О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции

А. В. Устинов*

2 февраля 2010 г.

В статье уточняется результат В. А. Быковского (1981) о числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции. В качестве приложения доказывается уточнение результата Портера (1975) о среднем числе шагов в алгоритме Евклида, распространенное на случай статистик Гаусса-Кузьмина.

Обозначения

1. Для натурального q через $\delta_q(n)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q:
$$\delta_q(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

2. Сумма степеней делителей натурального q:
$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

3. Если A — некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае.

4. Для рационального r запись $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ означает каноническую цепную дробь длины $s = s(r)$, где $t_0 = [r]$ (целая часть r), $t_1, \ldots, t_s$ — неполные частные (натуральные числа) и $t_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$.

5. Для рационального $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ и действительного $x \in [0, 1]$ через $s^{(x)}(r)$ будем обозначать статистики Гаусса-Кузьмина
$$s^{(x)}(r) = \#\{j : 1 \leqslant j \leqslant s, [0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x\}.$$

   В частности, длина цепной дроби $s = s(r) = s^{(1)}(r)$.

*Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 07-01-00306, проекта ДВО РАН 06-III-A-01-017 и Фонда содействия отечественной науке

1 Введение

Пусть q — натуральное число, l — целое и f — неотрицательная функция. Обозначим через $T[f]$ число решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$, лежащих в области $P_1 < x \leqslant P_2$, $0 < y \leqslant f(x)$:

$$T[f] = \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \sum_{0 < y \leqslant f(x)} \delta_q(xy - l).$$

В ряде теоретико-числовых задач возникает необходимость в асимптотических формулах для $T[f]$. Они лежат в основе результатов о свертках арифметических функций [10, 12], суммах арифметических функций на значениях квадратичного полинома [2, 12], статистических свойствах алгоритма Евклида [1, 5, 13] и др.

Через $S[f]$ обозначим сумму

$$S[f] = \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \mu_{q,l}(x) f(x),$$

где $\mu_{q,l}(x)$ — число решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ относительно переменной y, лежащей в пределах $1 \leqslant y \leqslant q$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 2$, на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для некоторых $A > 0$, $w \geqslant 1$*

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{A}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T[f] = S[f] - \frac{P}{2} \cdot \delta_q(l) + R[f], \tag{1}$$

где

$$R[f] \ll_w \sigma_0^{2/3}(q) \sigma_0^{5/3}(a) \sigma_{-1/2}^{4/3}(a) P A^{-1/3} + \tag{2}$$
$$+\sigma_0(q)\sigma_0(a)(A^{1/2}a^{1/2}\sigma_{-1}(q)\sigma_{-1/2}(a) + q^{1/2}\sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2 P + a\log P).$$

и $a = (l, q)$.

Эта теорема уточняет результат работы [2], в которой формула (1) доказана с остаточным членом

$$R[f] \ll a^{1/2} q^{\varepsilon} ((PA^{-1/3} + A^{2/3}) \log^{4/3} P + q^{1/2} \log^2 P).$$

В качестве приложения теоремы 1 будет доказано уточнение результата Портера [13] (см. также [1]), распространенное на случай статистик Гаусса-Кузьмина.

Теорема 2. *Пусть $b \geqslant 2$ — натуральное и $x \in (0, 1]$ — действительное. Тогда для суммы*

$$N_x^*(b) = \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant b \\ (a,b)=1}} s^{(x)}(a/b)$$

справедлива асимптотическая формула

$$N_x^*(b)=\frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)}\left(\log(x+1)\log b+C(x)\right)+O_{\varepsilon,x}\left(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}b\right),$$

где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число,

$$C(x)=\log(1+x)\left(\log x-\frac{\log(x+1)}{2}+2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\right)+h_1(x)+h_2(x)+$$
$$+\frac{\zeta(2)}{2}\left(x\cdot[x<1]-\frac{x}{1+x}\right), \tag{3}$$
$$h_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{x}{n+mx}-\log(1+x)\right), \tag{4}$$
$$h_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{\frac{n}{x}\leqslant m<\frac{n}{x}+n}\frac{1}{m}-\log(1+x)\right). \tag{5}$$

При этом оценка остаточного члена становится равномерной по x в предположении, что $x\in[x_0,1]$ для некоторого фиксированного $x_0>0$.

Автор выражает благодарность В. А. Быковскому за обсуждение полученных результатов и полезные советы.

2 Оценки сумм Клостермана

Пусть q — натуральное число, l, m, n — целые. Определим суммы

$$K_q(l,m,n)=\sum_{x,y=1}^{q}\delta_q(xy-l)e^{2\pi i\frac{mx+ny}{q}}, \tag{6}$$

которые в частном случае совпадают с классическими суммами Клостермана

$$K_q(m,n)=K_q(1,m,n)=\sum_{x,y=1}^{q}\delta_q(xy-1)e^{2\pi i\frac{mx+ny}{q}}.$$

Отметим простейшие свойства сумм $K_q(l,m,n)$.

1°. Если $(l,q)=1$, то $K_q(l,m,n)=K_q(lm,n)$.

2°. Если $q=q_1q_2$ и $(q_1,q_2)=1$, то

$$K_q(l,m,n)=K_{q_1}(\bar q_2^2 l,m,n)K_{q_2}(\bar q_1^2 l,m,n),$$

где $\bar q_1$, $\bar q_2$ — решения сравнений $q_1\bar q_1\equiv 1 \pmod{q_2}$, $q_2\bar q_2\equiv 1 \pmod{q_1}$.

3°. Для любой перестановки $\sigma\in S_3$

$$K_q(n_1,n_2,n_3)=K_q(n_{\sigma(1)},n_{\sigma(2)},n_{\sigma(3)}).$$

4°. $K_q(l,m,n)=K_q(l,-m,-n)$.

Первое свойство получается, если в определении (6) положить $x = lx_1$. Для доказательства второго достаточно сделать замены

$$x = x_1 q_2 + x_2 q_1, \quad y = y_1 q_2 + y_2 q_1, \quad (1 \leqslant x_1, y_1 \leqslant q_1, 1 \leqslant x_2, y_2 \leqslant q_2).$$

Третье свойство следует из равенства

$$K_q(l,m,n) = \frac{1}{q} \sum_{x,y,z=1}^{q} e^{2\pi i \frac{mx+ny+lz-xyz}{q}}.$$

Четвертое получается с помощью замены $x \to -x$, $y \to -y$.

Для классических сумм Клостермана в работе [7] Эстерманом доказана оценка

$$|K_q(m,n)| \leqslant \sigma_0(q) \cdot (m,n,q)^{1/2} \cdot q^{1/2}. \tag{7}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для сумм $K_q(l,m,n)$.

Лемма 1. *Пусть q — натуральное, l, m, n — целые, $a = (l,q)$. Тогда*

$$|K_q(l,m,n)| \leqslant f_q(l,m,n) \cdot q^{1/2}, \tag{8}$$

где

$$f_q(l,m,n) = \sigma_0(q)\sigma_0((l,m,n,q))(lm,ln,mn,q)^{1/2}.$$

Доказательство. Из свойства 2° сумм $K_q(l,m,n)$ и мультипликативности $f_q(l,m,n)$ как функции q следует, что оценку (8) достаточно доказать для случая, когда q есть степень простого числа.

Пусть p — простое, $\alpha \geqslant 1$, $q = p^\alpha$ и $(l,m,n,p^\alpha) = p^\lambda$. Если $\lambda = \alpha$, то

$$K_q(l,m,n) = \sum_{x,y=1}^{p^\alpha} \delta_{p^\alpha}(xy) = (\alpha+1)p^\alpha - \alpha p^{\alpha-1} \leqslant \sigma_0(q)q$$

и оценка (8) выполняется. Предположим теперь, что $\lambda \leqslant \alpha - 1$, $l = p^\lambda l_1$, $m = p^\lambda m_1$, $n = p^\lambda n_1$. Согласно свойству симметричности 3° сумм Клостермана можно считать, что $(l_1, p) = 1$. Тогда после замен $x = p^\beta x_1$, $y = p^{\lambda-\beta} y_1$ $(0 \leqslant \beta \leqslant \lambda)$ получаем

$$K_{p^\alpha}(l,m,n) = \sum_{\beta=0}^{\lambda} \sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\beta}} \sum_{y_1=1}^{p^{\alpha-\lambda+\beta}} \delta_{p^{\alpha-\lambda}}(x_1 y_1 - l_1) e^{2\pi i \frac{m_1 p^\beta x_1 + n_1 p^{\lambda-\beta} y_1}{p^{\alpha-\lambda}}} =$$

$$= p^\lambda \sum_{\beta=0}^{\lambda} \sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\lambda}} \sum_{y_1=1}^{p^{\alpha-\lambda}} \delta_{p^{\alpha-\lambda}}(x_1 y_1 - l_1) e^{2\pi i \frac{m_1 p^\beta x_1 + n_1 p^{\lambda-\beta} y_1}{p^{\alpha-\lambda}}} = p^\lambda \sum_{\beta=0}^{\lambda} K_{p^{\alpha-\lambda}}(m_1 p^\beta, n_1 p^{\lambda-\beta}, l_1).$$

Пользуясь свойством 1° сумм $K_q(l,m,n)$ и оценкой Эстермана (7), находим

$$\left|K_{p^{\alpha-\lambda}}(m_1 p^\beta, n_1 p^{\lambda-\beta}, l_1)\right| = \left|K_{p^{\alpha-\lambda}}(l_1 m_1 p^\beta, n_1 p^{\lambda-\beta}, 1)\right| =$$
$$= \left|K_{p^{\alpha-\lambda}}(l_1 m_1 p^\beta, n_1 p^{\lambda-\beta})\right| \leqslant \sigma_0(p^\alpha)(m_1 p^\beta, n_1 p^{\lambda-\beta}, p^{\alpha-\lambda})^{1/2} p^{(\alpha-\lambda)/2}$$

Учитывая, что $\lambda + 1 = \sigma_0((l,m,n,p^\alpha))$, получаем неравенство

$$|K_{p^\alpha}(l,m,n)| \leqslant \sigma_0(p^\alpha)\sigma_0((l,m,n,p^\alpha)) p^{\alpha/2} \max_{0 \leqslant \beta \leqslant \lambda} (mp^\beta, np^{\lambda-\beta}, p^\alpha)^{1/2}.$$

Замечая, что

$$(mp^\beta, np^{\lambda-\beta}, p^\alpha) \leqslant (lm, ln, mn, p^\alpha),$$

приходим к утверждению леммы. □

Замечание 1. *Более точная оценка*

$$(mp^{\beta}, np^{\lambda-\beta}, p^{\alpha})^2 = (m^2p^{2\beta}, n^2p^{2\alpha-2\beta}, p^{2\alpha}) \leqslant (l^2m^2, l^2n^2, m^2n^2, lmn, p^{2\alpha}),$$

показывает, что неравенство леммы 1 справедливо с коэффициентом

$$f_q(l,m,n) = \sigma_0(q)\sigma_0((l,m,n,q))(l^2m^2, l^2n^2, m^2n^2, lmn, q^2)^{1/4}.$$

Следствие 1. *Пусть q — натуральное, l — целое и $a = (l,q)$. Тогда*

$$\sum_{m,n=1}^{q} \frac{|K_q(l,m,n)|}{m\cdot n} \ll \sigma_0(q)\sigma_0^2(a)\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2(q+1)q^{1/2}.$$

Доказательство. По лемме 1

$$|K_q(l,m,n)| \leqslant \sigma_0(q)\sigma_0(a)(lm, ln, mn, q)^{1/2}q^{1/2}.$$

Поэтому для доказательства следствия достаточно проверить, что сумма

$$S = \sum_{m,n=1}^{q} \frac{(lm, ln, mn, q)^{1/2}}{mn}$$

удовлетворяет оценке

$$S \ll \sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2(q+1). \tag{9}$$

Преобразуем сумму S:

$$S = \sum_{\delta|q}\delta^{1/2}\sum_{m,n=1}^{q}\frac{[(lm,ln,mn)=\delta]}{mn} \leqslant \sum_{\delta|q}\delta^{1/2}\sum_{m,n=1}^{q}\frac{1}{mn}\left[\frac{\delta}{(l,\delta)} \mid m, \frac{\delta}{(l,\delta)} \mid n, \delta \mid mn\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\delta|q}\delta^{1/2}\sum_{m_1,n_1=1}^{q}\frac{1}{m_1n_1}\cdot\frac{(l,\delta)^2}{\delta^2}[(l,\delta)^2 \mid m_1n_1\delta].$$

Здесь и далее $[A]$ означает 1, если утверждение A истинно, и 0 в противном случае.

Вводя параметры $\delta_1 = (\delta, l)$ и $\delta_2 = (\delta, \delta_1^2)$, находим

$$S \leqslant \sum_{\delta_1|(l,q)}\delta_1^2\sum_{\substack{\delta|q\\(\delta,l)=\delta_1}}\frac{1}{\delta^{3/2}}\sum_{m_1,n_1=1}^{q}\frac{[\delta_1^2 \mid m_1n_1\delta]}{m_1n_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\delta_1|(l,q)}\delta_1^2\sum_{\substack{\delta|q\\(\delta,l)=\delta_1}}\frac{1}{\delta^{3/2}}\sum_{m_1,n_1=1}^{q}\frac{1}{m_1n_1}\left[\frac{\delta_1^2}{\delta_2} \mid m_1n_1\right].$$

Заметим, что $\delta_1 \mid \delta_2$, и $\delta_1^2/\delta_2 \mid \delta_1$. Поэтому из оценки

$$\sum_{m_1,n_1=1}^{q}\frac{1}{m_1n_1}[d \mid m_1n_1] \leqslant \sum_{k=1}^{q^2}\frac{\sigma_0(dk)}{dk} \ll \frac{\sigma_0(d)}{d}\cdot\log^2(q+1),$$

следует, что

$$S \ll \sigma_0(a)\log^2(q+1)\sum_{\delta_1|(l,q)}\sum_{\substack{\delta|q\\(\delta,l)=\delta_1}}\frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} = \sigma_0(a)\log^2(q+1)\sum_{\delta|q}\frac{\delta_2}{\delta^{3/2}}$$

После замен $\delta = \delta_1 \cdot \delta_0$, $(\delta_1, \delta_0) = \delta'$ находим

$$\sum_{\delta|q} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} = \sum_{\delta_1|(l,q)} \sum_{\substack{\delta|q \\ (\delta,l)=\delta_1}} \frac{(\delta_1^2, \delta)}{\delta^{3/2}} \leqslant \sum_{\delta_1|(l,q)} \delta_1^{-1/2} \sum_{\delta_0|q} \frac{(\delta_1, \delta_0)}{\delta_0^{3/2}} =$$

$$= \sum_{\delta_1|(l,q)} \delta_1^{-1/2} \sum_{\delta'|\delta_1} \delta' \sum_{\substack{\delta_0|q \\ (\delta_0,\delta_1)=\delta'}} \frac{1}{\delta_0^{3/2}} \ll \sum_{\delta_1|a} \delta_1^{-1/2} \sum_{\delta'|a} (\delta')^{-1/2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\delta|q} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} \ll \sigma_{-1/2}^2(a). \tag{10}$$

Значит, оценка (9) действительно верна и лемма доказана. $\square$

Отдельно оценим суммы $K_q(l, m, n)$, когда один из аргументов равен нулю. Пусть

$$c_q(m, n) = K_q(0, m, n) = \sum_{x,y=1}^{q} \delta_q(xy) e^{2\pi i \frac{mx+ny}{q}}$$

Такие суммы являются обобщениями сумм Рамануджана

$$c_q(n) = \sum_{x=1}^{q}{}^{*} e^{2\pi i \frac{nx}{q}}$$

(здесь и далее знак звездочки означает, что суммирование проходит по приведенной системе вычетов), поскольку

$$c_q(n) = K_q(0, 1, n) = c_q(1, n).$$

Согласно свойству 2° сумм Клостермана $K_q(l, m, n)$ при $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$

$$c_q(m, n) = c_{q_1}(m, n) c_{q_2}(m, n).$$

Поэтому для вычисления суммы $c_q(m, n)$ достаточно ограничиться случаем, когда q есть степень простого числа.

Лемма 2. *Пусть p — простое, $\alpha \geqslant 1$ и $q = p^\alpha$. Тогда*

$$c_q(m, n) = g_{p^\alpha}(m, n) - g_{p^{\alpha-1}}(m, n),$$

где

$$g_q(m, n) = q \cdot \delta_q((m, q)(n, q)) \sigma_0((m, q)(n, q) q^{-1}). \tag{11}$$

Доказательство. Если $xy \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, то для некоторого β $(0 \leqslant \beta \leqslant \alpha)$, будут выполнятся равенства

$$x = p^\beta x_1, \quad (x_1, p) = 1, \quad y = p^{\alpha-\beta} y_1.$$

Поэтому

$$c_q(m,n)=\sum_{\beta=0}^{\alpha}\sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\beta}}{}^{*}\sum_{y_1=1}^{p^{\beta}}e^{2\pi i\frac{mp^{\beta}x_1+np^{\alpha-\beta}y_1}{p^{\alpha}}}=$$

$$=\sum_{\beta=0}^{\alpha}\sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\beta}}\sum_{y_1=1}^{p^{\beta}}e^{2\pi i\left(\frac{mx_1}{p^{\alpha-\beta}}+\frac{ny_1}{p^{\beta}}\right)}-\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\beta-1}}\sum_{y_1=1}^{p^{\beta}}e^{2\pi i\left(\frac{mx_1}{p^{\alpha-\beta-1}}+\frac{ny_1}{p^{\beta}}\right)}=$$

$$=g_{p^{\alpha}}(m,n)-g_{p^{\alpha-1}}(m,n),$$

где

$$g_{p^{\alpha}}(m,n)=p^{\alpha}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\delta_{p^{\alpha-\beta}}(m)\delta_{p^{\beta}}(n).$$

Для проверки равенства (11) заметим, что если $p^{\alpha}\nmid(m,p^{\alpha})(n,p^{\alpha})$, то $g_{p^{\alpha}}(m,n)=0$. Если же $(m,p^{\alpha})=p^{\nu_1}$, $(n,p^{\alpha})=p^{\nu_2}$ и $\nu_1+\nu_2\geqslant\alpha$, то

$$g_{p^{\alpha}}(m,n)=p^{\alpha}\sum_{\beta=0}^{\alpha}[\alpha-\nu_1\leqslant\beta\leqslant\nu_2]=p^{\alpha}(\nu_1+\nu_2-\alpha+1)=p^{\alpha}\cdot\sigma_0((m,p^{\alpha})(n,p^{\alpha})p^{-\alpha}).$$

□

Следствие 2. *Для любого натурального q и целых m, n*

$$|c_q(m,n)|\leqslant\sigma_0((m,q))(q,mn),\tag{12}$$

и, в частности,

$$K_q(m,0,0)=|c_q(m,0)|\leqslant\sigma_0((m,q))q.\tag{13}$$

Доказательство. Поскольку величина, стоящая в правой части неравенства (12) (как и $c_q(m,n)$), является мультипликативной функцией параметра q, то оценку (12) достаточно доказать для степеней простых чисел. Предположим, что p — простое, $\alpha\geqslant 1$, и $q=p^{\alpha}$. Рассмотрим три случая:

1) $p^{\alpha}\mid(m,p^{\alpha})(n,p^{\alpha})$, а, следовательно, и $p^{\alpha-1}\mid(m,p^{\alpha-1})(n,p^{\alpha-1})$;
2) $p^{\alpha}\nmid(m,p^{\alpha})(n,p^{\alpha})$, но $p^{\alpha-1}\mid(m,p^{\alpha-1})(n,p^{\alpha-1})$;
3) $p^{\alpha-1}\nmid(m,p^{\alpha-1})(n,p^{\alpha-1})$.

В первом случае $g_{p^{\alpha}}(m,n)>0$, $g_{p^{\alpha-1}}(m,n)>0$ и для $(m,p^{\alpha})=p^{\nu_1}$, $(n,p^{\alpha})=p^{\nu_2}$

$$g_{p^{\alpha-1}}(m,n)=p^{\alpha-1}(\min\{\nu_1,\alpha-1\}+\min\{\nu_2,\alpha-1\}-\alpha+2)\leqslant$$
$$\leqslant p^{\alpha-1}(\nu_1+\nu_2-\alpha+2)\leqslant p^{\alpha}(\nu_1+\nu_2-\alpha+1)=g_{p^{\alpha}}(m,n).$$

Значит, по лемме 2,

$$0\leqslant c_{p^{\alpha}}(m,n)=g_{p^{\alpha}}(m,n)-g_{p^{\alpha-1}}(m,n)\leqslant g_{p^{\alpha}}(m,n),$$
$$|c_{p^{\alpha}}(m,n)|\leqslant g_{p^{\alpha}}(m,n)\leqslant p^{\alpha}\sigma_0((m,p^{\alpha}))\delta_{p^{\alpha}}((m,p^{\alpha})(n,p^{\alpha}))=\sigma_0((m,q))(q,mn).$$

Во втором случае аналогично находим

$$|c_q(m,n)|=g_{p^{\alpha-1}}(m,n)\leqslant p^{\alpha-1}\sigma_0((m,p^{\alpha}))\delta_{p^{\alpha-1}}((m,p^{\alpha-1})(n,p^{\alpha-1}))=\sigma_0((m,q))(q,mn).$$

В третьем случае $|c_q(m,n)|=0$. □

Следствие 3. *Пусть q — натуральное, l — целое и $a = (l, q)$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{n=1}^{q} \frac{|c_q(l,n)|}{n} \ll \sigma_0(q)\sigma_0(a)\log(q+1)\cdot a.$$

Доказательство. Пользуясь следствием 2, находим

$$\sum_{n=1}^{q} \frac{|c_q(l,n)|}{n} \leqslant \sigma_0(a) \sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n}(q, ln) = a\sigma_0(a) \sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n}\left(\frac{q}{a}, n\right) \leqslant$$

$$\leqslant a\sigma_0(a) \sum_{\delta | q/a} \delta \sum_{\substack{n=1\\ \delta | n}}^{q} \frac{1}{n} \ll a\sigma_0(a)\sigma_0(q)\log(q+1).$$

□

Лемма 3. *Пусть $q \geqslant 1$ — натуральное, l — целое, Q_1, Q_2, P_1, P_2 — вещественные $0 \leqslant P_1, P_2 \leqslant q$ и $a = (l, q)$. Тогда для суммы*

$$\Phi_q(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \sum_{\substack{Q_1 < u \leqslant Q_1 + P_1\\ Q_2 < v \leqslant Q_2 + P_2}} \delta_q(uv - l)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_q(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \frac{K_q(l,0,0)}{q^2} \cdot P_1 P_2 + O\left(\psi_l(q)\right),$$

где

$$\psi_l(q) = \sigma_0(q)\sigma_0^2(a)\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2(q+1)q^{1/2} + \sigma_0(q)\sigma_0(a)\log(q+1)a. \tag{14}$$

Доказательство. Определим целые

$$M_1 = [Q_1], \qquad M_2 = [Q_2],$$
$$N_1 = [Q_1 + P_1] - [Q_1], \qquad N_2 = [Q_2 + P_2] - [Q_2].$$

При этом

$$\Phi_q(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \Phi_q(M_1, M_2; N_1, N_2) \tag{15}$$

и

$$0 \leqslant N_1, N_2 \leqslant q, \tag{16}$$

поскольку

$$0 \leqslant N_j = [Q_j + P_j] - [Q_j] = P_j + \{Q_j\} - \{Q_j + P_j\} \leqslant q \qquad (j = 1, 2).$$

Докажем сначала лемму с M_1, M_2, N_1, N_2 вместо Q_1, Q_2, P_1, P_2. Если одно из чисел N_1, N_2 равно нулю, то утверждение леммы тривиально. Поэтому в дальнейшем будем считать, что N_1 и N_2 — натуральные числа. Определим две функции

$$F_1 : \{M_1 + 1, \ldots, M_1 + q\} \to \{0, 1\}, \qquad F_2 : \{M_2 + 1, \ldots, M_2 + q\} \to \{0, 1\},$$

положив

$$F_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad M_j < x \leqslant M_j + N_j \\ 0, & \text{если} \quad M_j + N_j < x \leqslant M_j + q. \end{cases}$$

Для них справедливы следующие разложения в конечные ряды Фурье

$$F_j(x) = \sum_{-q/2<k\leqslant q/2} \widehat{F}_j(k) e^{2\pi i \frac{kx}{q}},$$

с коэффициентами

$$\widehat{F}_j(k) = \frac{1}{q} \sum_{y=M_j+1}^{M_j+N_j} e^{-2\pi i \frac{ky}{q}}.$$

Для $k=0$

$$\widehat{F}_j(0) = \frac{1}{q} N_j,$$

а для остальных $k \in (-q/2, q/2]$, суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$\widehat{F}_j(k) = \frac{1}{q} \cdot \frac{1-e^{-2\pi i k N_j/q}}{1-e^{-2\pi i k/q}} \cdot e^{-2\pi i k(M_j+1)/q}.$$

Поэтому

$$\left|\widehat{F}_j(k)\right| = \frac{1}{q} \cdot \frac{|\sin(\pi k N_j/q)|}{|\sin(\pi k/q)|} \leqslant \frac{1}{q|\sin(\pi k/q)|} \leqslant \frac{1}{2|k|} \qquad (-q/2 < k \leqslant q/2; \quad k \neq 0). \tag{17}$$

В соответствии с вышесказанным,

$$\Phi_q(M_1, M_2; N_1, N_2) = \sum_{u=M_1+1}^{M_1+q} \sum_{v=M_2+1}^{M_2+q} \delta_q(uv-l) F_1(u) F_2(v) =$$

$$= \sum_{u=M_1+1}^{M_1+q} \sum_{v=M_2+1}^{M_2+q} \delta_q(uv-l) \sum_{-q/2<m,n\leqslant q/2} \widehat{F}_1(m) \widehat{F}_2(n) e^{2\pi i \frac{mu+nv}{q}} =$$

$$= \sum_{-q/2<m,n\leqslant q/2} \widehat{F}_1(m) \widehat{F}_2(n) K_q(l,m,n).$$

Выделяя слагаемое с $m = n = 0$, получаем равенство

$$\Phi_q(M_1, M_2; N_1, N_2) = \frac{N_1 N_2}{q^2} \cdot K_q(l,0,0) + R_1 + R_2 + R_3,$$

где

$$R_1 = \sum_{-q/2<n\leqslant q/2}{}' \widehat{F}_1(0) \widehat{F}_2(n) K_q(l,0,n),$$

$$R_2 = \sum_{-q/2<m\leqslant q/2}{}' \widehat{F}_1(m) \widehat{F}_2(0) K_q(l,m,0),$$

$$R_3 = \sum_{-q/2<m\leqslant q/2}{}' \sum_{-q/2<n\leqslant q/2}{}' \widehat{F}_1(m) \widehat{F}_2(n) K_q(l,m,n).$$

Здесь и далее штрих в суммах означает, что переменная суммирования не принимает нулевое значение. Пользуясь неравенствами на коэффициенты Фурье (17) и свойствами

3°–4° сумм $K_q(l,m,n)$, приходим к оценкам

$$R_{1,2} \ll \sum_{n=1}^{q} \frac{|K_q(l,0,n)|}{n},$$
$$R_3 \ll \sum_{m,n=1}^{q} \frac{|K_q(l,m,n)| + |K_q(-l,m,n)|}{mn}.$$

Применяя следствия 1 и 3, получаем асимптотическую формулу

$$\Phi_q(M_1,M_2;N_1,N_2) = \frac{N_1N_2}{q^2} \cdot K_q(l,0,0) + O(\psi_l(q)),$$

где функция $\psi_l(q)$ определена равенством (14).

Из определения M_1, M_2, N_1, N_2 и (16) следует, что

$$|P_1P_2 - N_1N_2| = |P_1(P_2-N_2) + N_2(P_1-N_1)| \leqslant 2q.$$

Отсюда, с учетом (13) и (15), окончательно находим

$$\left|\Phi_q(Q_1,Q_2;P_1,P_2) - \frac{P_1P_2}{q^2}K_q(l,0,0)\right| \ll \psi_l(q) + \left|\frac{N_1N_2}{q^2}K_q(l,0,0) - \frac{P_1P_2}{q^2}K_q(l,0,0)\right| \ll$$
$$\ll \psi_l(q) + \frac{K_q(l,0,0)}{q^2}q \ll \psi_l(q).$$

Лемма доказана. □

Замечание 2. *При любом P_1 и $P_2 = q$ те же рассуждения приводят к формуле*

$$\Phi_q(Q_1,Q_2;P_1,P_2) = \frac{P_1}{q}K_q(l,0,0) + O(\sigma_0(q)\sigma_0(a)a).$$

3 Применение метода ван дер Корпута

Лемма 4. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 1$, и на всем отрезке $[P_1,P_2]$ вещественная функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, $f'(x)$ монотонна и $\|f'(x)\| \geqslant \lambda > 0$. Тогда*

$$\sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i f(x)} \ll \lambda^{-1}.$$

Доказательство см. в [8, теорема 2.1].

Лемма 5. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 1$, на всем отрезке $[P_1,P_2]$ вещественная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, и для некоторых $A > 0$, $w \geqslant 1$*

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{A}.$$

Тогда

$$\sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i f(x)} \ll_w \frac{P}{\sqrt{A}} + \sqrt{A}.$$

Доказательство см. в [8, теорема 2.2].

Лемма 6. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 2$, и на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, и для некоторых $A \geqslant P$, $w \geqslant 1$*

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{A}.$$

Тогда при любом натуральном q

$$\sum_{m=1}^{q} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i(\frac{mx}{q} + f(x))} \right| \ll_w q\left(\frac{P}{\sqrt{A}} + \log A\right) + \sqrt{A}.$$

Доказательство. Заметим, что утверждение леммы достаточно доказать для суммы

$$S = \sum_{1 \leqslant m \leqslant q/8} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i(\frac{mx}{q} + f(x))} \right|.$$

Не ограничивая общности можно считать, что $f'' > 0$ и при $x \in [P_1, P_2]$ значения производной функции $f(x)$ лежат внутри отрезка, длина которого не превосходит $1/8$. В противном случае отрезок $[P_1, P_2]$ можно разбить на $O(\frac{P}{A} + 1) = O(1)$ более коротких отрезков, на каждом из которых это условие выполняется. Таким образом, значения производной функции $\frac{mx}{q} + f(x)$ изменяются внутри отрезка, длина которого не превосходит $1/4$. Если этот отрезок содержит полуцелое число, то $\left\|\frac{m}{q} + f'(x)\right\| \geqslant \frac{1}{4}$ и, по лемме 4,

$$S \ll q \ll q\left(\frac{P}{\sqrt{A}} + \log A\right) + \sqrt{A}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда некоторого целого k при $1 \leqslant m \leqslant q/2$ и $x \in [P_1, P_2]$ значения производной функции $\frac{mx}{q} + f(x)$ лежат внутри отрезка $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$, то есть

$$k - \frac{1}{2} \leqslant \frac{m}{q} + f'(x) \leqslant k + \frac{1}{2} \qquad (1 \leqslant m \leqslant q/8, P_1 < x \leqslant P_2).$$

Определим целые числа m_1 и m_2 с помощью условий

$$\frac{m_1}{q} + f'(P_2) \leqslant k - \frac{1}{\sqrt{A}}, \qquad \frac{m_1 + 1}{q} + f'(P_2) > k - \frac{1}{\sqrt{A}};$$
$$\frac{m_2}{q} + f'(P_1) \geqslant k + \frac{1}{\sqrt{A}}, \qquad \frac{m_2 - 1}{q} + f'(P_1) < k + \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Сумму S запишем в виде

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant m < m_1} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i(\frac{mx}{q} + f(x))} \right|,$$

$$S_2 = \sum_{m_1 < m < m_2} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i(\frac{mx}{q} + f(x))} \right|,$$

$$S_3 = \sum_{m_2 \leqslant m \leqslant q/2} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i(\frac{mx}{q} + f(x))} \right|.$$

По лемме 4

$$S_1 \ll \sum_{1 \leqslant m < m_1} \frac{1}{k - \left(\frac{m}{q} + f'(P_2)\right)} < \int_0^{m_1} \frac{dm}{k - \left(\frac{m}{q} + f'(P_2)\right)} \ll q \cdot \log A.$$

Аналогично

$$S_3 \ll \sum_{m_2 < m \leqslant q/2} \frac{1}{\frac{m}{q} + f'(P_1) - k} < \int_{m_2}^{q/2} \frac{dm}{\frac{m}{q} + f'(P_1) - k} \ll q \cdot \log A.$$

К сумме S_2 применим лемму 5:

$$S_2 \ll (m_2 - m_1 + 1)\left(\frac{P}{\sqrt{A}} + \sqrt{A}\right) \ll (m_2 - m_1 + 1)\sqrt{A} \ll$$
$$\ll \left(q\left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{P}{A}\right) + 1\right)\sqrt{A} = q\left(1 + \frac{P}{\sqrt{A}}\right) + \sqrt{A}.$$

Складывая оценки для сумм S_1, S_2 и S_3, приходим к требуемой оценке суммы S. □

4 Доказательство основного результата

Лемма 7 (Формула суммирования Пуассона). *Пусть h — вещественная неотрицательная функция такая, что интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$$

существует как несобственный интеграл Римана. Предположим также, что h не убывает на интервале $(-\infty, 0]$ и не возрастает на $[0, \infty)$ Тогда

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{h(m+0) + h(m-0)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(n),$$

где оба ряда сходятся абсолютно и

$$\widehat{h}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi int}dt$$

— преобразование Фурье функции h.

Доказательство см. в [6, 11.24].

Доказательство теоремы 1. Будем считать, что $A \gg 1$, $\max\{A, q\} \leqslant P^2$ и $\log(Aq) \ll \log P$, поскольку иначе доказываемая оценка хуже тривиальной.

Заметим, что утверждение леммы достаточно доказать в предположении, что график функции $f(x)$ при $x \in [P_1, P_2]$ не проходит через точки целочисленной решетки. Действительно, если это условие не выполнено, то можно выбрать ε в пределах $0 < \varepsilon \leqslant A^{-1/3}$, так что для целых $x \in [P_1, P_2]$ числа $f(x) \pm \varepsilon$ не будут целыми. Если считать, что для функций $f \pm \varepsilon$ равенство (1) выполняется с остаточным членом (2), то, учитывая соотношения

$$T[f - \varepsilon] < T[f] \leqslant T[f + \varepsilon], \qquad S[f \pm \varepsilon] = S[f] + O(PA^{-1/3}),$$

получаем нужную оценку остаточного члена и для функции f.

Можно также предполагать, что $f \geqslant 2q$, поскольку в противном случае от функции f можно перейти к $f+2q$.

Для $\Delta < 1/4$ и действительных α, β ($\beta-\alpha>\Delta$) определим функции

$$\begin{aligned}\psi(\alpha,\beta;x) =&[\alpha < x \leqslant \beta],\\ \psi_{\mp}(\alpha,\beta;x) =&\frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}\psi\left(\alpha\pm\frac{\Delta}{2},\beta\mp\frac{\Delta}{2};x+t\right)dt,\end{aligned}$$

которые, очевидно, связаны неравенствами

$$\psi_-(\alpha,\beta;x)\leqslant\psi(\alpha,\beta;x)\leqslant\psi_+(\alpha,\beta;x).$$

Обозначим через $N(x)$ число решений сравнения $xy\equiv l \pmod q$ относительно неизвестной y, лежащей в пределах $1\leqslant y\leqslant f(x)$. Тогда

$$N_-(x)\leqslant N(x)=\sum_{y=-\infty}^{\infty}\delta_q(xy-l)\psi\left(\frac{1}{2},f(x);y\right)\leqslant N_+(x),$$

где

$$N_{\mp}(x)=\sum_{y=-\infty}^{\infty}\delta_q(xy-l)\psi_{\mp}\left(\frac{1}{2},f(x);y\right)=\sum_{k=1}^{q}\delta_q(xk-l)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\psi_{\mp}\left(\frac{1}{2},f(x);mq+k\right).$$

При любом значении k функции

$$h_{\mp}(m)=\psi_{\mp}\left(\frac{1}{2},f(x);mq+k\right)$$

неотрицательны, непрерывны, интегрируемы по Риману на всей числовой прямой, не убывают на интервале $(-\infty,0]$ и не возрастают на $[0,\infty)$ (напомним, что по предположению, $f\geqslant 2q$). Поэтому к ним применима формула суммирования Пуассона (лемма 7). Значит,

$$\begin{aligned}N_{\mp}(x)&=\sum_{k=1}^{q}\delta_q(xk-l)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{\mp}\left(\frac{1}{2},f(x);qv+k\right)e^{-2\pi inv}dv\right)=\\ &=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\delta_q(xk-l)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{\mp}\left(\frac{1}{2},f(x);u\right)e^{-2\pi in\frac{u-k}{q}}du\right)=\\ &=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\delta_q(xk-l)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\frac{nk}{q}}\widehat{\psi}_{\mp}\left(\frac{1}{2},f(x);\frac{n}{q}\right).\end{aligned}$$

При $n=0$

$$\widehat{\psi}_{\mp}\left(\frac{1}{2},f(x);\frac{n}{q}\right)=f(x)-\frac{1}{2}\mp\Delta.$$

Если же $n\neq 0$, то

$$\widehat{\psi}_{\mp}\left(\frac{1}{2},f(x);\frac{n}{q}\right)=q\cdot t_{\Delta}(N)\frac{e^{-2\pi i\frac{n}{q}(\frac{1}{2}\pm\frac{\Delta}{2})}-e^{-2\pi i\frac{n}{q}(f(x)\mp\frac{\Delta}{2})}}{2\pi in},$$

где
$$t_\Delta(n)=\frac{\sin\frac{\pi n\Delta}{q}}{\frac{\pi n\Delta}{q}},\quad |t_\Delta(n)|\leqslant T_\Delta(n)=\min\left\{1,\frac{q}{|n|\Delta}\right\}.$$
Следовательно,
$$N_\mp(x)=\frac{\mu_{q,l}(x)}{q}\left(f(x)-\frac{1}{2}\mp\Delta\right)+N_\mp^{(1)}(x)+N_\mp^{(2)}(x), \tag{18}$$
где
$$N_\mp^{(1)}(x)=\sum_{k=1}^{q}\delta_q(xk-l)\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' t_\Delta(n)\frac{e^{2\pi i\frac{n}{q}(k-\frac{1}{2}\mp\frac{\Delta}{2})}}{2\pi in},$$
$$N_\mp^{(2)}(x)=\sum_{k=1}^{q}\delta_q(xk-l)\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' t_\Delta(n)\frac{e^{-2\pi i\frac{n}{q}(f(x)\mp\frac{\Delta}{2}-k)}}{2\pi in}.$$

Далее,
$$T_-[f]\leqslant T[f]=\sum_{P_1<x\leqslant P_2}N(x)\leqslant T_+[f],$$
где
$$T_\mp[f]=\sum_{P_1<x\leqslant P_2}N_\mp(x).$$
Согласно замечанию 2
$$\sum_{P_1<x\leqslant P_2}\mu_{q,l}(x)=\frac{P}{q}K_q(l,0,0)+O(\sigma_0(q)\sigma_0(a)a).$$
Поэтому суммирование равенства (18) дает
$$T_\mp[f]=S[f]-\frac{P}{2q^2}K_q(l,0,0)+T_\mp^{(1)}[f]+T_\mp^{(2)}[f]+ \tag{19}$$
$$+O\left(\frac{\Delta P}{q^2}K_q(l,0,0)\right)+O\left(\sigma_0(q)\sigma_0(a)a\right),$$
где
$$T_\mp^{(1,2)}[f]=\sum_{P_1<x\leqslant P_2}N_\mp^{(1,2)}(x).$$

Хорошо известно, что функция
$$r(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\{x\}, & \text{если } x\notin\mathbb{Z};\\ 0, & \text{если } x\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$
имеет следующее разложение в ряд Фурье
$$r(x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi inx}}{n}.$$
Отсюда вытекает, что сглаженная функция
$$g(x)=\frac{q}{\Delta}\int_{-\Delta/(2q)}^{\Delta/(2q)}\left(\frac{1}{2}-\{x+t\}\right)dt$$

представима в виде

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{t_\Delta(n)}{n} \cdot e^{2\pi i n x}.$$

Для $x \in \left(\frac{\Delta}{2q}, 1 - \frac{\Delta}{2q}\right)$

$$g(x) = \frac{1}{2} - x + O\left(\frac{\Delta}{q}\right).$$

Следовательно,

$$N_{\mp}^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l) g\left(\frac{k}{q} - \frac{1}{2q} \mp \frac{\Delta}{2q}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{q} + \frac{1}{2q}\right) + O\left(\frac{\Delta \cdot \mu_{q,l}(x)}{q}\right).$$

Для нахождения $T_{\mp}^{(1)}[f]$ разобьем сумму по переменной x на отрезки, длина которых не превосходит q. Суммы

$$S' = \sum_{x,k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\frac{k}{q} \quad \text{и} \quad S'' = \sum_{x,k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\frac{q-k}{q}$$

связаны соотношениями

$$S' + S'' = K_q(l, 0, 0), \qquad S'' = S' - q\delta_q(l).$$

Значит,

$$S' = \frac{1}{2}\left(K_q(l,0,0) + q\delta_q(l)\right),$$
$$\sum_{x=1}^{q} N_{\mp}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{K_q(l,0,0)}{q} - q\delta_q(l)\right) + O\left(\frac{\Delta \cdot K_q(l,0,0)}{q}\right). \tag{20}$$

Кроме того, применяя к двойным суммам в тождестве

$$\sum_{x=1}^{P'} \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\frac{k}{q} = \sum_{x=1}^{P'} \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l) - \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q} \sum_{x=1}^{P'} \sum_{k=1}^{b-1} \delta_q(xk - l)$$

лемму 3, при $1 \leqslant P' \leqslant q$ получаем

$$\sum_{x=1}^{P'} \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\frac{k}{q} = \frac{P'}{2q} K_q(l,0,0) + O(\psi_l(q)).$$

Отсюда

$$\sum_{x=1}^{P'} N_{\mp}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{q^2} K_q(l,0,0) - P'\delta_q(l)\right) + O(\psi_l(q)) + O\left(\frac{\Delta P' \cdot K_q(l,0,0)}{q^2}\right). \tag{21}$$

Таким образом из (20) и (21) получаем, что

$$\sum_{P_1<x\leqslant P_2} N_{\mp}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{q^2}K_q(l,0,0) - P\delta_q(l)\right) + O(\psi_l(q)) + O\left(\frac{\Delta P\cdot K_q(l,0,0)}{q^2}\right).$$

Подставляя последнюю формулу в (19), приходим к равенству

$$T_{\mp}[f] = S[f] - \frac{P}{2}\delta_q(l) + T_{\mp}^{(2)}[f] + O(\psi_l(q)) + O\left(\frac{\Delta P\cdot K_q(l,0,0)}{q^2}\right). \tag{22}$$

Оценим теперь $T_{\mp}^{(2)}[f]$. Пользуясь соотношением

$$\sum_{k=0}^{q-1}\delta_q(xk-l)e^{-2\pi i\frac{nk}{q}} = \frac{1}{q}\sum_{m=1}^{q}K_q(l,m,n)e^{2\pi i\frac{mx}{q}},$$

запишем величину $N_{\mp}^{(2)}(x)$ в виде

$$N_{\mp}^{(2)}(x) = \frac{1}{q}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' t_\Delta(n)\sum_{m=1}^{q}K_q(l,m,n)\frac{e^{2\pi i(\frac{n}{q}(f(x)\mp\frac{\Delta}{2})-\frac{mx}{q})}}{2\pi i n}.$$

Отсюда

$$|T_{\mp}^{(2)}[f]| \ll \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(n)}{n}\sum_{m=1}^{q}|K_q(l,m,n)|\cdot\left|\sum_{P_1<x\leqslant P_2}e^{2\pi i\frac{mx-nf(x)}{q}}\right|.$$

По лемме 1

$$|T_{\mp}^{(2)}[f]| \ll \frac{\sigma_0(q)\sigma_0(a)}{q^{1/2}}\cdot S,$$

где $a=(l,q)$,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(n)}{n}\sum_{m=1}^{q}(lm,ln,mn,q)^{1/2}\cdot|S_q(m,n)|,$$

$$S_q(m,n) = \sum_{P_1<x\leqslant P_2}e^{2\pi i\frac{mx-nf(x)}{q}}.$$

Положим $\delta=(lm,ln,mn,q)$, $\delta_1=(l,\delta)$ и преобразуем сумму S:

$$S = \sum_{\delta|q}\delta^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(n)}{n}\sum_{m=1}^{q}[(lm,ln,mn)=\delta]\cdot|S_q(m,n)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\delta|q}\delta^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(n)}{n}\left[\frac{\delta}{\delta_1}\mid n\right]\sum_{m=1}^{q}\left[\frac{\delta}{\delta_1}\mid m,\delta\mid mn\right]\cdot|S_q(m,n)|.$$

После замены переменных суммирования $m=\delta m_1/\delta_1$, $n=\delta n_1/\delta_1$ приходим к следующей оценке на сумму S :

$$S \leqslant \sum_{\delta|q}\frac{\delta_1}{\delta^{1/2}}\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(\delta n_1/\delta_1)}{n_1}\sum_{m_1=1}^{\delta_1 q/\delta}\left[\delta_1^2\mid\delta m_1 n_1\right]\cdot|S_q(\delta m_1/\delta_1,\delta n_1/\delta_1)| =$$

$$= \sum_{\delta|q}\frac{\delta_1}{\delta^{1/2}}\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(\delta n_1/\delta_1)}{n_1}\sum_{m_1=1}^{\delta_1 q/\delta}\left[\frac{\delta_1^2}{\delta_2}\mid m_1 n_1\right]\cdot\left|S_{\delta_1 q/\delta}(m_1,n_1)\right|,$$

где $\delta_2 = (\delta_1^2, \delta)$. Далее положим $\delta_3 = (n_1, \delta_1^2/\delta_2)$. Тогда

$$S \leqslant \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta n_1/\delta_1)}{n_1} [(n_1, \delta_1^2/\delta_2) = \delta_3] \sum_{m_1=1}^{\delta_1 q/\delta} \left[\frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} \mid m_1 \right] \cdot \left| S_{\delta_1 q/\delta}(m_1, n_1) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n_2/\delta_1)}{\delta_3 n_2} \sum_{m_2=1}^{\frac{\delta_2\delta_3 q}{\delta\delta_1}} \left| S_{\delta_1 q/\delta}\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} m_2, \delta_3 n_2 \right) \right|,$$

где $n_1 = \delta_3 n_2$, $m_1 = \frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} m_2$. Оценим сумму $S_{\delta_1 q/\delta}\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} m_2, \delta_3 n_2 \right)$. Она зависит от функции

$$F(x) = \left(\frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} m_2 x - \delta_3 n_2 f(x) \right) \frac{\delta}{\delta_1 q},$$

для которой

$$F''(x) = \frac{\delta\delta_3 n_2}{\delta_1 q} f''(x) \asymp \frac{\delta\delta_3 n_2}{\delta_1 q A} = \frac{1}{A_1}, \qquad A_1 = \frac{\delta_1 q A}{\delta\delta_3 n_2}.$$

При $A_1 \geqslant P$ применим лемму 6, а при $A_1 < P$ — лемму 5. Тогда получим, что

$$S \ll S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n/\delta_1)}{\delta_3 n} \left(\frac{\delta_2\delta_3 q}{\delta\delta_1} \left(\frac{P}{A_1^{1/2}} + \log P \right) + A_1^{1/2} \right) [A_1 \geqslant P],$$

$$S_2 = \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n/\delta_1)}{\delta_3 n} \cdot \frac{\delta_2\delta_3 q}{\delta\delta_1} \left(\frac{P}{A_1^{1/2}} + A_1^{1/2} \right) [A_1 < P].$$

Объединяя вместе слагаемые одного вида в суммах S_1, S_2 и пользуясь монотонностью $T_\Delta(n)$, приходим к оценке

$$S \ll S_3 + S_4 + S_5 + S_6, \tag{23}$$

где

$$S_3 = P A^{-1/2} q^{1/2} \sum_{\delta|q} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \frac{\delta_2 \delta_3^{1/2}}{\delta\delta_1^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n/\delta_1)}{n^{1/2}},$$

$$S_4 = q \log P \sum_{\delta|q} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(n)}{n},$$

$$S_5 = A^{1/2} q^{1/2} \sum_{\delta|q} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \frac{\delta_1^{3/2}}{\delta\delta_3^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(n)}{n^{3/2}},$$

$$S_6 = A^{1/2} q^{3/2} \sum_{\delta|q} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \frac{\delta_2 \delta_1^{1/2}}{\delta^2 \delta_3^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n/\delta_1)}{n^{3/2}} \left[n > \frac{\delta_1 q A}{\delta\delta_3 P} \right].$$

Пользуясь неравенством $T_\Delta(n) \leqslant \min\{1, q(\Delta|n|)^{-1}\}$ и рассматривая случаи $b\Delta > q$, $b\Delta \leqslant q$ получаем оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(bn)}{n^{1/2}} \ll \Big(\frac{q}{b\Delta}\Big)^{1/2}.$$

Отсюда

$$S_3 \ll PA^{-1/2}\Delta^{-1/2} q \sum_{\delta|q} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} 1.$$

Так как

$$\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} 1 \leqslant \sum_{\delta_3|\delta_1} 1 \leqslant \sigma_0(a),$$

то, согласно неравенству (10),

$$\sum_{\delta|q} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} 1 \ll \sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a). \tag{24}$$

и

$$S_3 \ll \sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a) PA^{-1/2}\Delta^{-1/2} q. \tag{25}$$

Далее, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(n)}{n} \ll \log P,$$

то согласно (24)

$$S_4 \ll q\log^2 P \sum_{\delta|q} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} \ll q\sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2 P. \tag{26}$$

Для оценки суммы S_5 заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(n)}{n^{3/2}} \ll 1.$$

Поэтому

$$S_5 \ll A^{1/2}q^{1/2} \sum_{\delta|q} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \frac{\delta_1^{3/2}}{\delta\delta_3^{3/2}} \ll A^{1/2}q^{1/2} \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1^{3/2}}{\delta} \ll$$

$$\ll A^{1/2}q^{1/2} \sum_{\delta_1|(q,l)} \delta_1^{3/2} \sum_{\substack{\delta|q \\ (\delta,l)=\delta_1}} \frac{1}{\delta} \ll A^{1/2}q^{1/2}\sigma_{-1}(q)\sigma_{1/2}(a).$$

Следовательно,

$$S_5 \ll A^{1/2}q^{1/2}a^{1/2}\sigma_{-1}(q)\sigma_{-1/2}(a). \tag{27}$$

При любых $N, k > 0$

$$\sum_{n>N} \frac{T_\Delta(kn)}{n^{3/2}} \leqslant \sum_{n>N} \frac{T_\Delta(kN)}{n^{3/2}} \ll \frac{T_\Delta(kN)}{N^{1/2}}.$$

Значит,
$$S_6 \ll P^{1/2} q T_\Delta \left(\frac{Aq}{P}\right) \sum_{\delta|q} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}},$$
и, согласно (24),
$$S_6 \ll \sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a) P^{1/2} q T_\Delta \left(\frac{Aq}{P}\right).$$
Теперь, применяя неравенство
$$T_\Delta\left(\frac{Aq}{P}\right) = \min\left\{1, \frac{P}{\Delta A}\right\} \leqslant \left(\frac{P}{\Delta A}\right)^{1/2},$$
для суммы S_6 получаем оценку аналогичную (25)
$$S_6 \ll \sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a) P A^{-1/2}\Delta^{-1/2} q. \tag{28}$$
Подставляя оценки (25), (26), (27), и (28) в (23), приходим к оценке суммы S и остатка $T_{\mp}^{(2)}[f]$:
$$S \ll \sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a)(PA^{-1/2}\Delta^{-1/2}q + q\log^2 P) + \sigma_{-1}(q)\sigma_{-1/2}(a)A^{1/2}q^{1/2}a^{1/2},$$
$$T_{\mp}^{(2)}[f] \ll \sigma_0(q)\sigma_{-1/2}^2(a)\sigma_0^2(a)(PA^{-1/2}q^{1/2}\Delta^{-1/2}+q^{1/2}\log^2 P)+\sigma_0(q)\sigma_{-1}(q)\sigma_0(a)\sigma_{-1/2}(a)A^{1/2}a^{1/2}.$$
Подставляя последнюю оценку в (22) и пользуясь (13), приходим к равенству (1) с остаточным членом
$$R[f] \ll \Delta P \cdot q^{-1}\sigma_0(a) + a\sigma_0(q)\sigma_0(a)\log(q+1)$$
$$+\sigma_0(q)\sigma_{-1/2}^2(a)\sigma_0^2(a)(PA^{-1/2}q^{1/2}\Delta^{-1/2} + q^{1/2}\log^2 P) + \sigma_0(q)\sigma_{-1}(q)\sigma_0(a)\sigma_{-1/2}(a)A^{1/2}a^{1/2}.$$
Выбор
$$\Delta = qA^{-1/3}\sigma_0^{2/3}(q)\sigma_0^{2/3}(a)\sigma_{-1/2}^{4/3}(a)$$
завершает доказательство теоремы. □

Замечание 3. *При использовании доказанной теоремы, как правило, наибольший вклад дает первое слагаемое из остаточного члена. Поэтому обычно можно использовать упрощенную оценку остаточного члена*
$$R[f] \ll \sigma_0^{2/3}(q)\sigma_0^2(a)PA^{-1/3} + \left(A^{1/2}a^{1/2} + q^{1/2} + a\right)P^\varepsilon. \tag{29}$$

Замечание 4. *При $q = 1$ доказанная теорема превращается в известный результат о числе точек под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции, см. [3, лемма 4], а также [14, задача I.6.4].*

5 Уточнение результата Портера

Лемма 8. *При любом натуральном $b \geqslant 4$ суммы*
$$D_k = \sum_{a|b} \frac{\sigma_0^k(a)}{a} \qquad (k \geqslant 0)$$
удовлетворяет оценке
$$D_k \ll (\log\log b)^{2^k}. \tag{30}$$

Доказательство. Из соотношений

$$\sigma_1(n) = n\sigma_{-1}(n), \qquad \sigma_1(n) \ll n \log\log n$$

(см., например, [9, теорема 323]) следует, что утверждение леммы справедливо для суммы $D_0 = \sigma_{-1}(b)$. Если предположить, что для некоторого $k \geqslant 0$ оценка (30) выполняется, то для $k+1$, соответственно, получаем

$$D_{k+1} = \sum_{a|b} \frac{\sigma_0^k(a)}{a} \sum_{t|a} 1 = \sum_{t|b} \sum_{a_1|b/t} \frac{\sigma_0^k(ta_1)}{ta_1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{t|b} \frac{\sigma_0^k(t)}{t} \sum_{a_1|b/t} \frac{\sigma_0^k(a_1)}{a_1} \leqslant D_k^2 \ll (\log\log b)^{2^{k+1}}$$

□

Доказательство теоремы 2. Будем предполагать, что $\varepsilon < 1/6$. Обозначим через $T_x(b)$ число решений уравнения

$$m_1m_2 + n_1n_2 = b \tag{31}$$

относительно неизвестных

$$1 \leqslant m_1 \leqslant n_1, \qquad 1 \leqslant m_2 \leqslant n_2x.$$

Через $T_x^*(b)$ обозначим число решений уравнения (31), в котором

$$1 \leqslant m_1 \leqslant n_1, \qquad (m_1, n_1) = 1, \qquad 1 \leqslant m_2 \leqslant n_2x.$$

Для суммы

$$N_x(b) = \sum_{a=1}^{b} s^{(x)}(a/b)$$

справедливо равенство (см. доказательство леммы 3 в работе [4])

$$N_x(b) = 2T_x^*(b) + b\left(x \cdot [x<1] - \frac{x}{x+1}\right) + O(1).$$

Величины $N_x(b)$ и $T_x(b)$ связаны с $N_x^*(b)$ и $T_x^*(b)$ формулой обращения Мебиуса

$$N_x^*(b) = \sum_{d|b} \mu(d) N_x(b/d), \quad T_x^*(b) = \sum_{d|b} \mu(d) T_x(b/d).$$

Поэтому

$$N_x^*(b) = 2\sum_{d_1d_2|b} \mu(d_1)\mu(d_2) T_x\left(\frac{b}{d_1d_2}\right) + \varphi(b)\left(x \cdot [x<1] - \frac{x}{x+1}\right) + O(b^{\varepsilon}). \tag{32}$$

Для вычисления $T_x(b)$ введем параметр $U = (b\log b)^{1/2}$ и разобьем все решения уравнения (31) на две группы. К первой отнесем те, для которых $n_1 < U$, а ко второй — все остальные. Соответственно $T_x(b)$ представится в виде

$$T_x(b) = T_1(b, U) + T_2(b, U). \tag{33}$$

Найдем сначала асимптотическую формулу для $T_1(b,U)$. Заметим, что при фиксированном n_1 переменные m_1 и m_2 удовлетворяют сравнению

$$m_1 m_2 \equiv b \pmod{n_1} \tag{34}$$

Для известных n_1, m_1 и m_2 значение n_2 уже находится однозначно:

$$n_2 = \frac{b - m_1 m_2}{n_1}.$$

Ограничение $m_2 \leqslant n_2 x$ равносильно неравенству

$$m_2 \leqslant \frac{bx}{n_1 + m_1 x} = f_{n_1}(m_1). \tag{35}$$

Таким образом, задача сводится к подсчету числа решений сравнения (34), в котором переменные удовлетворяют ограничениям

$$0 < m_1 \leqslant n_1, \qquad m_2 \leqslant f_{n_1}(m_1).$$

Применим теорему 1 с $P_1 = 0$, $P_2 = n_1$, $f = f_{n_1}$ и упрощенной оценкой остаточного члена из замечания 3. С учетом того, что

$$f''_{n_1}(m_1) \asymp \frac{b}{n_1^3}$$

находим

$$T[f_{n_1}] = S[f_{n_1}] - \frac{n_1}{2} \cdot \delta_{n_1}(b) + R[f_{n_1}].$$

Отсюда

$$T_1(b,U) = \sum_{n_1<U} T[f_{n_1}] = S_1(b,U) + R_1(b,U) + O(b^{1/2+\varepsilon}), \tag{36}$$

где

$$S_1(b,U) = \sum_{n_1<U} S[f_{n_1}] = \sum_{n_1<U} \frac{1}{n_1} \sum_{m_1 \leqslant n_1} \mu_{n_1,b}(m_1) f_{n_1}(m_1), \tag{37}$$

$$R_1(b,U) = \sum_{n_1<U} R[f_{n_1}] \ll b^{1/3} \sum_{n_1<U} \sigma_0^{2/3}(n_1)\sigma_0^2(a_1) + b^{\varepsilon} \sum_{n_1<U} \left(n_1^{3/2} a_1^{1/2} b^{-1/2} + n_1^{1/2} + a_1 \right), \tag{38}$$

и $a_1 = (n_1, b)$. Применяя оценку $\sigma_0(xy) \leqslant \sigma_0(x)\sigma_0(y)$ и неравенство Гёльдера, находим

$$\sum_{n_1<U} \sigma_0^{2/3}(n_1)\sigma_0^2(a_1) \leqslant \sum_{a_1|b} \sigma_0^2(a_1) \sum_{n<U/a_1} \sigma_0^{2/3}(na_1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{a_1|b} \sigma_0^3(a_1) \left(\sum_{n<U/a_1} \sigma_0(n) \right)^{2/3} (U/a_1)^{1/3} \ll U \log^{2/3} b \sum_{a_1|b} \frac{\sigma_0^3(a_1)}{a_1}$$

Далее, применяя лемму 8, приходим к неравенству

$$b^{1/3} \sum_{n_1<U} \sigma_0^{2/3}(n_1)\sigma_0^2(a_1) \ll b^{5/6} \log^{7/6+\varepsilon/2} b$$

Остальные слагаемые, входящие в формулу для $R_1(b,U)$ при $\varepsilon < 1/6$ дают меньший вклад:

$$b^{-1/2+\varepsilon}\sum_{n_1<U} n_1^{3/2}a_1^{1/2} \ll b^{-1/2+\varepsilon}\sum_{a_1|b} a_1^{1/2}\sum_{n<U/a_1}(a_1 n)^{3/2} \ll$$
$$\ll b^{-1/2+\varepsilon}U^{5/2}\sum_{a_1|b} a_1^{-1/2} \ll b^{3/4+2\varepsilon},$$

$$b^{\varepsilon}\sum_{n_1<U} n_1^{1/2} \ll b^{\varepsilon}U^{3/2} \ll b^{3/4+2\varepsilon},$$

$$b^{\varepsilon}\sum_{n_1<U} a_1 \ll b^{\varepsilon}\sum_{a_1|b} a_1 \sum_{n<U/a_1} 1 \leqslant b^{\varepsilon}U\sigma_{-1}(b) \ll b^{1/2+2\varepsilon}.$$

Таким образом,
$$T_1(b,U) = S_1(b,U) + O(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b) \tag{39}$$
Для нахождения $S_1(b,U)$ рассмотрим сначала сумму

$$\Phi(U) = \sum_{n<U}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\frac{x}{n+mx}.$$

Ее можно переписать в виде

$$\Phi(U) = \log(1+x)\sum_{n<U}\frac{1}{n} + \sum_{n<U}\frac{1}{n}\left(\sum_{m\leqslant n}\frac{x}{n+mx} - \log(1+x)\right) =$$
$$= \log(1+x)(\log U + \gamma) + h_1(x) + O(U^{-1}),$$

где $h_1(x)$ определено равенством (4). Отсюда для суммы

$$\Phi^*(U) = \sum_{n\leqslant U}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}{}^{*}\frac{x}{n+mx}$$

по формуле обращения Мёбиуса

$$\Phi^*(U) = \sum_{d\leqslant U}\frac{\mu(d)}{d^2}\cdot\Phi\left(\frac{U}{d}\right)$$

получаем следующую асимптотическую формулу

$$\Phi^*(U) = \frac{\log(1+x)}{\zeta(2)}\left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \frac{h_1(x)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log(U+1)}{U}\right). \tag{40}$$

Подставляя
$$\mu_{n_1,b}(m_1) = d_1\cdot\delta_{d_1}(b),$$
где $d_1 = (m_1,n_1)$, в равенство (37) после замен $m_1 = d_1 m$, $n_1 = d_1 n$, получаем

$$S_1(b,U) = \sum_{n_1<U}\frac{1}{n_1}\sum_{m_1\leqslant n_1}\frac{bx}{n_1+m_1x}d_1\cdot\delta_{d_1}(b) =$$
$$= \sum_{d_1|b}\frac{b}{d_1}\sum_{n<U/d_1}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}{}^{*}\frac{x}{n+mx} = \sum_{d|b}\frac{b}{d}\Phi^*\left(\frac{U}{d}\right).$$

Пользуясь (40), находим

$$S_1(b,U) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{d|b} \frac{b}{d} \left(\log(1+x) \left(\log \frac{U}{d} + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + h_1(x) \right) + O\left(b^{1/2+\varepsilon}\right) \tag{41}$$

Подставляя (41) в (39), приходим к асимптотической формуле для $T_1(b,U)$:

$$T_1(b,U) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{d|b} \frac{b}{d} \left(\log(1+x) \left(\log \frac{U}{d} + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + h_1(x) \right) + O\left(b^{5/6} \log^{7/6+\varepsilon} b\right). \tag{42}$$

Для нахождения $T_2(b,U)$ аналогично заметим, что при фиксированном n_2 переменные m_1 и m_2 удовлетворяют сравнению

$$m_1 m_2 \equiv b \pmod{n_2}. \tag{43}$$

Для известных n_2, m_1 и m_2 значение n_1 определяется однозначно:

$$n_1 = \frac{b - m_1 m_2}{n_2}.$$

Ограничение $\max\{m_1, U\} \leqslant n_1$ равносильно неравенству

$$m_1 \leqslant \min\left\{ \frac{b}{m_2+n_2},\ \frac{b - Un_2}{m_2} \right\} = g_{n_2}(m_2)$$

Разобьем интервал $I = (0, n_2]$, внутри которого меняется переменная m_2, на более короткие интервалы точками $1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^k$ ($k = [\log_2 n_2]$) и добавим к разбиению точку $m_0 = \frac{b}{U} - n_2$, в которой функция g_{n_2} может быть недифференцируема:

$$I = \bigsqcup_{j=1}^{k'} I_j \qquad (k' = k+2).$$

Будем предполагать, что

$$g_{n_2}(m_2) = \begin{cases} \dfrac{b}{m_2+n_2}, & \text{если } \ m_2 \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{k''} I_j; \\ \dfrac{b - Un_2}{m_2}, & \text{если } \ m_2 \in \bigsqcup\limits_{j=k''+1}^{k'} I_j, \end{cases}$$

где $0 \leqslant k'' \leqslant k'$. На каждом из интервалов I_j к функции g_{n_2} применим теорему 1. Тогда для всего интервала I получим

$$T[g_{n_2}] = S[g_{n_2}] + R''[g_{n_2}] + R'[g_{n_2}] + O\left(b^{1+\varepsilon} U^{-1}\right),$$

где

$$S[g_{n_2}] = \frac{1}{n_2} \sum_{1 \leqslant m_2 \leqslant n_2} \mu_{n_2,b}(m_2) g_{n_2}(m_2),$$

$$R''[g_{n_2}] = \sum_{j=1}^{k''} R^{(j)}[g_{n_2}], \qquad R'[g_{n_2}] = \sum_{j=k''+1}^{k'} R^{(j)}[g_{n_2}],$$

и $R^{(j)}[g_{n_2}]$ — остаток, который получается в теореме 1 на интервале I_j.

Для $j=1,\ldots,k''$ на интервале I_j

$$g_{n_2}(m_2)\asymp\frac{b}{n_2^3}.$$

Поэтому сумма остатков $R''[g_{n_2}]$ оценивается аналогично сумме (38) (с заменой U на b/U):

$$\sum_{n_2\leqslant b/U}R''[g_{n_2}]\ll b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}b. \tag{44}$$

Если же $j=k''+1,\ldots,k'$, то на промежутке I_j

$$g''_{n_2}(m_2)\asymp\frac{b-Un_2}{m_2^3}\asymp\frac{b-Un_2}{2^{3j}}.$$

Значит, согласно оценке (29),

$$R^{(j)}[g_{n_2}]\ll\sigma_0^{2/3}(n_2)\sigma_0^2(a_2)b^{1/3}+b^{\varepsilon/2}\left(2^{3j/2}a_2^{1/2}b^{-1/2}+n_2^{1/2}+a_2\right),$$

где $a_2=(n_2,b)$. Следовательно,

$$R'[g_{n_2}]=\sum_{j=k''+1}^{k'}R^{(j)}[g_{n_2}]\ll\sigma_0^{2/3}(n_2)\sigma_0^2(a_2)\log b\cdot b^{1/3}+b^{\varepsilon}\left(n_2^{3/2}a_2^{1/2}(b-Un_2)^{-1/2}+n_2^{1/2}+a_2\right).$$

Отсюда, как и в случае остатка $R[f_{n_1}]$, приходим к оценке

$$\sum_{n_2\leqslant b/U-2}R'[g_{n_2}]\ll b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}b. \tag{45}$$

Если значение переменной $n_2>b/U-2$ фиксировано. ТО n_1 может принимать не более $b^{1/2+\varepsilon/2}$ значений, а при фиксированных n_1, n_2 существует не более $\sigma_0(b-n_1n_2)\ll b^{\varepsilon/2}$ значений m_1 и m_2. Поэтому, с учетом оценок (44), (45), получаем

$$T_2(b,U)=\sum_{n_2\leqslant b/U}T[g_{n_2}]=\sum_{n_2\leqslant b/U-2}T[g_{n_2}]+O(b^{1/2+\varepsilon})=S_2(b,U)+O(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}b),$$

где

$$S_2(b,U)=\sum_{n_2\leqslant b/U}\frac{1}{n_2}\sum_{m_2\leqslant n_2}\mu_{n_2,b}(m_2)g_{n_2}(m_2).$$

Как и в случае суммы $S_1(b,U)$ после подстановки

$$\mu_{n_2,b}(m_2)=d_2\cdot\delta_{d_2}(b),\qquad d_2=(m_2,n_2),$$

сумма $S_2(b,U)$ перепишется в виде

$$S_2(b,U)=\sum_{d|b}\frac{b}{d}\sum_{n\leqslant b/(dU)}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant nx}{}^{*}\min\left\{\frac{1}{m+n},\,\frac{1}{m}-\frac{dUn}{bm}\right\}=\sum_{d|b}\frac{b}{d}\cdot F_x^*\left(\frac{b}{dU}\right),$$

где

$$F_x^*(\xi)=\sum_{n\leqslant\xi}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant nx}{}^{*}\min\left\{\frac{1}{m+n},\,\frac{1}{m}-\frac{n}{m\xi}\right\}.$$

Для суммы $F_x^*(\xi)$ верна следующая асимптотическая формула (см. [4, лемма 10])

$$F_x^*(\xi) = \frac{\log(x+1)}{\zeta(2)}\log\xi + \frac{H(x)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log^2(\xi+1)}{\xi}\right),$$

в которой

$$H(x) = \log(1+x)\left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(x+1)}{2} + \gamma - 1\right) + h_2(x),$$

и $h_2(x)$ определено равенством (5). Поэтому

$$S_2(b,U) = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|b}\frac{b}{d}\left(\log(x+1)\log\frac{b}{dU} + H(x)\right) + O(b^{1/2+\varepsilon}).$$

$$T_2(b,U) = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|b}\frac{b}{d}\left(\log(x+1)\log\frac{b}{dU} + H(x)\right) + O(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b).$$

Подставляя последнее равенство и (42) в (33) приходим к асимптотической формуле для $T_x(b)$:

$$T_x(b) = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|b}\frac{b}{d}\left(\log(x+1)\log\frac{b}{d^2} + C_1(x)\right) + O(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b),$$

где

$$C_1(x) = H(x) + \log(1+x)\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + h_1(x).$$

Подставим полученный результат в (32). Тогда, с учетом соотношений (см. [11])

$$\sum_{dd_1d_2|b}\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{dd_1d_2} = \frac{\varphi(b)}{b},$$

$$\sum_{dd_1d_2|b}\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{dd_1d_2}\log(d_1d_2d^2) = 0,$$

находим

$$\sum_{d_1d_2|n}\mu(d_1)\mu(d_2)T_x\left(\frac{b}{d_1d_2}\right) = \frac{\varphi(b)}{\zeta(2)}(\log(x+1)\log b + C_1(x)) + O(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b).$$

$$N_x^*(b) = \frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)}(\log(x+1)\log b + C(x)) + O(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b),$$

где $C(x)$ определено равенством (3). Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Авдеева М. О. Распределение неполных частных в конечных цепных дробях. — Владивосток: Дальнаука, 2000, препринт ДВО РАН, ХО ИПМ №4.

[2] Быковский В. А. Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2), удовлетворяющих сравнению $a_1a_2 \equiv l \pmod q$. — *Записки научных семинаров ЛОМИ* **112** (1981), 5–25.

[3] Виноградов И. М. *Особые варианты метода тригонометрических сумм.* — М.: Наука, 1976.

[4] Устинов А. В. О статистических свойствах конечных цепных дробей. — *Записки научн. семин. ПОМИ*, **322** (2005), 186–211.

[5] Устинов А. В. Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида. — *Изв. РАН*, в печати.

[6] Apostol T. M. *Mathematical analysis* — Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1974.

[7] Estermann T. On Kloosterman's sum. — *Mathematika*, v. 8 (1961), 83–86.

[8] Graham S. W., Kolesnik G. *van der Corput's method of exponential sums.* — Cambridge University Press, 1991.

[9] Hardy G. H., Write E. M. *An Introduction to the Number Theory.* — Clarendon Press, Oxford, 1979.

[10] Heath-Brown D. R. The fourth power moment of the Riemann zeta function Proc. — *London Math. Soc.* (3), 1979, 38, 385–422.

[11] Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions. — *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis*, Berlin, VEB (1968), 89–96.

[12] Hooley C. On the number of divisors of a quadratic polynomial. *Acta Math.*, 110 (1963), 97–114.

[13] Porter J. W. On a theorem of Heilbronn. — *Mathematika*, 1975, v. 22, № 1, 20–28.

[14] Tenenbaum G. *Introduction to analytic and probabilistic number theory.* — Cambridge University Press, 1995.