $N_2(R,U)$. Таким образом,

$$N(R) = N_1(R,U) + N_2(R,U). \tag{36}$$

Для нахождения $N_1(R,U)$ заметим, что

$$N_1(R,U) = \sum_{d \leqslant U} N_1^*(R/d, U/d), \tag{37}$$

где

$$N_1^*(R,U) = \sum_{Q' \leqslant U} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \sum_{l \leqslant R/Q'} \sum_{k \leqslant l} [kQ + lQ' \leqslant R].$$

По лемме 3

$$\sum_{l \leqslant R/Q'} \sum_{k \leqslant l} [kQ + lQ' \leqslant R] = \sum_{l \leqslant R/(Q+Q')} l + \sum_{R/(Q+Q') \leqslant l \leqslant R/Q'} \left[\frac{R - lQ'}{Q} \right] =$$

$$= \sum_{l \leqslant R/Q'} \min\left\{ l, \frac{R - lQ'}{Q} \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Q'} - \frac{R}{Q+Q'} \right) + O\left(\left(\frac{R}{(Q')^2} + 1 \right) s_1(Q/Q') \right).$$

Далее, по лемме 5,

$$\sum_{l\leqslant R/Q'}\min\left\{l,\frac{R-lQ'}{Q}\right\}=\int_0^{R/Q'}\min\left\{l,\frac{R-lQ'}{Q}\right\}dl+O\left(\frac{Q'}{Q}\right)=\frac{R}{2Q'(Q+Q')}+O\left(\frac{Q'}{Q}\right).$$

Следовательно, по лемме 4,

$$N_1^*(R,U)=\frac{R^2}{2}\sum_{Q'\leqslant U}\sum_{Q\leqslant Q'}{}^{*}\frac{1}{Q'(Q+Q')}-\frac{RU}{2\zeta(2)}(1-\log 2)+O(R\log^3 R)+O(U^2\log^2 R).$$

По формуле (37)

$$N_1(R,U)=\frac{R^2}{2}\Phi(U)-\frac{RU}{2}(1-\log 2)+O(R\log^4 R)+O(U^2\log^2 R),$$

где функция $\Phi(R)$ задается равенством (20). Применяя лемму 8, находим окончательную формулу для $N_1(R,U)$:

$$N_1(R,U)=\frac{R^2}{2}\left(\log 2(\log U+\log 2+\gamma)-\frac{\zeta(2)}{2}\right)+\frac{R^2}{8U}-\frac{RU}{2}(1-\log 2)+ \tag{38}$$
$$+O(R\log^4 R)+O(U^2\log^2 R)+O(R^2U^{-2}).$$

Пусть $R_1=RU^{-1}$. Для величины $N_2(R,U)$ аналогично находим

$$N_2(R,U)=\sum_{d\leqslant R_1}N_2^*(R/d,U),$$

где

$$N_2^*(R,U)=\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}{}^{*}\sum_{U<Q'\leqslant R/l}\sum_{Q\leqslant Q'}[kQ+lQ'\leqslant R]=$$
$$=\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}{}^{*}\left(\sum_{U<Q'\leqslant R/(k+l)}Q'+\sum_{\max\{U,R/(k+l)\}<Q'\leqslant R/l}\left[\frac{R-lQ'}{k}\right]\right).$$

Применяя последовательно леммы 3 и 4, находим

$$N_2^*(R,U)=\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}{}^{*}\sum_{U<Q'\leqslant R/l}\min\left\{Q',\frac{R-lQ'}{k}\right\}-\frac{1}{2}\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{\substack{k\leqslant l\\k+l\leqslant R_1}}{}^{*}\left(\frac{R}{l}-\frac{R}{k+l}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{\substack{k\leqslant l\\k+l>R_1}}{}^{*}\left(\frac{R}{l}-U\right)+O(R\log^3 R)+O(R_1^2\log^2 R).$$

Отсюда

$$N_2(R,U)=\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{U<Q'\leqslant R/l}\min\left\{Q',\frac{R-lQ'}{k}\right\}-\frac{1}{2}\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{\substack{k\leqslant l\\k+l\leqslant R_1}}\left(\frac{R}{l}-\frac{R}{k+l}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{\substack{k\leqslant l\\k+l>R_1}}\left(\frac{R}{l}-U\right)+O(R\log^4 R)+O(R^2U^{-2}\log^2 R)=$$
$$=\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{U<Q'\leqslant R/l}\min\left\{Q',\frac{R-lQ'}{k}\right\}-\frac{R^2}{8U}+O(R\log^4 R)+O(R^2U^{-2}\log^2 R).$$

Далее, по лемме 5,

$$N_2(R,U) = \sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\int_U^R dQ'\int_0^{Q'} dQ\,[kQ+lQ'\leqslant R] - \frac{R^2}{8U} + O(R\log^4 R) + O(R^2U^{-2}\log^2 R).$$

Для подсчета двойного интеграла сделаем последовательно замены переменных $w = kQ + lQ'$, $\xi = wU^{-1}$, $y = Q'U^{-1}$. Тогда получим

$$\int_U^R dQ'\int_0^{Q'} dQ\,[kQ+lQ'\leqslant R] = \frac{1}{k}\int_U^R dQ'\int_0^R dw\,\left[\frac{w}{k+l}\leqslant Q'\leqslant\frac{w}{l}\right] =$$
$$= \frac{U^2}{k}\int_1^{R_1} dy\int_0^{R_1} d\xi\left[\frac{\xi}{k+l}\leqslant y\leqslant\frac{\xi}{l}\right] = \frac{U^2}{k}\int_0^{R_1}\xi\left(\frac{1}{l}-\max\left\{\frac{1}{k+l},1\right\}\right)[\xi\geqslant l]d\xi =$$
$$= \frac{U^2}{k}\int_0^{R_1}\xi\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{k+l}\right)[\xi\geqslant k+l]d\xi + \frac{U^2}{k}\int_0^{R_1}\xi\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\xi}\right)[l\leqslant\xi<k+l]d\xi.$$

Отсюда

$$N_2(R,U) = U^2\int_0^{R_1}\xi F(\xi)d\xi - \frac{R^2}{8U} + O(R\log^4 R) + O(R^2U^{-2}\log^2 R),$$

где функция $F(\xi)$ определена равенством (24). По лемме 9

$$N_2(R,U) = \frac{\log 2}{2}R^2\left(\log\frac{R}{U}+\frac{\log 2}{2}+\gamma-\frac{3}{2}\right)+\frac{RU}{2}(1-\log 2)- \tag{39}$$
$$-\frac{R^2}{8U} + O(R\log^4 R) + O(R^2U^{-2}\log^2 R) + O(U^2\log^2 R).$$

Подставляя формулы (38), (39) в равенство (36) и выбирая $U = [R^{1/2}] + 1/2$, приходим к утверждению теоремы. □

Следствие 1. *Пусть* $R \geqslant 2$. *Тогда*

$$E(R) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log R + \frac{\log 2}{\zeta(2)}\left(3\log 2 + 4\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 3\right) - \frac{3}{2} + O(R^{-1}\log^5 R).$$

Доказательство. Подставляя результат теоремы 1 в формулу обращения

$$N^*(R) = \sum_{d\leqslant R}\mu(d)N\left(\frac{R}{d}\right),$$

находим

$$N^*(R) = \frac{\log 2}{2\zeta(2)}R^2\log R + \frac{R^2}{4\zeta(2)}\left(\log 2\left(3\log 2+4\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-3\right)-\zeta(2)\right)+O(R\log^5 R).$$

Подстановка этого результата в первое утверждение леммы 2 приводит к равенству

$$\mathcal{L}_1(R) = \frac{\log 2}{\zeta(2)}R^2\log R + \frac{R^2}{2\zeta(2)}\left(\log 2\left(3\log 2+4\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-3\right)-\frac{3}{2}\zeta(2)\right)+O(R\log^5 R).$$

Подставляя его в (9), получаем утверждение следствия. □

7 Вычисление двух вспомогательных величин

Для подсчета дисперсии $D(R)$ понадобится знать асимптотические формулы для двух вспомогательных величин. Они исследуются тем же способом, что и величина $N(R)$.

Пусть α, $\beta \in [0;1]$ — действительные числа. Обозначим через $T(R) = T(\alpha, \beta; R)$ сумму

$$T(R) = \sum_{l,Q'\leqslant R} \sum_{k\leqslant l} \sum_{Q\leqslant Q'} [(\alpha k + l)(\beta Q + Q') \leqslant R],$$

которая, очевидно, совпадает с числом решений неравенства

$$(\alpha m + n)(\beta k + l) \leqslant R \tag{40}$$

относительно неизвестных k, l, m и n, связанных условиями

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{41}$$

Лемма 17. *Пусть $\alpha, \beta \in (0,1]$ — рациональные числа со знаменателями $q(\alpha)$ и $q(\beta)$ соответственно. Тогда при любом $R \geqslant 1$*

$$T(R) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)} \left(\log R + c_1(\alpha) + c_1(\beta) - \frac{1}{2} \right) + O\left(R^{3/2} \left(\frac{s_1(\alpha)}{q(\alpha)} + \frac{s_1(\beta)}{q(\beta)} \right) + R(s_1(\alpha) + s_1(\beta)) \right),$$

где $c_1(\alpha)$ и $c_1(\beta)$ определены равенством (27).

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha \leqslant \beta$. Положим $U = \sqrt{R} + 1/2$. Обозначим через $T_1(R,U)$ число тех решений неравенства (40) с ограничениями (41), для которых $l \leqslant U$. Число решений, для которых $l > U$, обозначим соответственно через $T_2(R,U)$. Таким образом

$$T(R) = T_1(R,U) + T_2(R,U). \tag{42}$$

Для нахождения $T_1(R,U)$ заметим, что по лемме 3 при фиксированных k и l число решений неравенства (40) относительно m и n равно

$$\frac{1}{2(\alpha+1)} \left(\frac{R}{\beta k + l} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\beta k + l} \left(1 - \frac{1}{\alpha+1} \right) + O\left(\left(\frac{R}{q(\alpha) l} + 1 \right) s_1(\alpha) \right).$$

Поэтому

$$T_1(R,U) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)} \sigma_2(\beta, U) - \frac{R\alpha}{2(\alpha+1)} \sum_{l\leqslant U} \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\beta k + l} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R \right) s_1(\alpha) \right).$$

Применяя лемму 10 и равенство

$$\sum_{l\leqslant U} \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\beta k + l} = \frac{\log(\beta+1)}{\beta} U + O(\log U),$$

следующее из леммы 5, получаем

$$T_1(R,U) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)} \left(\log U + c_1(\beta) - \frac{\log(\beta+1)}{\beta} + 1 + \frac{1}{U} \cdot \frac{\beta^2+\beta}{2(\beta+1)} \right) - \\ - \frac{R\alpha}{2(\alpha+1)} \cdot \frac{\log(\beta+1)}{\beta} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R \right) s_1(\alpha) \right).$$

Полагая $R_1 = RU^{-1}$, для величины $T_2(R,U)$ аналогично находим

$$T_2(R,U) = \sum_{n \leqslant R_1} \sum_{m \leqslant n} \sum_{U < l \leqslant \frac{R}{\alpha m+n}} \min\left\{l, \left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{R}{\alpha m+n} - l\right)\right]\right\} =$$

$$= \sum_{n \leqslant R_1} \sum_{m \leqslant n} \sum_{U < l \leqslant \frac{R}{\alpha m+n}} \min\left\{l, \frac{1}{\beta}\left(\frac{R}{\alpha m+n} - l\right)\right\} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n \leqslant R_1} \sum_{m \leqslant n} \left(\frac{R}{\alpha m+n} - \max\left\{U, \frac{R}{(\alpha m+n)(\beta+1)}\right\}\right) + O\left(\left(\frac{R}{q(\beta)n} + 1\right) s_1(\beta)\right).$$

По лемме 5 с учетом того, что U — полуцелое число, получаем

$$T_2(R,U) = \sum_{n \leqslant R_1} \sum_{m \leqslant n} \int_U^R dl \int_0^l dk[(\alpha m+n)(\beta k + l) \leqslant R] -$$
$$-\frac{U}{2}\left(\sigma_5(\alpha, R_1) - \sigma_5\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta+1}\right)\right) + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\beta)} + R\right) s_1(\beta)\right), \tag{43}$$

где, в обозначениях леммы 10,

$$\sigma_5(\alpha, R) = R\sigma_4(\alpha, R) - \sigma_3(\alpha, R) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right) s_1(\alpha)\right),$$

откуда

$$\frac{U}{2}\left(\sigma_5(\alpha, R_1) - \sigma_5\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta+1}\right)\right) = \frac{\beta^2 + 2\beta}{4(\alpha+1)(\beta+1)^2} \cdot \frac{R^2}{U} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right) s_1(\alpha)\right). \tag{44}$$

Для вычисления двойного интеграла в формуле для $T_2(R,U)$ сделаем замены переменных $k = t \cdot l$, $l = U \cdot \xi$. Тогда, в обозначениях леммы 10,

$$\sum_{n \leqslant R_1} \sum_{m \leqslant n} \int_U^R dl \int_0^l dk[(\alpha m+n)(\beta k + l) \leqslant R] = U^2 \int_0^1 dt \sum_{n \leqslant R_1} \sum_{m \leqslant n} \int_1^{R_1} \xi \cdot [\xi(\alpha m+n)(\beta t+1) \leqslant R_1] d\xi =$$
$$= \frac{U^2}{2} \int_0^1 dt \sum_{n \leqslant R_1} \sum_{m \leqslant n} \left(\frac{R_1^2}{(\beta t+1)^2(\alpha m+n)^2} - 1\right)[(\alpha m+n)(\beta t+1) \leqslant R_1] =$$
$$= \frac{R^2}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(\beta t+1)^2} \cdot \sigma_1\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta t+1}\right) - \frac{U^2}{2} \int_0^1 \sigma_3\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta t+1}\right) dt.$$

По лемме 10

$$\int_0^1 \frac{dt}{(\beta t+1)^2} \cdot \sigma_1\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta t+1}\right) = \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\left(\log R_1 + c_1(\alpha) + \frac{\log(\beta+1)}{\beta} - 1\right) +$$
$$+ \frac{\alpha}{(\alpha+1)R_1}\left(\frac{\log(\beta+1)}{2\beta} + \int_0^1 \frac{dt}{\beta t+1}\rho\left(\frac{R_1}{\beta t+1}\right)\right) + O\left(\frac{1}{R}\right),$$
$$\int_0^1 \sigma_3\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta t+1}\right) dt = \frac{R_1^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)} - \frac{\alpha R_1}{2(\alpha+1)} \cdot \frac{\log(\beta+1)}{\beta} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right) s_1(\alpha)\right).$$

По предположению $\alpha \leqslant \beta$. Следовательно,

$$\alpha \int_0^1 \frac{dt}{\beta t+1}\rho\left(\frac{R_1}{\beta t+1}\right) \ll \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{R_1} \ll \frac{1}{R_1}$$

и

$$\sum_{n\leqslant R_1}\sum_{m\leqslant n}\int_U^R dl\int_0^l dk[(\alpha m+n)(\beta k+l)\leqslant R]=\frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)}\left(\log R_1+c_1(\alpha)+\frac{\log(\beta+1)}{\beta}-\frac{3}{2}\right)+$$

$$+\frac{\alpha}{(\alpha+1)RU}\frac{\log(\beta+1)}{2\beta}+O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)}+R\right)s_1(\alpha)\right). \qquad (45)$$

Объединяя вместе равенства (43), (44) и (45), приходим к асимптотической формуле для $T_2(R,U)$:

$$T_2(R,U)=\frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)}\left(\log\frac{R}{U}+c_1(\alpha)+\frac{\log(\beta+1)}{\beta}-\frac{3}{2}\right)+$$

$$+\frac{\alpha}{(\alpha+1)RU}\frac{\log(\beta+1)}{2\beta}-\frac{R^2U^{-1}(\beta^2+2\beta)}{4(\alpha+1)(\beta+1)^2}+O\left(R^{3/2}\left(\frac{s_1(\alpha)}{q(\alpha)}+\frac{s_1(\beta)}{q(\beta)}\right)+R(s_1(\alpha)+s_1(\beta))\right).$$

Подставляя найденные асимптотические формулы для $T_1(R,U)$ и $T_2(R,U)$ в формулу (42), приходим к утверждению леммы. □

Для действительных α, $\beta\in(0;1]$ обозначим через $L(R)=L(\alpha,\beta;R)$ сумму

$$L(R)=\sum_{l,n\leqslant R}\sum_{k\leqslant l}\sum_{m\leqslant n}\frac{[(\alpha m+n)(\beta k+l)\leqslant R]}{(\alpha m+n)^2(\beta k+l)^2}.$$

Следствие 2. *Пусть $\alpha,\beta\in(0,1]$ — рациональные числа со знаменателями $q(\alpha)$ и $q(\beta)$ соответственно. Тогда при любом $R\geqslant 1$ для суммы $L(R)$ справедлива асимптотическая формула*

$$L(R)=\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\left(\frac{\log^2 R}{2}+\log R(c_1(\alpha)+c_1(\beta))+c(\alpha,\beta)\right)+$$

$$+O\left(R^{-1/2}\left(\frac{s_1(\alpha)}{q(\alpha)}+\frac{s_1(\beta)}{q(\beta)}\right)+R^{-1}(s_1(\alpha)+s_1(\beta))\right),$$

где $c_1(\alpha)$ — функция из леммы 10 и $c(\alpha,\beta)$ — величина не зависящая от R.

Доказательство. Утверждение следствия получается из леммы 17 с помощью интегрального преобразования Абеля (28). Для доказательства достаточно рассмотреть последовательность $\lambda_1,\ldots,\lambda_P$ значений произведения $(\alpha m+n)(\beta k+l)$, когда $1\leqslant m\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant l$, $(\alpha m+n)(\beta k+l)\leqslant R$ и положить $a_j=1$ $(j=1,\ldots,P)$, $g(t)=1/t^2$. □

Следствие 3. *Пусть $R\geqslant 2$. Тогда*

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 T(\alpha,\beta;R)d\alpha d\beta=&\frac{\log^2 2}{2}R^2\left(\log R+2\gamma-\frac{5}{2}+\log 2\right)+O(R\log^2 R),\\ \int_0^1\int_0^1 L(\alpha,\beta;R)d\alpha d\beta=&\frac{\log^2 2}{2}\cdot\log^2 R+2\log^2 2\cdot\log R\left(\gamma-1+\frac{\log 2}{2}\right)+C_L+O(R^{-1}\log^2 R),\end{aligned}$$

где C_L — абсолютная константа.

Доказательство. Пусть $p\geqslant 2$ — натуральное число. Тогда

$$\int_0^1\int_0^1 T(\alpha,\beta;R)d\alpha d\beta=\frac{1}{p^2}\sum_{a,b=1}^{p-1}T\left(\frac{a}{p},\frac{b}{p};R\right)+O\left(\frac{R^2\log R}{p}\right).$$

Для простого p по лемме 17

$$\int_0^1\int_0^1 T(\alpha,\beta;R)d\alpha d\beta = \frac{1}{p^2}\sum_{a,b=1}^{p-1}\frac{R^2}{2(1+\frac{a}{p})(1+\frac{b}{p})}\left(\log R + c_1\left(\frac{a}{p}\right)+c_1\left(\frac{b}{p}\right)-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+O\left(\frac{R^2\log R}{p}\right)+O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{p}+R\right)\frac{1}{p}\sum_{a=1}^{p-1}s_1\left(\frac{a}{p}\right)\right).$$

Пользуясь непрерывностью функции $c_1(\alpha)$ и леммой 4 получаем

$$\int_0^1\int_0^1 T(\alpha,\beta;R)d\alpha d\beta = \int_0^1\int_0^1\frac{R^2}{2(1+\alpha)(1+\beta)}\left(\log R + c_1(\alpha)+c_1(\beta)-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{p}+R\right)\log^2 p\right)+O\left(\frac{R^2\log R}{p}\right).$$

Выбирая p в пределах $R\leqslant p\leqslant 2R$ и применяя равенство (29), приходим к первому утверждению следствия.

Второе утверждение доказывается аналогично. Интегрируемость $c(\alpha,\beta)$ вытекает из интегрируемости $L(\alpha,\beta;R)$, $c_1(\alpha)$ и $c_1(\beta)$. □

8 Асимптотическая формула для дисперсии

Обозначим через $M(R)$ число решений неравенства (13), в котором

$$1\leqslant k\leqslant l,\quad 1\leqslant Q\leqslant Q',\quad \begin{pmatrix} a & m\\ b & n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}. \tag{46}$$

Пусть U и U_0 — действительные числа в пределах от 1 до R. Все решения неравенства (13) с ограничениями (46) разобьем на три группы, для которых выполняются дополнительные условия

1. $n\leqslant U$, $Q'\leqslant U_0$;
2. $n\leqslant U$, $Q'>U_0$;
3. $n>U$.

Величину $M(R)$ соответственно представим в виде

$$M(R)=M_1(R,U,U_0)+M_2(R,U,U_0)+M_3(R,U).$$

Каждое из слагаемых в этой сумме исследуем отдельно.

8.1 Вычисление $M_1(R,U,U_0)$

Лемма 18. *Пусть $2\leqslant U,U_0\leqslant R$, U_0 — полуцелое. Тогда*

$$M_1(R,U,U_0)=\frac{\log^2 2}{\zeta(2)}R^2\log U\log U_0+\left(\frac{C_1}{2}+\frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right)R^2\log U_0+\frac{C_4}{2}R^2+$$
$$+\frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\log 2+\gamma-\frac{\zeta(2)}{2\log 2}\right)R^2\log U+\frac{R^2}{4U_0}\left(\frac{\log 2}{\zeta(2)}\log U+C_{A_0}-C_{A_1}\right)-\frac{1-\log 2}{2}RUU_0+$$
$$+O(R^2U_0^{-2}\log R)+O(R^2U^{-1/2}\log^6 R)+O(RU_0U^{1/2}\log^5 R)+O(U^2U_0^2\log^2 R),$$

где C_1, C_{A_0}, C_{A_1} — константы из леммы 12, а C_4 — из леммы 13 соответственно.

Доказательство. Пусть переменные a, b, m, n, Q, Q' фиксированы, и

$$f(l) = \min\left\{l, \frac{R - l(mQ+nQ')}{aQ+bQ'}\right\}.$$

Тогда число решений неравенства

$$k(aQ+bQ') + l(mQ+nQ') \leqslant R$$

с ограничениями (46) относительно переменных k и l равно

$$\sum_{l\leqslant R/(mQ+nQ')} f(l) - \sum_{l\leqslant R/(mQ+nQ')} \{f(l)\}.$$

Применяя к первой из этих сумм лемму 3, а ко второй — лемму 5, получаем

$$\frac{R^2}{2(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')} - \frac{R}{2}\left(\frac{1}{mQ+nQ'} - \frac{1}{(a+m)Q+(b+n)Q'}\right) + \\ +O\left(\left(\frac{R}{nQ'}q^{-1}\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right)+1\right)s_1\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right)\right). \qquad (47)$$

Замечая, что

$$s_1\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right) \ll s_1\left(\frac{m}{n}\right) + s_1\left(\frac{Q}{Q'}\right),$$

и применяя лемму 4 получаем следующую оценку суммы остаточных членов

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)} \sum_{Q'\leqslant U_0} \sum_{Q\leqslant Q'} \left(\frac{R}{nQ'}q^{-1}\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right)+1\right)s_1\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right) =$$

$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)} \sum_{\delta\leqslant U_0} \sum_{Q'\leqslant U_0/\delta} \sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'} \left(\frac{R}{n\delta Q'(mQ+nQ')}+1\right)s_1\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right) \ll$$

$$\ll \sum_{n\leqslant U} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant n} \sum_{\delta\leqslant U_0} \sum_{Q'\leqslant U_0/\delta} \sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'} \left(\frac{R}{\delta n^2(Q')^2}+1\right)\left(s_1\left(\frac{m}{n}\right)+s_1\left(\frac{Q}{Q'}\right)\right) \ll R\log^5 R + U^2U_0^2\log^2 R.$$

Таким образом, суммируя (47), находим

$$M_1(R,U,U_0) = \frac{R^2}{2}W_4(U_0,U) - \frac{R}{2}(W_6(U_0,U) - W_7(U_0,U)) + O(R\log^5 R) + O(U^2U_0^2\log^3 R).$$

Применяя леммы 13, 15 и учитывая оценку $RU \ll R^2U_0^{-2} + U^2U_0^2$, получаем требуемую формулу для $M_1(R,U,U_0)$. □

8.2 Вычисление $M_2(R,U,U_0)$

Лемма 19. *Пусть $2\leqslant U, U_0\leqslant R$, U_0 — полуцелое. Тогда*

$$M_2(R,U,U_0) = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}R^2\log U\log\frac{R}{U_0} + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right)R^2\log\frac{R}{U_0} - \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)}R^2\log^2 U + \\ +\frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{5}{2} + \frac{\zeta(2)}{2\log 2}\right)R^2\log U + C_2'R^2 - \frac{R^2}{4U_0}\left(\frac{\log 2}{\zeta(2)}\log U + C_{A_0} - C_{A_1}\right) + \frac{1-\log 2}{2}RUU_0 + \\ +O(R^2U_0^{-2}\log^2 R) + O(R^2U^{-1/2}\log^6 R) + O(RU_0U^{1/2}\log^5 R) + O(U^2U_0^2\log^2 R)$$

где C_2' — абсолютная постоянная, а C_{A_0}, C_{A_1}, C_1 — константы из леммы 12.

Доказательство. Положим $R_1 = RU_0^{-1}$. Как и при доказательстве леммы 18 предположим, что переменные a, b, m, n, k, l фиксированны и удовлетворяют условиям (46). Рассмотрим функцию

$$f(l) = \min\left\{Q', \frac{R - Q'(bk+nl)}{ak+ml}\right\}.$$

Тогда число решений неравенства

$$k(aQ + bQ') + l(mQ + nQ') \leqslant R$$

относительно переменных Q и Q', таких что ($Q' > U_0$, $1 \leqslant Q \leqslant Q'$) равно

$$\sum_{U_0 < Q' \leqslant R/(bk+nl)} f(Q') - \sum_{U_0 < Q' \leqslant R/(bk+nl)} \{f(l)\}.$$

Снова к первой из сумм применим лемму 3, а ко второй — лемму 5. Пользуясь тем, что U_0 — полуцелое число и

$$q\left(\frac{ak+ml}{bk+nl}\right) = \frac{bk+nl}{(k,l)},$$

получаем

$$\sum_{U_0 < Q' \leqslant R/(bk+nl)} f(Q') - \sum_{U_0 < Q' \leqslant R/(bk+nl)} \{f(l)\} = \int_{U_0}^{R} dQ' \int_0^{Q'} dQ[Q(ak+ml) + Q'(bk+nl) \leqslant R] -$$
$$-\frac{U_0}{2}\left(\frac{R_1}{bk+nl} - \max\left\{1, \frac{R_1}{(a+b)k+(m+n)l}\right\}\right)[bk+nl \leqslant R_1] + O\left(\left(\frac{(k,l)R}{l^2n^2} + 1\right) s_1\left(\frac{ak+ml}{bk+nl}\right)\right).$$

Сумма остатков оценивается как и в доказательстве леммы 18. Поэтому, в обозначениях леммы 14,

$$M_2(R,U,U_0) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leqslant R} \sum_{k \leqslant l} \int_{U_0}^{R} dQ' \int_0^{Q'} dQ[Q(ak+ml) + Q'(bk+nl) \leqslant R] -$$
$$-\frac{U_0}{2} W_5(R_1, U) + O(R\log^5 R) + O(R^2 U_0^2 \log^2 R).$$

Возникшая сумма после замены переменных $Q = tQ'$ и $Q' = \xi U_0$ преобразуется к виду

$$U_0^2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leqslant R} \sum_{k \leqslant l} \int_0^1 dt \int_1^{R_1} \xi[\xi(t(ak+ml) + bk + nl) \leqslant R_1] d\xi =$$
$$= \frac{U_0^2}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leqslant R} \sum_{k \leqslant l} \int_0^1 \left(\left(\frac{R_1}{t(ak+ml) + bk + nl}\right)^2 - 1\right)[t(ak+ml) + bk + nl \leqslant R_1]\, dt =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \left(\frac{R^2}{(mt+n)^2} \sigma_1\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) - U_0^2 \sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right)\right) dt.$$

Таким образом

$$M_2(R,U,U_0) = \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{R^2}{(mt+n)^2} \sigma_1\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) dt -$$
$$-\frac{U_0^2}{2} W_8(R_1, U) - \frac{U_0}{2} W_5(R_1, U) + O(R\log^5 R) + O(R^2 U_0^{-2} \log^2 R). \qquad (48)$$

Применяя лемму 10, в обозначениях леммы 12 получаем

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{1}{(mt+n)^2}\,\sigma_1\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) dt = \log R_1 \cdot W_1(U) - W_2(U) + W_3(U) +$$

$$+\frac{U}{2R_1}(1-\log 2) + I(U) + O(R_1^{-1}U^{1/2}\log^5 U) + O(R_1^{-2}U^2), \tag{49}$$

где

$$I(U) = \frac{1}{R_1} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)} \int_0^1 \left(\frac{1}{mt+n} - \frac{1}{(a+m)t+b+n}\right) \rho\left(\frac{R_1}{mt+n}\right) dt.$$

Интегрирование по частям приводит к оценке

$$I(U) \ll \frac{U\log U}{R_1^2} + \frac{\log U}{R_1}.$$

Таким образом $I(U)$ по порядку не превосходит имеющихся остаточных членов.

Подставляя равенства (33) и (49) в (48), находим

$$M_2(R,U,U_0) = \frac{R^2}{2}\left(\left(\log R_1 - \frac{1}{2}\right) W_1(U) - W_2(U) + W_3(U)\right) - \frac{U_0}{2}W_5(R_1,U) + \frac{RUU_0}{2}(1-\log 2) +$$
$$+O(R^2U_0^{-2}\log^2 R) + O(U^2U_0^2\log^2 R) + O(RU_0U^{1/2}\log^5 R).$$

Применяя лемму 12, приходим к нужной формуле для $M_2(R,U,U_0)$. □

Следствие 4. *Пусть* $1 \leqslant U \leqslant R$. *Тогда*

$$M_1(R,U,U_0) + M_2(R,U,U_0) = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}R^2\log R\log U + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right) R^2\log R + C_0R^2 -$$
$$-\frac{\log^2 2}{2\zeta(2)}R^2\log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\log 2 - \frac{5}{2} + 2\gamma\right) R^2\log U + O(RU\log^2 R) + O(R^2U^{-1/2}\log^6 R).$$

Доказательство. Утверждение следствия получается, если сложить результаты лемм 18, 19 и выбрать $U_0 = R^{1/2}U^{-1/2}$. □

8.3 Вычисление $M_3(R,U)$

Лемма 20. *Пусть* $8R^{1/2} \leqslant U \leqslant R/2$. *Тогда*

$$M_3(R,U) = \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)}R^2\left(\log^2\frac{R}{U} + 2\log\frac{R}{U}\left(2\gamma - \frac{5}{2} + \log 2\right) + C_3'\right) +$$
$$+O(RU\log^2 R) + O(R^{2+\varepsilon}U^{-1/3}).$$

Доказательство. Пусть $R_2 = R/U$. Согласно определению $M_3(R,U)$,

$$M_3(R,U) = \sum_{l\cdot Q'\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{n>U} T_{\pm}(k,l,Q,Q',n), \tag{50}$$

где

$$T_{\pm}(k,l,Q,Q',n) = \sum_{b,m=1}^{n} \delta_n(bm\pm 1)\left[k\left(\frac{bm\pm 1}{n}Q + bQ'\right) + l(mQ+nQ') \leqslant R\right].$$

Для вычисления $T_{\pm}(k,l,Q,Q',n)$ предположим сначала, что $l/k \leqslant Q'/Q$. Рассмотрим функцию

$$m(b) = \min\left\{n, \frac{1}{Q}\left(\frac{R \mp \frac{k}{n}Q}{\frac{k}{n}b + l} - nQ'\right)\right\}$$

на том отрезке внутри $[0,n]$, на котором эта функция неотрицательна. Если $m(b) = \frac{1}{Q}\left(\frac{R\mp\frac{k}{n}Q}{\frac{k}{n}b+l} - nQ'\right)$, то

$$m''(b) = \frac{2}{Q}\left(R \mp \frac{k}{n}Q\right)\left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{k}{n}b + l\right)^3} \in \left[\frac{1}{c}, \frac{w}{c}\right],$$

где $c = \dfrac{Q}{2}\left(R \mp \frac{k}{n}Q\right)^{-1}\left(\dfrac{n}{k}\right)^2 l^3$, $w = 8$. Так как $m(b) \leqslant n$ и $l \cdot Q' \leqslant R_2$, то $R \mp \frac{k}{n}Q \leqslant 4lnQ'$ и при $U \geqslant 8R^{1/2}$

$$c \geqslant \frac{Qnl^2}{8Q'k^2} \geqslant \frac{n}{8Q'} \geqslant \frac{U}{8R_2} = \frac{U^2}{8R} \geqslant 8 = w.$$

Поэтому к $m(b)$ применима лемма 7. Для такой функции

$$n^{\varepsilon}(nc^{-1/3} + c^{2/3}) \ll n^{2/3+\varepsilon}\left(\left(\frac{Q'}{Q}\right)^{1/3}\left(\frac{k}{l}\right)^{2/3} + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^{2/3}\left(\frac{l}{k}\right)^{4/3}\right) \ll n^{2/3+\varepsilon}\left(\frac{lQ'}{kQ}\right)^{1/3}.$$

На участке, где $m(b) = n$, воспользуемся равенством

$$\sum_{\substack{1\leqslant b\leqslant x\\(b,n)=1}} 1 = \frac{\varphi(n)}{n}x + O(\sigma_0(n))$$

(см. [4, гл. II, зад. 19]). Таким образом,

$$T_{\pm}(k,l,Q,Q',n) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{x=1\\(x,n)=1}}^{n} f(x) + O\left(n^{2/3+\varepsilon}\left(\frac{lQ'}{kQ}\right)^{1/3}\right).$$

Далее,

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{x=1\\(x,n)=1}}^{n} f(x) = \frac{1}{n}\sum_{\delta|n}\mu(\delta)\sum_{x=1}^{n/\delta} f(\delta x),$$

и, по лемме 5,

$$\sum_{x=1}^{n/\delta} f(\delta x) = \frac{1}{\delta}\int_0^n f(t)dt + O\left(\frac{1}{\delta}\cdot\frac{lQ'}{kQ}\right).$$

Значит,

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{x=1\\(x,n)=1}}^{n} f(x) = \frac{\varphi(n)}{n^2}\int_0^n f(t)dt + O\left(\frac{\log R}{n}\cdot\frac{lQ'}{kQ}\right),$$

$$T_{\pm}(k,l,Q,Q',n) = \frac{\varphi(n)}{n^2}V_{\pm}(k,l,Q,Q',n) + O\left(\frac{\log R}{n}\cdot\frac{lQ'}{kQ}\right) + O\left(n^{2/3+\varepsilon}\left(\frac{lQ'}{kQ}\right)^{1/3}\right), \qquad (51)$$

где $V_{\pm}(k,l,Q,Q',n)$ — площадь области $\Omega_{\pm}(k,l,Q,Q',n)$ на плоскости Obm, задаваемой условиями

$$0 \leqslant b, m \leqslant n, \qquad k\left(\frac{bm \pm 1}{n}Q + bQ'\right) + l(mQ + nQ') \leqslant R. \qquad (52)$$

Если же $l/k \geqslant Q'/Q$, то формула (51) доказывается путем применения аналогичных рассуждений к функции

$$b(m) = \min\left\{n, \frac{1}{k}\left(\frac{R \mp \frac{k}{n}}{\frac{Q}{n}m + Q'} - ln\right)\right\}.$$

Подставляя равенство (51) в формулу (50), получаем

$$M_3(R,U) = \sum_{l\cdot Q'\leqslant R_2}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{U<n\leqslant R/(lQ')}\frac{\varphi(n)}{n^2}V_{\pm}(k,l,Q,Q',n) + O(R^{2+\varepsilon}U^{-1/3}).$$

Обозначим через $\Omega(k,l,Q,Q',n)$ область, которая получается, если в (52) отбросить ± 1:

$$0 \leqslant b, m \leqslant n, \qquad \left(\frac{kb}{n} + l\right)(mQ + nQ') \leqslant R,$$

а через $V(k,l,Q,Q',n)$ — ее площадь. Так как

$$\Omega_+(k,l,Q,Q',n) \subset \Omega(k,l,Q,Q',n) \subset \Omega_-(k,l,Q,Q',n),$$

то при замене $V_{\pm}(k,l,Q,Q',n)$ на $V(k,l,Q,Q',n)$ возникнет погрешность, не превосходящая разности $V_-(k,l,Q,Q',n) - V_+(k,l,Q,Q',n)$. Но при фиксированном m разность между величинами b_- и b_+, такими что

$$k\left(\frac{b_{\pm}m \pm 1}{n}Q + b_{\pm}Q'\right) + l(mQv + nQ') = R,$$

есть $O(1/n)$. Следовательно, $V_-(k,l,Q,Q',n) - V_+(k,l,Q,Q',n) = O(1)$ и

$$M_3(R,U) = 2\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_2}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{U<n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}V(k,l,Q,Q',n) + O(R^{2+\varepsilon}U^{-1/3}). \tag{53}$$

Далее,

$$\sum_{U<n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}V(k,l,Q,Q',n) = \sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sum_{\frac{U}{\delta}<n\leqslant\frac{R}{\delta}}\frac{V(k,l,Q,Q',\delta n)}{n}.$$

Поэтому сумма главных членов в формуле (53) преобразуется к виду

$$2\sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_2}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{\frac{U}{\delta}<n\leqslant\frac{R}{\delta}}\frac{1}{n}\int_0^{\delta n}db\int_0^{\delta n}dm\left[\left(\frac{b}{\delta n}k + l\right)\left(\frac{m}{\delta n}Q + Q'\right) \leqslant \frac{R}{\delta n}\right] =$$

$$=2\sum_{\delta\leqslant R}\mu(\delta)\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_2}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{\frac{U}{\delta}<n\leqslant\frac{R}{\delta}}n\int_0^1\int_0^1 d\alpha d\beta\left[(\alpha k + l)(\beta Q + Q') \leqslant \frac{R}{\delta n}\right] =$$

$$=2\sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\int_0^1\int_0^1 d\alpha d\beta\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_2}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{\frac{U}{\delta}<n\leqslant\frac{R}{\delta}}n\left[n \leqslant \frac{R}{\delta(\alpha k + l)(\beta Q + Q')}\right] =$$

$$=\sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\int_0^1\int_0^1 d\alpha d\beta\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_2}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\left(\frac{R^2}{(\alpha k + l)^2(\beta Q + Q')^2} - U^2\right)[(\alpha k + l)(\beta Q + Q') \leqslant R_2] +$$

$$+O(R^2U^{-1}\log R)$$

Следовательно

$$M_3(R,U) = \frac{U^2}{\zeta(2)}\int_0^1\int_0^1\left(R_2^2\cdot L(\alpha,\beta;R_2) - T(\alpha,\beta;R_2)\right)d\alpha d\beta + O(R^{2+\varepsilon}U^{-1/3}).$$

Подставляя в последнюю формулу равенства из следствия 3, приходим к утверждению леммы. □

Теорема 2. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда*

$$M(R) = \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)} R^2 \log^2 R + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) R^2 \log R + CR^2 + O(R^{2-1/4+\varepsilon}),$$

с абсолютными константами C и C_1, где C_1 — константа из леммы 12.

Доказательство. Для доказательства формулы достаточно сложить равенства из следствия 4 и леммы 20, а потом выбирать $U = R^{3/4}$. $\square$

8.4 Вычисление $D(R)$

Следствие 5. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$D(R) = \delta_1 \cdot \log R + \delta_0 + O_\varepsilon(R^{-1/4+\varepsilon}),$$

где δ_1, δ_0 — абсолютные константы,

$$\delta_1 = \frac{8 \log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log 2}{2} - 1 \right) + \frac{4}{\zeta(2)} \left(C_1 + \frac{3 \log 2}{2} \right)$$

и константа C_1 определена равенством (32).

Доказательство. Применяя теорему 2, находим

$$M^*(R) = \sum_{d \leqslant R} \mu(d) M\left(\frac{R}{d}\right) = \frac{\log^2 2}{2\zeta^2(2)} R^2 \log^2 R +$$

$$+ \left(\frac{C_1}{2\zeta(2)} + \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) R^2 \log R + C' R^2 + O(R^{2-1/4+\varepsilon}).$$

По формуле (16)

$$\mathcal{L}_2(R) = \frac{2 \log^2 2}{\zeta^2(2)} \log^2 R + 4 \left(\frac{C_1}{2\zeta(2)} + \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) \log R + C' + O(R^{-1/4+\varepsilon}).$$

Подставляя последнюю формулу в равенство (10), приходим к утверждению теоремы. $\square$

Замечание 1. В случае иррационального числа аналогом $s(\alpha)$ можно считать величину

$$N(\alpha, R) = \# \left\{ j \geqslant 1 : Q_j(\alpha) \leqslant R \right\},$$

где $Q_j(\alpha)$ — знаменатель j-ой подходящей дроби к числу α. В работе [9] для среднего значения $N(\alpha, R)$

$$N(R) = \int_0^1 N(\alpha, R) d\alpha$$

доказана асимптотическая формула с двумя значащими членами

$$N(R) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log R + \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \left(\log 2 + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) - \frac{3}{2} + O\left(\frac{\log R}{R} \right)$$

и для дисперсии

$$D(R) = \int_0^1 (N(\alpha, R) - N(R))^2 d\alpha = \int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha - N^2(R)$$

доказана асимптотическая формула

$$D(R) = \delta_1 \cdot \log R + \delta_0' + O(R^{-1/3} \log^5 R)$$

с абсолютными константами δ_1, δ_0', причем константа δ_1 та же, что и в следствии 5.

Компьютерные вычисления дают следующее приближенное значение константы δ_1:

$$\delta_1 = 0.51606\ldots$$

Замечание 2. Более общими характеристиками, чем длина цепной дроби, являются статистики Гаусса-Кузьмина $s_x(r)$, которые для фиксированного $x \in [0,1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ задаются равенством

$$s_x(r) = \#\{j : 1 \leqslant j \leqslant s(r), [0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x\}.$$

С помощью идей из работ [7], [8] аналогично следствию 1 может быть доказана асимптотическая формула для среднего значения величины $s_x(c/d)$:

$$\frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s(c/d) = \frac{2\log(1+x)}{\zeta(2)} \log R + \frac{2}{\zeta(2)} C(x) + O(R^{-1} \log^5 R),$$

где

$$C(x) = \log(1+x) \left(2\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(1+x)}{2} - \log x - \frac{3}{2} \right) + \\ + f_1(x) + f_2(x) - \frac{x\zeta(2)}{2(x+1)} + \frac{x\zeta(2)}{2}[x < 1]$$

и

$$f_1(x) = \sum_{Q'=1}^{\infty} \frac{1}{Q'} \left(\sum_{Q=1}^{Q'} \frac{x}{Q' + Qx} - \log(1+x) \right), \qquad f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{\frac{m}{x} \leqslant n < \frac{m}{x} + m} \frac{1}{n} - \log(1+x) \right).$$

Список литературы

[1] Авдеева, М. О. *О статистиках неполных частных конечных цепных дробей.* — Функц. анализ и его прил., 2004, т. 38, вып. 2, 1–11.

[2] Быковский В. А. *Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей.* — ФПМ, т. 11, вып. 6, 2005, 15–26.

[3] Быковский В. А. *Асимптотические свойства целых точек* (a_1, a_2)*, удовлетворяющих сравнению* $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$. — Записки научных семинаров ЛОМИ, 1981, т. 112, 5–25.

[4] Виноградов И. М. *Основы теории чисел.* — М.: Наука, 1972.

[5] Карацуба А. А. *Основы аналитической теории чисел.* — М.: Наука, 1983.

[6] Кнут Д. Э. *Искусство программирования. Т. 2. Получисленные алгоритмы.* — М., Санкт-Петербург, Киев: Вильямс, 2000.

[7] Устинов А. В. *О статистических свойствах конечных цепных дробей.* — Записки научн. семин. ПОМИ, т. 322, СПб., 2005, 186–211.

[8] Устинов А. В. *О статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей.* — Фунд. и прикл. математика, т. 11, 2005, 195–208.

[9] Устинов А. В. *Вычисление дисперсии в одной задаче из теории цепных дробей.* — Мат. сборник, т. 198, № 6, в печати.

[10] Baladi V., Vallée B. *Euclidean algorithms are Gaussian.* — J. Number Theory, v. 110, 2005, 331-386.

[11] Dixon J. D. *The Number of Steps in the Euclidean Algorithm.* — J. of Number Theory, v. 2, 1970, 414–422.

[12] Estermann T. *On Kloosterman's sum.* — Mathematika, 1961, v. 8, 83–86.

[13] Heilbronn H. *On the average length of a class of finite continued fractions.* — in Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin, VEB, 1968, 89–96.

[14] Hensley D. *The Number of Steps in the Euclidean Algorithm.* — J. of Number Theory, v. 49, 1994, 142–182.

[15] Khintchine A. Ya. *Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen.* — Mathematische Zeitschrift, v. 18, 1923, № 1, 289–306. (Имеется перевод: Хинчин А.Я. *Избранные труды по теории чисел. Одна теорема о непрерывных дробях и ее арифметические приложения* — М., МЦНМО, 2006.)

[16] Knuth D. E. *Evaluation of Porter's Constant.* — Comp. and Maths. with Appls., v. 2, 1976, 137–139.

[17] Knuth D. E., Yao, A. C. *Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 72, № 12, 1975, 4720–4722.

[18] Lewin L. *Polylogarithms and associated functions.* — New York: Elsevier North Holland, 1981.

[19] Porter J. W. *On a theorem of Heilbronn.* — Mathematika, 1975, v. 22, № 1, 20–28.

[20] Vallée B. *A Unifying Framework for the Analysis of a Class of Euclidean Algorithms.* — Proceedings of LATIN'2000, Lecture Notes in Computer Science 1776, Springer, 343–354.