Дальневосточное отделение Российской Академии наук

Институт прикладной математики
Хабаровское отделение

На правах рукописи

УСТИНОВ Алексей Владимирович

Приложения оценок сумм Клостермана к некоторым задачам метрической и аналитической теории чисел

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант: чл.-корр. РАН
БЫКОВСКИЙ Виктор Алексеевич

Хабаровск
2008

Содержание

Обозначения и соглашения

1. Записи

$$f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \qquad \text{и} \qquad f(x) \ll g(x)$$

означают, что во всей области определения для некоторой абсолютной положительной константы c выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c \cdot g(x)$. Если $c = c(\theta)$ (константа зависит от некоторого параметра θ), то будем писать

$$f(x) = \mathrm{O}_\theta(g(x)) \qquad \text{и} \qquad f(x) \ll_\theta g(x).$$

2. Для конечного множества M через $\#M$ будет обозначаться число элементов M.
3. $\|x\|$ — расстояние от вещественного x до ближайшего целого числа:

$$\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |n - x|.$$

4. Запись $[x_0; x_1, \ldots, x_s]$ означает цепную дробь

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{x_s}}}$$

длины s с формальными переменными x_0, x_1, $\ldots$, x_s.

5. Для рационального r обычно (если не сделано дополнительных оговорок) будет использоваться каноническое разложение в цепную дробь $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ длины $s = s(r)$, где $t_0 = [r]$ (целая часть r), t_1, $\ldots$, t_s — неполные частные (натуральные числа) и $t_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$.
6. Через $s_1(r)$ будем обозначать сумму неполных частных числа r:

$$s_1(r) = t_0 + t_1 + \ldots + t_s.$$

7. Для рационального r, записанного в виде несократимой дроби, через $p(r)$ и $q(r)$ будем обозначать числитель и знаменатель этой дроби соответственно.
8. Для $x \in [0, 1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$, $s^{(x)}(r)$ есть количество номеров $j \in \{1, \ldots, s\}$, для которых выполняется неравенство $[0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x$ (статистики Гаусса-Кузьмина). В частности, длина цепной дроби $s = s(r) = s^{(1)}(r)$.

9. Функция Мебиуса $\mu : \mathbb{N} \to \{0, \pm 1\}$: $\mu(1) = 1$; $\mu(q) = 0$, если q делится на квадрат натурального, большего 1; $\mu(q) = (-1)^t$, где t есть количество простых делителей бесквадратного q.
10. Круглые скобки будут использоваться для обозначения наибольшего общего делителя: $(a_1, \dots, a_n) = \text{НОД}(a_1, \dots, a_n)$.
11. Функция Эйлера:

$$\varphi(q) = \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} 1 = q \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d}.$$

12. Обозначение $K_n(x_1, \dots, x_n)$ используется для континуантов, которые определяются начальными условиями

$$K_0() = 1, \quad K_1(x_1) = x_1$$

и рекуррентным соотношением ($n \geqslant 2$)

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}).$$

13. $\mathcal{M}$ — множество всех целочисленных матриц $S = \left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right)$ с определителем ± 1, у которых $1 \leqslant Q \leqslant Q'$, $0 \leqslant P \leqslant Q$, $1 \leqslant P' \leqslant Q'$. Через $\mathcal{M}(R)$ будет обозначаться множество матриц $S \in \mathcal{M}$, для которых $Q' \leqslant R$.
14. $\mathcal{N}$ — множество пар $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ таких, что $0 < n < m$ и $(m, n) = 1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(R) =& \{(m, n) \in \mathcal{N} : \sqrt{m^2 + n^2} \leqslant R\}, \\ \mathcal{N}_t(R) =& \{(m, n) \in \mathcal{N}(R) : n/m \leqslant t\}. \end{aligned}$$

15. Знак звездочки в двойных суммах вида

$$\sum_n \sum_m{}^{*} \dots$$

означает, что переменные, по которым проводится суммирование, связаны дополнительным условием $(m, n) = 1$.
16. Если A — некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае.
17. $\chi_I(x) = [x \in I]$ — характеристическая функция промежутка I на прямой $(-\infty, \infty)$.
18. Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q:

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod p] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

19. Постоянная Эйлера

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

20. Конечные разности функций одной и двух переменных:

$$\Delta a(u) = a(u+1) - a(u),$$

$$\Delta_{1,0} a(u,v) = a(u+1,v) - a(u,v), \quad \Delta_{0,1} a(u,v) = a(u,v+1) - a(u,v),$$

$$\Delta_{1,1} a(u,v) = \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0} a(u,v)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1} a(u,v)).$$

21. Сумма степеней делителей

$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

22. Дилогарифм Эйлера

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt.$$

23. Повторные интегралы будут записываться в виде

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

24. Золотое сечение

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

25. $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$.

Предисловие

В первой половине XX века в основополагающих работах А. Я. Хинчина, Р. О. Кузьмина, П. Леви и других авторов была создана метрическая теория чисел — одно из самых актуальных направлений теории чисел. При этом были разработаны теоретико-вероятностные и эргодические методы, позволившие получить целый ряд фундаментальных результатов, касающихся статистических свойств элементов цепных дробей. Во второй половине XX века этот подход нашёл широкое применение при изучении алгоритма Евклида и других задач.

В настоящей диссертации развиваются новые методы исследования задач метрической теории цепных дробей, основанные на оценках сумм Клостермана. Они позволяют в ряде случаев не только существенно усилить известные результаты, но и решить новые теоретико-числовые задачи, возникающие в статистической физике. К основным можно отнести следующие результаты диссертации:

1) для действительных чисел изучено поведение в среднем количества знаменателей подходящих дробей, не превосходящих данной границы. Для первого и второго момента доказаны принципиально новые оценки остаточных членов в асимптотических формулах, уточняющие полученные ранее теоретико-вероятностными методами;

2) в задаче Арнольда о статистиках Гаусса-Кузьмина для конечных цепных дробей доказана асимптотическая формула с двумя значащими членами и степенным понижением в остатке. Как следствие доказана независимость главного члена от формы рассматриваемой области;

3) получены принципиально новые оценки остаточных членов в асимптотических формулах для первого и второго моментов числа шагов в алгоритме Евклида;

4) в задаче Синая о статистических свойствах траекторий частиц, движущихся в двумерной кристаллической решетке, исследован неоднородный случай, когда траектории начинаются в окрестности целочисленной точки. Найдена плотность совместного распределения длины свободного пробега и прицельного параметра (расстояния от траектории до центра первой пересеченной окрестности). В остаточном члене асимптотической формулы для плотности получено корневое понижение.

Введение

Асимптотические свойства целочисленных решений уравнения

$$x_1y_1 + x_2y_2 = n \tag{0.1}$$

лежат в основе различных теоретико-числовых результатов. При фиксированном значении одной из переменных, например, y_2, переменные x_1, y_1 оказываются связаны сравнением

$$x_1y_1 \equiv n \pmod{y_2}. \tag{0.2}$$

Наличие нетривиальных оценок на суммы Клостермана

$$K_q(a,b) = \sum_{x,y=0}^{q-1} \delta_q(xy-1) \cdot e^{2\pi i \frac{ax+by}{q}}, \tag{0.3}$$

согласно критерию Вейля, означает равномерность распределения решений сравнения (0.2). Это наблюдение позволяет находить асимптотические формулы для сумм вида

$$\sum_{x_1y_1+x_2y_2=n} f(x_1, y_1, x_2, y_2).$$

Частным случаем уравнения (0.1) является соотношение $bc - ad = 1$, которому удовлетворяют числители и знаменатели последовательных дробей $a/b < c/d$ ряда Фарея. Для фиксированного знаменателя d и числителя c ($0 \leqslant c \leqslant d$, $(c,d) = 1$) длина отрезка $[a/b, c/d]$

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$$

определяется величиной $b \equiv c^{-1} \pmod{d}$. Равномерность распределения пар (b,c), для которых $bc \equiv 1 \pmod{d}$, позволяет описать распределение длин отрезков между соседними дробями в ряде Фарея, что приводит к более точному варианту кругового метода Харди–Литтлвуда (см. работу Клостермана [**54**]).

Ещё одним важным вопросом, в котором возникает уравнение (0.1), является аддитивная проблема делителей, связанная с асимптотическим поведением сумм

$$\sum_{k \leqslant T} \sigma_0(k)\sigma_0(k+n).$$

К ним сводится подсчёт четвертого момента ζ-функции Римана на критической прямой (см. статью Хис-Брауна [**47**], а также обзор [**52**]).

Хейльбронн в работе [**49**] установил связь уравнения (0.1) с конечными цепными дробями. Благодаря этому ему удалось доказать асимптотическую формулу для среднего числа шагов в алгоритме Евклида (см. далее раздел 0.3 введения).

О других арифметических приложениях уравнения (0.1) и сумм Клостермана см. обзор [**48**].

В основе результатов диссертации наряду с уравнением (0.1) лежат асимптотические свойства решений неравенств

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant R,$$
$$x_1(ay_1 + by_2) + x_2(cy_1 + dy_2) \leqslant R,$$

где R — растущий параметр и $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \pm 1$. Второе из них также анализируется с помощью оценок сумм Клостермана. В рамках такого подхода удается получить новые результаты и существенно уточнить уже известные, доказанные ранее эргодическими методами.

0.1. О задачах метрической теории цепных дробей

Хорошо известно, что любое вещественное число α каноническим способом раскладывается в цепную (непрерывную) дробь

$$\alpha = [q_0; q_1, \ldots, q_n, \ldots] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ddots + \cfrac{1}{q_n + \ddots}} \tag{0.4}$$

с целой частью $q_0 = [\alpha]$ и неполными частными $q_n = q_n(\alpha) \in \mathbb{N}$ при $n \geqslant 1$. Она конечна только для рациональных $\alpha = [q_0; q_1, \ldots, q_s]$, и в этом случае при $s \geqslant 1$ последнее неполное частное q_s больше 1. По определению,

$$P_n = P_n(\alpha) \quad \text{и} \quad Q_n = Q_n(\alpha) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

— числитель (целое) и знаменатель (натуральное) несократимой n-ой подходящей к α дроби

$$\frac{P_n}{Q_n} = [q_0; q_1, \ldots, q_n].$$

При этом $P_0 = q_0$ и $Q_0 = 1$.

В метрической теории чисел ряд задач посвящен статистическим свойствам цепных дробей. Например, для действительных чисел α удается описать типичное поведение неполных частных в представлении (0.4), рост знаменателей $Q_n(\alpha)$ и порядок аппроксимации α подходящими дробями $P_n(\alpha)/Q_n(\alpha)$ (см. [**32**]).

Пусть $x \in [0, 1]$ — фиксированное действительное число и

$$\alpha_n = T^n(\alpha) = [0; q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots],$$

где $T(\alpha)$ — отображение Гаусса, переводящее в себя отрезок $[0, 1]$:

$$T(\alpha) = \left\{\frac{1}{\alpha}\right\} \text{ при } \alpha \neq 0, \qquad T(0) = 0.$$

Обозначим через $F_n(x)$ меру множества всех иррациональных чисел α, для которых $\alpha_n \leqslant x$. Гаусс исследовал итерации отображения T и пришел к следующей гипотезе:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \log_2(1+x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}$$

(об этом известно из переписки Гаусса с Лапласом, см. [**15**, глава 3]). Лишь в 1928 году появилась работа Кузьмина [**57**] с доказательством асимптотической формулы

$$F_n(x) = \log_2(1+x) + O(e^{-\lambda\sqrt{n}}),$$

где λ — некоторая абсолютная положительная константа. В качестве следствия теоремы Кузьмина легко получить асимптотическую формулу для меры множества точек, для которых $q_n = k$:

$$p_k(n) = F_n\left(\frac{1}{k}\right) - F_n\left(\frac{1}{k+1}\right) = p_k + O(e^{-\lambda\sqrt{n}}),$$

где

$$p_k = \log_2\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right). \tag{0.5}$$

Более сильный результат (экспоненциальную скорость сходимости) в этом направлении получил французский математик П. Леви (1929, [**58**]). Вирзинг (1974, [**77**]) указал явно скорость сходимости:

$$F_n(x) - \log_2(1+x) \asymp \lambda_1^n$$

с абсолютной константой $\lambda_1 = -0.30366\ldots$ (впоследствии названной константой Вирзинга). Окончательное решение задачи Гаусса принадлежит Бабенко (1978, [**8**]). Он доказал существование бесконечной убывающей к нулю последовательности чисел λ_j

$$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_k| \geqslant |\lambda_{k+1}| \geqslant \ldots$$

и соответствующей последовательности аналитических функций $\psi_k(x)$, для которых

$$F_n(x) = \log_2(1+x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)\lambda_k^n$$

(о вычислении чисел λ_1, λ_2, … см. [**7, 9**]).

Изучение свойств отображения Гаусса T основано на спектральных свойствах оператора

$$G_s[f](z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+z)^{2s}} \cdot f\left(\frac{1}{m+z}\right)$$

(например, при $s = 1$ такой оператор используется в доказательстве теоремы Кузьмина, см. [**32**]). Ключевую роль здесь играет его доминирующее собственное значение $\lambda(s)$. Про эту функцию известно, что она определена и аналитична в области $\operatorname{Re} s > 1/2$ и положительна для действительных

$s > 1/2$. В частности, теорема Кузьмина означает, что $\lambda(1) = 1$ и соответствующей собственной функцией является плотность Гаусса $\log_2(1 + x)$. Число

$$-\lambda'(1) = \frac{\zeta(2)}{\log 2}$$

известно как константа Леви, а число $\lambda''(1)$, для которого представление через арифметические постоянные не известно, — как константа Хенсли.

Оператор G_s также связан с поведением случайной величины $X_n = \log Q_n(\alpha)$, где $Q_j(\alpha)$ — знаменатель j-ой подходящей дроби к числу α, которое выбирается случайно из отрезка $[0, 1]$ (см. работы Ибрагимова [**17**], Филиппа [**65**]–[**67**], а также обзор [**43**]). Для X_n доказана центральная предельная теорема:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{D_1 \cdot n}} \leqslant t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Кроме того, для математического ожидания и дисперсии X_n известны двучленные асимптотические формулы

$$E(X_n) = \overline{E}_1 \cdot n + \overline{E}_0 + O(\lambda_1^n),$$
$$D(X_n) = \overline{D}_1 \cdot n + \overline{D}_0 + O(\lambda_1^n),$$

где

$$\overline{E}_1 = -\frac{\lambda'(1)}{2}, \quad \overline{D}_1 = \frac{\lambda''(1) - \lambda'(1)^2}{4}$$

и λ_1 — константа Вирзинга.

0.2. О числе знаменателей цепных дробей, не превосходящих данной границы

В главе 1 диссертации исследуется случайная величина, которая, как и X_n, отвечает за рост знаменателей подходящих дробей. Для иррационального $\alpha \in [0, 1]$ через $E(\alpha, R)$ будем обозначать число

$$E(\alpha, R) = \#\left\{j \geqslant 1 : Q_j(\alpha) \leqslant R\right\}.$$

Величину $E(\alpha, R)$ можно считать непрерывным аналогом длины конечной цепной дроби $s(\alpha)$, которая будет изучаться в главе 2 диссертации.

Рассмотрим среднее значение $E(\alpha, R)$

$$\widetilde{E}(R) = \int_0^1 E(\alpha, R)\, d\alpha$$

и дисперсию

$$\widetilde{D}(R) = \int_0^1 (E(\alpha, R) - \widetilde{E}(R))^2\, d\alpha = \int_0^1 E^2(\alpha, R)\, d\alpha - \widetilde{E}^2(R).$$

Для них доказываются асимптотические формулы с двумя значащими членами и степенными понижениями в остаточных членах.

Теорема 1. *При* $R \geqslant 2$

$$\widetilde{E}(R) = \widetilde{E}_1 \cdot \log R + \widetilde{E}_0 + O\left(\frac{\log R}{R}\right), \tag{0.6}$$

где

$$\widetilde{E}_1 = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}, \qquad \widetilde{E}_0 = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\log 2 + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) - \frac{3}{2}.$$

Теорема 2. *При* $R \geqslant 2$

$$\widetilde{D}(R) = \widetilde{D}_1 \cdot \log R + \widetilde{D}_0 + O(R^{-1/3}\log^4 R),$$

где $\widetilde{D}_1$, $\widetilde{D}_0$ *— абсолютные константы.*

Константа $\widetilde{E}_1$ в главном члене для математического ожидания очевидным образом связана с константой Леви $-\lambda'(1)$. Константа $\widetilde{D}_1$ выражается через сумму абсолютно сходящегося ряда, и впоследствии выясняется, что она связана с константой Хенсли.

Задача о вычислении $\widetilde{E}(R)$ и $\widetilde{D}(R)$ является более простой, чем её дискретный вариант (см. теоремы 3–4). В то же время доказательства теорем 1–2 могут служить иллюстрацией ключевых идей, которые будут применяться при анализе конечных цепных дробей.

0.3. О статистических свойствах алгоритма Евклида

Детальный анализ алгоритма Евклида приводит к различным задачам о статистических свойствах конечных цепных дробей (см. [**20**, разд. 4.5.3]). Если на вход алгоритма подается пара натуральных чисел c и d ($c < d$), то основной интерес представляет число выполняемых делений с остатком, которое совпадает с $s = s(c/d)$ — количеством неполных частных в цепной дроби

$$c/d = [0; t_1, \ldots, t_s].$$

Впервые вопрос о поведении величины $s(c/d)$ в среднем был исследован Хейльбронном. В 1968 г., сводя задачу к уравнению (0.1) с $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, $1 \leqslant y_1 \leqslant y_2$, элементарными методами он доказал асимптотическую формулу (см. [**49**])

$$\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{1\leqslant c\leqslant d\\ (c,d)=1}} s(c/d) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)} \cdot \log d + O(\log^4 \log d).$$

Уточнения остаточного члена в этой формуле принадлежат Тонкову (см. работы [**71, 72**]). В 1975 г. Портер, используя оценки сумм Клостермана, для того же среднего получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами (см. [**68**])

$$\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{1\leqslant c\leqslant d\\ (c,d)=1}} s(c/d) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)} \cdot \log d + C_P - 1 + O_\varepsilon(d^{-1/6+\varepsilon}), \tag{0.7}$$

где ε — любое положительное и

$$C_P = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\frac{3\log 2}{2} + 2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1\right) - \frac{1}{2}$$

— константа, получившая название константы Портера (её окончательный вид был найден Ренчем, см. [**56**]).

В то же время для дисперсии величины $s(c/d)$ (при фиксированном значении знаменателя d) известна лишь правильная с точностью до константы оценка, принадлежащая Быковскому (2005, [**11**]):

$$\frac{1}{d}\sum_{c=1}^{d}\left(s\left(\frac{c}{d}\right) - \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log d\right)^2 \ll \log d.$$

Она получена методами аналитической теории чисел, также опирающимися на оценки сумм Клостермана.

Отдельно изучается задача о поведении $s(c/d)$, когда параметры c и d меняются в пределах $1 \leqslant c \leqslant d \leqslant R$, где R — растущий параметр. Рассмотрим среднее значение числа шагов в алгоритме Евклида

$$E(R) = \frac{2}{R(R+1)}\sum_{d\leqslant R}\sum_{c\leqslant d} s(c/d)$$

и дисперсию

$$D(R) = \frac{2}{R(R+1)}\sum_{d\leqslant R}\sum_{c\leqslant d}\left(s(c/d) - E(R)\right)^2.$$

Суммируя равенство (0.7), нетрудно получить, что

$$E(R) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\cdot\log R + C_P' + O(R^{-1/6+\varepsilon}) \qquad (0.8)$$

с некоторой абсолютной константой C_P' (см. [**63**]). Однако при усреднении по обоим параметрам c и d естественно надеяться на более точное описание поведения величины $s(c/d)$.

Ряд результатов в этом направлении был получен вероятностными и эргодическими методами. В 1970 г. Диксон в работе [**38**] показал, что для любого положительного ε найдётся такая константа $c_0 > 0$, что

$$\left|s(c/d) - \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log d\right| < (\log d)^{1/2+\varepsilon}$$

для всех пар чисел (c, d), лежащих в области $1 \leqslant c \leqslant d \leqslant R$, за исключением не более $R^2\exp(-c_0(\log R)^{\varepsilon/2})$ пар (см. также [**39**]). Хенсли в статье 1994 г. [**50**] уточнил результат Диксона и доказал, что разность между величиной $s(c/d)$ и ее средним значением асимптотически имеет нормальное распределение. Кроме того, Хенсли доказал асимптотическую формулу для дисперсии величины $s(c/d)$:

$$D(R) = D_1\cdot\log R + o(\log R),$$

где

$$D_1 = 2\frac{\lambda''(1) - \lambda'(1)^2}{\lambda'(1)^3}. \tag{0.9}$$

Позднее Валле (2000, [**75**]) для дисперсии была получена двучленная асимптотическая формула со степенным понижением в остаточном члене

$$D(R) = D_1 \cdot \log R + D_0 + O(R^{-\gamma_0}), \tag{0.10}$$

где γ_0 — некоторая положительная постоянная. Аналогичные равенства были доказаны и для моментов более высокого порядка, откуда следует, что длина работы алгоритма асимптотически является гауссовской величиной (см. [**34**]). В той же работе рассмотрены другие варианты алгоритма Евклида и другие, отличные от $s(c/d)$, характеристики сложности алгоритма.

В главе 2 математическое ожидание $E(R)$ выражается через число решений неравенства

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant R \qquad (1 \leqslant x_1 \leqslant x_2, 1 \leqslant y_1 \leqslant y_2). \tag{0.11}$$

Наличие дополнительного усреднения по параметру $d \leqslant R$ позволяет доказать асимптотическую формулу с лучшим, чем в (0.8), понижением в остаточном члене.

Теорема 3. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда*

$$E(R) = E_1 \cdot \log R + E_0 + O(R^{-1}\log^4 R), \tag{0.12}$$

где

$$E_1 = \widetilde{E}_1 = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}, \qquad E_0 = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\frac{3\log 2}{2} + 2\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}.$$

Вычисление дисперсии $D(R)$ сводится к исследованию неравенства

$$x_1(ay_1 + by_2) + x_2(cy_1 + dy_2) \leqslant R,$$

где $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, $1 \leqslant y_1 \leqslant y_2$ и $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \pm 1$. С его помощью, как и в главе 1, для дисперсии доказывается двучленная асимптотическая формула.

Теорема 4. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда*

$$D(R) = D_1 \cdot \log R + D_0 + O(R^{-1/4}\log^{7/4} R), \tag{0.13}$$

где $D_1 = \widetilde{D}_1$ и D_0 — абсолютные константы.

Отметим, что в соответствующем результате (0.10) работы [**34**] утверждается лишь существование некоторой константы $\gamma_0 > 0$; теорема 4 показывает, что в качестве γ_0 можно брать любое число, меньшее $1/4$.

Сопоставление равенства (0.9) с формулами для вычисления D_1 и $\widetilde{D}_1$ в теоремах 2 и 4 показывает, что

$$\widetilde{D}_1 = D_1 = 2\frac{\lambda''(1) - \lambda'(1)^2}{\lambda'(1)^3}.$$

По мнению разных авторов, константа D_1 (которую также называют константой Хенсли) не выражается в терминах известных арифметических постоянных (см. [**42, 61**]). Нахождение её численного значения представляет собой отдельную задачу (см. [**37, 44, 74**]). Известен полиномиальный алгоритм вычисления D_1, то есть алгоритм, который выдает первые d цифр за $O(d^r)$ арифметических операций (см. [**60, 61**]). Доказательство теоремы 4 дает новую явную формулу для вычисления D_1 (в цитированных работах алгоритмы основаны на вычислении спектра оператора G_s). Теорема 4 может быть также использована для нахождения константы D_0, для которой в настоящее время численное значение не известно.

0.4. Статистики Гаусса-Кузьмина для конечных цепных дробей

В книге [**5**, задача 1993–11] (см. также [**6**]) В. И. Арнольдом была поставлена задача о статистических свойствах элементов цепных дробей для чисел c/d, когда точки (c,d) лежат внутри круга $c^2+d^2 \leqslant R^2$, где $R \to \infty$, или внутри другой расширяющейся области. Там же было сделано предположение, что ответ не зависит от формы области и во всех случаях такой же, как указывает инвариантная мера Гаусса.

Для фиксированного $x \in [0,1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ статистики Гаусса-Кузьмина задаются равенством

$$s^{(x)}(r) = \#\{j : 1 \leqslant j \leqslant s = s(r), [0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x\}.$$

В главе 3 рассматривается вопрос об асимптотическом поведении суммы

$$N_x(R) = \sum_{(c,d)\in\Omega(R)} s^{(x)}(c/d), \tag{0.14}$$

где $\Omega(R)$ — область, полученная гомотетией с коэффициентом R ($R \to \infty$) из некоторой фиксированной области Ω_0:

$$\Omega(R) = R \cdot \Omega_0 = \{(x,y) : x, y > 0, (x/R, y/R) \in \Omega_0\}.$$

Как показано в работе [**1**], аргументы Хейльбронна [**49**] и Портера [**68**] позволяют доказать асимптотическое равенство

$$\sum_{1\leqslant c\leqslant d} s^{(x)}(c/d) = \frac{2\log(1+x)}{\zeta(2)} \cdot d\log d + O(d), \tag{0.15}$$

равномерное по $x \in [0,1]$. Однако этого результата недостаточно для преодоления главной трудности, которая заключается в том, что в равенстве (0.14) при фиксированном d переменная c пробегает отрезок, длина которого, вообще говоря, не кратна d.

Для сектора $c^2+d^2 \leqslant R^2$ $(c, d \geqslant 0)$ задача Арнольда была впервые решена в 2002 г. Авдеевой и Быковским в работе [**3**]. Доказательство опиралось на оценки сумм Клостермана и существенно использовало внешнее усреднение по d. Затем в статье [**2**] Авдеевой была доказана более точная асимптотическая формула

$$N_x(R) = \frac{3}{\pi}\log(1+x)\cdot R^2\log R + O(R^2),$$

в которой остаточный член на $\log^{1/2} R$ лучше, чем в [**3**]. В 2005 г. в работе [**25**] была получена асимптотическая формула с двумя значащими членами:

$$N_x(R) = \frac{3}{\pi}\log(1+x)\cdot R^2\log R + C_0(x)\cdot R^2 + O(R^{17/9}\log^2 R).$$

В главе 3 излагается результат работы [**26**], где была рассмотрена область Ω_0 общего вида. Предполагается, что она задана в полярных координатах

$$\Omega_0 = \{(\rho,\varphi) : 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \rho \leqslant r(\varphi)\}$$

и имеет площадь

$$V_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Теорема 5. *Пусть $R \geqslant 2$ и $r(\varphi) \in C^{(1)}([0,\pi/4])$. Предположим также, что для всех $\varphi \in [0,\pi/4]$ функция $r(\varphi)$ удовлетворяет ограничениям*

$$r(\varphi) \geqslant \varepsilon_0 > 0, \qquad r'(\varphi) \leqslant r(\varphi)\cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Тогда, равномерно по $x \in [0,1]$,

$$N_x(R) = \frac{2V_0}{\zeta(2)}\cdot\log(x+1)\cdot R^2\log R + C(x)\cdot R^2 + O(R^{9/5}\log^3 R),$$

где $C(x)$ не зависит от R.

В частности, теорема 5 показывает, что главный значащий член в асимптотической формуле пропорционален мере Гаусса и зависит не от формы области Ω_0, а лишь от ее площади V_0.

Как следствие из теоремы 5 получается ответ на вопрос Арнольда: для относительной частоты встречаемости натурального k в качестве неполных частных рассматриваемых цепных дробей выполняется асимптотическое равенство

$$\widetilde{p}_k(R) = \frac{N_{1/k}(R) - N_{1/(k+1)}(R)}{N_1(R)} = p_k + O\left(\frac{1}{\log R}\right),$$

где $p_k = \log_2\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)$ — вероятность появления числа k в качестве неполного частного действительного числа (см. формулу (0.5)).

В качестве дополнения к теореме 5, в конце главы 3 излагается результат работы [**31**], в которой результат Портера (0.7) уточняется и распространяется на случай статистик Гаусса-Кузьмина.

Теорема 6. *Пусть $b \geqslant 2$ — натуральное и $x \in (0,1]$ — действительное. Тогда для суммы*

$$\Psi_x^*(b) = \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s^{(x)}(a/b)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Psi_x^*(b) = \frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)}\left(\log(x+1)\log b + C_P(x)\right) + O_{\varepsilon,x}\left(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число,

$$C_P(x) = \log(1+x)\left(\log x - \frac{\log(x+1)}{2} + 2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1\right) +$$
$$+h_1(x) + h_2(x) + \frac{\zeta(2)}{2}\left(x\cdot[x<1] - \frac{x}{1+x}\right), \tag{0.16}$$

а функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ заданы абсолютно сходящимися рядами

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{x}{n+mx} - \log(1+x)\right), \tag{0.17}$$
$$h_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{\frac{n}{x}\leqslant m<\frac{n}{x}+n}\frac{1}{m} - \log(1+x)\right). \tag{0.18}$$

При этом оценка остаточного члена становится равномерной по x в предположении, что $x \in [x_0, 1]$ для некоторого фиксированного $x_0 > 0$.

Алгоритм Евклида, в котором при делении выбирается наименьший по модулю остаток

$$a = bq + r, \quad q = \left[\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\right], \quad -\frac{q}{2} \leqslant r < \frac{q}{2},$$

приводит к разложению в дробь

$$\frac{a}{b} = t_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{t_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{t_2 + \ddots + \cfrac{\varepsilon_l}{t_l}}},$$

длины $l = l(a/b)$, где t_0 — целое, $t_1, \ldots, t_l$ — натуральные,

$$\varepsilon_k = \pm 1, \quad t_k \geqslant 2 \quad (k = 1,\ldots,l), \quad t_k + \varepsilon_{k+1} \geqslant 2 \quad (k = 1,\ldots,l-1),$$

и $\varepsilon_l = -1$ при $t_l = 2$.

Для среднего числа шагов в таком алгоритме Евклида известен результат

$$\frac{2}{R(R+1)}\sum_{b\leqslant R}\sum_{a\leqslant b} l(a/b) = \frac{2\log\varphi}{\zeta(2)}\cdot\log R + C_l + O(R^{-\beta}),$$

где $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение, C_l — абсолютная постоянная и $\beta > 0$. (см. [**34**]). Оказывается, что для любого рационального числа a/b выполняется равенство $l(a/b) = s^{(\varphi-1)}(a/b)$. Поэтому упрощенный вариант теоремы 5 (см. замечание 3.1) и теорема 6 приводят к асимптотическим формулам, аналогичным (0.8) и (0.12):

$$\frac{2}{R(R+1)}\sum_{b\leqslant R}\sum_{a\leqslant b} l(a/b) = \frac{2\log\varphi}{\zeta(2)}\cdot\log R + C_l + O(R^{-1}\log^4 R),$$

$$\frac{1}{\varphi(b)}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} l(a/b) = \frac{2\log\varphi}{\zeta(2)}\cdot\log b + C_l' + O_\varepsilon(b^{-1/6}\log^{7/6+\varepsilon} b),$$

где $R, b \geqslant 2$ и C_l' — абсолютная константа.

0.5. Задача Синая

Бильярд Синая является простейшей моделью рассеивающей динамической системы: маленький шар движется внутри квадратного поля, в центр которого помещено круглое препятствие с отражающими стенками. Предполагается, что все удары абсолютно упруги. Очевидно, что вместо квадратного бильярда можно рассматривать плоскость, на которой круглые препятствия располагаются вокруг каждой точки целочисленной решетки. Такая модель и будет рассматриваться в дальнейшем.

Пусть $0 < h < \frac{1}{8}$ и $T > 0$. Открытый круг радиуса h с центром в некоторой точке назовем ее h-окрестностью. Определим подмножество $\Omega_h(T)$ в $[0, 2\pi)$, состоящее из углов φ, для которых луч

$$\{(t\cos\varphi, t\sin\varphi) : t \geqslant 0\}$$

пересекает h-окрестность некоторой целочисленной точки $(m, n) \neq (0, 0)$ из круга

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant T^2\right\}.$$

Обозначим через $G_h(T)$ нормированную меру $\Omega_h(T)$:

$$G_h(T) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{mes}\Omega_h(T) \in [0, 1].$$

В 1918 г. Полиа (см. [**23**], теория чисел, задача 239) доказал, что

$$G_h(T) = 1$$

для всех $T \geqslant h^{-1}$. Отвечая на вопрос, поставленный в 1981 г. Синаем, в совместной работе [**36**] Бока, Гологан и Захареску доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ равномерно по $T \in [0, h^{-1}]$

$$G_h(T) = \int_0^{h\cdot T}\sigma(t)\,dt + O_\varepsilon(h^{1/8-\varepsilon}), \tag{0.19}$$

где

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{12}{\pi^2}, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2};\\ \frac{12}{\pi^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(1-\log\left(\frac{1}{t}-1\right)\right), & \text{если } \frac{1}{2} < t \leqslant 1.\end{cases}$$

С физической точки зрения величину $G_h(T)$ можно интерпретировать как функцию распределения длин свободного пробега частиц, движущихся прямолинейно из начала координат до их первого попадания в h-окрестность некоторой ненулевой целочисленной точки. Речь идет об однородной двумерной модели “Периодический газ Лоренца”.

При изучении движущихся в кристалле достаточно быстрых частиц, траектории которых обусловлены главным образом многократным их рассеянием на ядрах, возникает необходимость рассматривать более общую ситуацию, когда траектория начинается не в некоторой целой точке, а в её h-окрестности.

Зафиксируем вещественное v из интервала $(-1,1)$. Ориентированная в направлении $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, параметрически заданная прямая

$$\left\{(-hv\sin\varphi + t\cos\varphi, hv\cos\varphi + t\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : t \in (-\infty,\infty)\right\} \tag{0.20}$$

на плоскости при $t = 0$ проходит через ближайшую к началу координат $O = (0,0)$ точку $O' = (-hv\sin\varphi, hv\cos\varphi)$ (проекция O на прямую (0.20)). Еще одно параметрическое представление

$$\left\{(x - t'\sin\varphi,\ y + t'\cos\varphi) \in \mathbb{R}^2 : t' \in (-\infty,\infty)\right\}$$

определяет перпендикулярную к (0.20) прямую, проходящую при $t' = 0$ через точку (x,y). Они пересекаются в некоторой точке при

$$t = R(x,y) = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$t' = U(x,y) = x\sin\varphi - y\cos\varphi + hv.$$

Среди всех целочисленных точек (m,n) на плоскости с условиями

$$R(m,n) > 0 \quad \text{и} \quad |U(m,n)| < h$$

выберем ту из них — $(m(\varphi), n(\varphi))$, для которой величина $R(m,n)$ принимает минимальное значение. Такая точка $(m(\varphi), n(\varphi))$ всегда найдется, поскольку по теореме Минковского о линейных формах существует целочисленная пара $(m,n) \neq (0,0)$, для которой

$$|m\cos\varphi + n\sin\varphi| \leqslant (h(1-|v|))^{-1}, \quad |m\sin\varphi - n\cos\varphi| < h(1-|v|).$$

Другими словами, $(m(\varphi), n(\varphi))$ — первая целочисленная точка $(m,n) \neq (0,0)$, h-окрестность которой пересекает частица, движущаяся вдоль прямой (0.20) из точки O' в положительном направлении. Положим

$$r(\varphi) = h \cdot R\left(m(\varphi), n(\varphi)\right), \quad u(\varphi) = h^{-1} \cdot U\left(m(\varphi), n(\varphi)\right).$$

При этом

$$0 < r(\varphi) < \frac{1}{1-|v|} \quad \text{и} \quad -1 < u(\varphi) < 1.$$

Ориентируясь на терминологию из ядерной физики, назовем $r = r(\varphi)$ нормированным *свободным пробегом*, а v и $u = u(\varphi)$ — нормированными *выходным* и *входным прицельными параметрами*.

Пусть

$$0 < r_0 < \frac{1}{1-|v|} \quad \text{и} \quad -1 < u_- < u_+ < 1.$$

Главным результатом главы 4 является следующее ниже утверждение.

Теорема 7. *Пусть $|v| < c < 1$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для функции распределения*

$$\Phi_v(h) = \Phi_v(h; \varphi_0, r_0, u_-, u_+) = \\ = \int_0^{\varphi_0} \chi_{[0,r_0]}\left(r(\varphi)\right) \chi_{[u_-,u_+]}\left(u(\varphi)\right)\, d\varphi$$

при $h \to 0$ справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_v(h) = \int_0^{\varphi_0} \int_0^{r_0} \int_{u_-}^{u_+} \rho(\varphi, r, v, u)\, d\varphi\, dr\, du + O_{\varepsilon,c}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right),$$

равномерная по v, u_-, u_+ и $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ с плотностью

$$\rho(\varphi, r, v, u) = \rho(r, v, u) = \rho(r, u, v) = \rho(r, -u, -v),$$

которая при $u \geqslant |v|$ имеет вид

$$\rho(r, u, v) = \begin{cases} \frac{6}{\pi^2}, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{u+1}; \\ \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{u-v}\left(\frac{1}{r} - 1 - v\right), & \text{если } \frac{1}{u+1} \leqslant r \leqslant \frac{1}{1+v}; \\ 0, & \text{если } \frac{1}{1+v} \leqslant r. \end{cases}$$

С физической точки зрения функцию $\frac{1}{2\pi}\rho(\varphi, r, v, u)$ можно интерпретировать как плотность частиц, движущихся прямолинейно с единичной скоростью под углом φ после первого рассеяния с выходным прицельным параметром $V = h \cdot v$ в h-окрестности некоторого узла целочисленной решетки и проходящих расстояние $R = h^{-1} \cdot r$ до повторного рассеяния с входным прицельным параметром $h \cdot u$.

Следует отметить, что плотность $\rho(\varphi, r, v, u)$ не зависит от угла φ. Это означает, что целочисленная решетка в пределе обладает свойством *изотропности*, которое, как известно, проявляется также в задачах о случайных блужданиях и дискретных гармонических функциях (см., например, [**69**]). Симметрия плотности относительно замены (v, u) на (u, v) объясняется изотропностью и “обратимостью” траекторий частиц.

В работе [**24**] Синай доказал эргодичность прямоугольного бильярда с вырезанным из него кругом радиуса h. Ему же принадлежит постановка задачи об асимптотическом поведении функции распределения длины траектории до первого столкновения с вырезанным кругом (столкновения с бортами не принимаются во внимание) при $h \to 0$. Речь идет о частном случае рассматриваемой нами задачи для $v = 0$, $u_- = 1$, $u_+ = 1$, $\varphi_0 = 2\pi$. При $v = 0$ (однородная задача) теорема 7 была доказана в [**12**].

Из результатов работы [**62**], доказанных эргодическими методами, основанными на теореме Ратнер о классификации инвариантных эргодических мер под действием унипотентных потоков, следует существование предела функции $\Phi_v(h)$ при $h \to 0$ в частном случае с $\varphi_0 = 2\pi$. Этого недостаточно для доказательства изотропности и симметричности функции $\rho(r, v, u)$.

Рассматриваемая двумерная модель связана с теорией каналирования частиц, движущихся параллельно кристаллографическим плоскостям (см., например, **[18, 22]**).

0.6. Методы исследования

Доказательства всех теорем базируются на явных арифметических конструкциях, построенных с помощью цепных дробей (см. раздел 1.1). Эти конструкции сводят исходные задачи к исследованию таких арифметических объектов, как суммы специального вида и системы неравенств.

Многократно приходится решать вопрос об асимптотическом поведении сумм

$$\sum_{u,v=0}^{q-1} \delta_q(uv-1) \cdot f\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right) \tag{0.21}$$

для различных функций f. При этом используется стандартный подход, основанный на переходе к тригонометрическим суммам (см., например, **[21]**). Пусть f записана в виде конечного ряда Фурье

$$f\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right) = \sum_{m,n=0}^{q-1} C_q(m,n) \cdot e^{2\pi i \frac{mu+nv}{q}},$$

где

$$C_q(m,n) = \frac{1}{q} \sum_{u,v=0}^{q-1} f\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right) \cdot e^{-2\pi i \frac{mu+nv}{q}}$$

— конечные коэффициенты Фурье функции f. Тогда тождество

$$\sum_{u,v=0}^{q-1} \delta_q(uv-1) \cdot f\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right) = \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{u,v=0}^{q-1} f\left(\frac{u}{q}, \frac{v}{q}\right) + R_q[f],$$

где

$$R_q[f] = \sum_{\substack{m,n=0 \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{q-1} C_q(m,n) \cdot K_q(m,n)$$

сводит задачу об асимптотическом поведении суммы (0.21) к оценкам сумм Клостермана (0.3). В диссертации используются утверждения (см. разделы 5.2–5.3 приложения), основанные на оценке Эстермана из работы **[40]**:

$$|K_q(m,n)| \leqslant \sigma_0(q) \cdot (m,n,q)^{1/2} \cdot q^{1/2}. \tag{0.22}$$

Доказательства каждой из теорем 1–6 разбиваются на случаи в зависимости от значений параметров. Например, при исследовании неравенства (0.11) отдельно рассматриваются случаи $x_2 \leqslant [R^{1/2}] + 1/2$ и $x_2 >$

$[R^{1/2}]+1/2$. Идейно такой подход близок к круговому методу с его разбиением на большие и малые дуги. Отличие заключается в следующем: из условия $x_2 > [R^{1/2}]+1/2$ вытекает, что $y_2 < R^{1/2}+1$ и, таким образом, "малые дуги" для переменных x_1, x_2 становятся "большими" для y_1, y_2. Как и в круговом методе, возникает необходимость изучения "особых рядов" (см., например, леммы 1.3, 1.7, 1.9, 2.5, 2.7, 2.9). Их слагаемыми являются остаточные члены различных асимптотических формул, а через их суммы выражаются константы в теоремах 1–6.

Пусть q — натуральное число, l — целое и f — неотрицательная функция. Обозначим через $T[f]$ число решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$, лежащих в области $P_1 < x \leqslant P_2$, $0 < y \leqslant f(x)$:

$$T[f] = \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \sum_{0 \leqslant y \leqslant f(x)} \delta_q(xy - l).$$

При доказательстве теорем 4 и 6 встает вопрос об асимптотических формулах для $T[f]$. Подобные формулы лежат также в основе результатов о свертках арифметических функций [**47, 51**], суммах арифметических функций на значениях квадратичного полинома [**10, 51**], статистических свойствах алгоритма Евклида [**1, 68**] и др.

В общем случае задача об асимптотике величины $T[f]$ впервые была решена Быковским в работе [**10**]. Доказательство основывалось на формуле суммирования Пуассона и использовании оценки Эстермана (0.22).

В разделе 5.5 приложения излагается результат статьи [**31**], уточняющий теорему Быковского. Через $S[f]$ обозначим сумму

$$S[f] = \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \mu_{q,l}(x) f(x),$$

где $\mu_{q,l}(x)$ — число решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ относительно переменной y, лежащей в пределах $1 \leqslant y \leqslant q$.

Теорема 8. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 2$. Предположим также, что на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и при $x \in [P_1, P_2]$*

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{A}$$

для некоторых $A > 0$, $w \geqslant 1$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T[f] = S[f] - \frac{P}{2} \cdot \delta_q(l) + R[f], \tag{0.23}$$

где

$$R[f] \ll_w \sigma_0^{2/3}(q)\, \sigma_0^{5/3}(a)\, \sigma_{-1/2}^{4/3}(a)\, P A^{-1/3} + \tag{0.24}$$

$$+\sigma_0(q)\, \sigma_0(a)\, \left(A^{1/2} a^{1/2} \sigma_{-1}(q)\, \sigma_{-1/2}(a) + q^{1/2} \sigma_0(a)\, \sigma_{-1/2}^2(a) \log^2 P + a \log P\right),$$

и $a = (l, q)$.

При использовании теоремы 8 в остаточном члене $R[f]$ наиболее существенным оказывается первое слагаемое

$$\sigma_0^{2/3}(q)\,\sigma_0^{5/3}(a)\,\sigma_{-1/2}^{4/3}(a)\,PA^{-1/3} \ll \sigma_0^{2/3}(q)\,\sigma_0^{2}(a)\,PA^{-1/3}.$$

В работе **[10]** соответствующее слагаемое имеет вид

$$q^{\varepsilon}\cdot a^{1/2}\cdot \log^{4/3}P\cdot PA^{-1/3}.$$

За счет такого улучшения в теореме 6 и получается уточнение остаточного члена по сравнению с формулой (0.7).

Доказательство теоремы 8 отличается тем, что вместо элементарного метода Виноградова для подсчета целых точек в областях, как было сделано в статье **[10]**, оно использует оценки тригонометрических сумм, полученных методом ван дер Корпута. Кроме того, в доказательстве применяется новая оценка сумм Клостермана

$$K_q(l,m,n)=\sum_{x,y=1}^{q}\delta_q(xy-l)\,e^{2\pi i\frac{mx+ny}{q}},$$

обобщающая неравенство (0.22) (см. раздел 5.2 приложения):

$$|K_q(l,m,n)|\leqslant \sigma_0(q)\cdot\sigma_0((l,m,n,q))\cdot(lm,ln,mn,q)^{1/2}\cdot q^{1/2}.$$

ГЛАВА 1

Вычисление первого и второго моментов в одной задаче из метрической теории цепных дробей

Напомним, что

$$\widetilde{E}(\alpha, R) = \#\left\{j \geqslant 1 : Q_j(\alpha) \leqslant R\right\},$$

где $Q_j(\alpha)$ — знаменатель j-ой подходящей дроби к числу α. В случае иррационального числа α величину $E(\alpha, R)$ можно считать непрерывным аналогом длины конечной цепной дроби.

В данной главе для среднего значения $E(\alpha, R)$

$$\widetilde{E}(R) = \int_0^1 E(\alpha, R)\, d\alpha$$

и дисперсии

$$\widetilde{D}(R) = \int_0^1 (E(\alpha, R) - \widetilde{E}(R))^2\, d\alpha = \int_0^1 E^2(\alpha, R)\, d\alpha - \widetilde{E}^2(R)$$

доказываются асимптотические формулы

$$\widetilde{E}(R) = \widetilde{E}_1 \cdot \log R + \widetilde{E}_0 + O\left(R^{-1} \cdot \log R\right),$$
$$\widetilde{D}(R) = \widetilde{D}_1 \cdot \log R + \widetilde{D}_0 + O(R^{-1/3} \cdot \log^4 R)$$

с абсолютными константами $\widetilde{E}_1 > 0$, $\widetilde{E}_0$, $\widetilde{D}_1 > 0$ и $\widetilde{D}_0$. При этом $\widetilde{E}_1$ и $\widetilde{E}_0$ выражаются в явной форме через известные арифметические постоянные.

Нахождение $\widetilde{E}(R)$ сводится к подсчету суммы

$$\Phi^*(R) = \sum_{Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \frac{1}{Q'(Q + Q')}.$$

При исследовании дисперсии возникает более сложная сумма

$$\sigma^*(R) = \sum_{Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}} \frac{[mQ + nQ' \leqslant R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')},$$

которая вычисляется по-разному в случаях $n \leqslant R^{2/3} \log R$ и $n > R^{2/3} \log R$.

Настоящая глава основана на работе **[27]**.

1.1. О цепных дробях

Для изучения цепных дробей часто используются континуанты, которые определяются (см. [**16**]) начальными условиями

$$K_0() = 1, \quad K_1(a_1) = a_1$$

и рекуррентным соотношением ($n \geqslant 2$)

$$K_n(a_1, \ldots, a_n) = a_n K_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_{n-2}(a_1, \ldots, a_{n-2}).$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют числители и знаменатели подходящих дробей, поэтому

$$[a_0; a_1, \ldots, a_s] = \frac{K_{s+1}(a_0, a_1, \ldots, a_s)}{K_s(a_1, \ldots, a_s)}.$$

По индукции легко проверяется свойство симметричности

$$K_n(a_1, \ldots, a_n) = K_n(a_n, \ldots, a_1)$$

и равенство

$$\begin{gathered} K(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}) = \\ K(a_1, \ldots, a_m) K(a_{m+1}, \ldots, a_n) + K(a_1, \ldots, a_{m-1}) K(a_{m+2}, \ldots, a_{m+n}). \end{gathered} \tag{1.1}$$

(В случаях, когда число аргументов в континуанте ясно из контекста нижний индекс в обозначении континуанта будет опускаться.) Наиболее общим является тождество Эйлера ($m \geqslant 1, l \geqslant 0, n \geqslant l+1$)

$$\begin{gathered} K(x_1, \ldots, x_{m+n}) K(x_{m+1}, \ldots, x_{m+l}) - K(x_1, \ldots, x_{m+l}) K(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = \\ = (-1)^n K(x_1, \ldots, x_{m-1}) K(x_{m+l+2}, \ldots, x_{m+n}), \end{gathered}$$

которое можно интерпретировать как равенство нулю пфаффиана вырожденной матрицы размера 4×4, см. [**28**].

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

с определителем $\det S = \pm 1$, у которых

$$1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad 0 \leqslant P \leqslant Q, \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q'.$$

Оно разбивается на два непересекающихся подмножества $\mathcal{M}_+$ и $\mathcal{M}_-$, состоящих из матриц с определителями $+1$ и -1 соответственно. В зависимости от контекста, если это не приводит к недоразумениям, мы будем использовать обозначения P, P', Q, Q' вместо $P(S)$, $P'(S)$, $Q(S)$, $Q'(S)$ для элементов матрицы S в соответствии с (1.2).

Обозначим через $\widetilde{\mathbb{N}}$ множество всех непустых конечных наборов $(q_1, \ldots, q_n)$, составленных из натуральных чисел. Построим отображение

$$\mathcal{B}: \quad \widetilde{\mathbb{N}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k \to \mathcal{M},$$

положив

$$\mathcal{B}(q_1,\ldots,q_n) = S = S(q_1,\ldots,q_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix}.$$

Из рекуррентных соотношений на числители и знаменатели подходящих дробей следует, что S имеет вид (1.2) с

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \ldots, q_{n-1}] \quad \text{и} \quad \frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \ldots, q_n].$$

Лемма 1.1. *Отображение $\mathcal{B}$ — биекция.*

Доказательство. Имеется единственная матрица из $\mathcal{M}$ с $Q' = 1$ и для нее

$$\mathcal{B}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1).$$

Пусть теперь $S \in \mathcal{M}$, $Q' = Q'(S) \geqslant 2$ и

$$\frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \ldots, q_m, q_{m+1}] \tag{1.3}$$

— каноническое разложение в непрерывную дробь с $q_{m+1} \geqslant 2$. Если $\det S = (-1)^m$, то

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \ldots, q_m],$$

поскольку P и Q однозначно определяются из равенства

$$PQ' - P'Q = \det S = (-1)^m$$

и ограничения $1 \leqslant Q \leqslant Q'$. Если же $\det S = (-1)^{m+1}$, то ввиду равенства

$$\frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \ldots, q_m, q_{m+1} - 1, 1], \tag{1.4}$$

по тем же причинам

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \ldots, q_m, q_{m+1} - 1].$$

Осталось только заметить, что при $Q' \geqslant 2$ имеется ровно два разложения (1.3) и (1.4) для P'/Q' в непрерывную дробь с натуральными числами в качестве неполных частных, последнее из которых может быть единицей. $\square$

Отметим также, что $\mathcal{M}$ — полугруппа относительно обычного умножения матриц, и биекция $\mathcal{B}$ на самом деле есть полугрупповой изоморфизм. При этом

$$(q_1, \ldots, q_n) * (q_{n+1}, \ldots, q_{n+m}) = (q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{n+m})$$

— соответствующая операция на конечных наборах натуральных чисел.

В качестве инструмента для изучения свойств цепных дробей удобно использовать следующее утверждение, которое является видоизменением одной известной теоремы (см. [**4**, § 50, теорема 1]).

Лемма 1.2. *Пусть P — целое неотрицательное число, P', Q, Q' — натуральные и $Q \leqslant Q'$. Предположим также, что α — действительное число из интервала $(0,1)$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(I) *P/Q и P'/Q' — последовательные подходящие дроби к числу α, отличные от α, причем дробь P'/Q' имеет больший номер;*

(II) $PQ' - P'Q = \pm 1 \quad$ *и* $\quad 0 < \dfrac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} < 1.$

Доказательство. Предположим, что выполнено первое условие. Соотношение $PQ' - P'Q = \pm 1$ сразу вытекает из свойств цепных дробей. Далее, так как α находится между P/Q и P'/Q', то для некоторых натуральных $t_1, \ldots, t_s$ $(s \geqslant 1)$ и действительного α' в пределах $t_s < \alpha' < t_s + 1$ справедливы формулы

$$\frac{P}{Q} = [0; t_1, \ldots, t_{s-1}], \quad \frac{P'}{Q'} = [0; t_1, \ldots, t_s], \tag{1.5}$$
$$\alpha = [0; t_1, \ldots, t_{s-1}, \alpha'].$$

Второе из соотношений (II) следует из равенства

$$\frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = \alpha' - t_s.$$

Докажем утверждение леммы в другую сторону. Из условий (II) следует, что обе дроби P/Q и P'/Q' принадлежат отрезку $[0,1]$. Поэтому равенство $|PQ' - P'Q| = 1$ означает, что $S = \left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$. По лемме 1.1 для некоторых натуральных $t_1, \ldots, t_s$ $(s \geqslant 1)$ выполняются равенства (1.5). Так как

$$0 < \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P},$$

то α находится между P/Q и P'/Q'. Значит, для некоторого α'

$$\alpha = [0; t_1, \ldots, t_{s-1}, \alpha'] = \frac{(\alpha' - t_s)P + P'}{(\alpha' - t_s)Q + Q'}.$$

Подставляя это равенство в условие $0 < \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} < 1$, получаем, что $0 < \alpha' - t_s < 1$. Значит, $t_s = [\alpha']$, и каждая из дробей P/Q и P'/Q' будет подходящей к числу α.

$\square$

Замечание 1.1. Аналогично проверяется, что если $P \geqslant 0$, P', Q, $Q' \geqslant 1$ и $Q \leqslant Q'$, то условия

$$PQ' - P'Q = \pm 1, \qquad \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = 1$$

равносильны тому, что дроби P/Q и P'/Q' являются подходящими дробями вида (1.5) к числу

$$\alpha = \frac{P + P'}{Q + Q'},$$

записанному в виде нестандартной цепной дроби

$$\alpha = [0; t_1, \dots, t_{s-1}, t_s, 1] \qquad (s \geqslant 1),$$

причём

$$\frac{P}{Q} = [0; t_1, \dots, t_{s-1}], \qquad \frac{P'}{Q'} = [0; t_1, \dots, t_{s-1}, t_s].$$

Из леммы 1.2 и элементарных свойств непрерывных дробей вытекают следующие свойства множества $\mathcal{M}$.

1°. Для вещественного $\alpha \in (0,1)$ неравенство

$$0 < \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = S^{-1}(\alpha) < 1 \quad \text{с} \quad S \in \mathcal{M}$$

имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого $j \geqslant 1$

$$S = \begin{pmatrix} P_j(\alpha) & P_{j+1}(\alpha) \\ Q_j(\alpha) & Q_{j+1}(\alpha) \end{pmatrix}$$

и $j \leqslant s(r) - 2$ для рационального $\alpha = r$.

2°. Для всякой матрицы $S \in \mathcal{M}$ неравенство $0 < S^{-1}(\alpha) < 1$ задает интервал

$$I(S) = \begin{cases} \left(\dfrac{P'}{Q'}, \dfrac{P+P'}{Q+Q'} \right), & \text{если } \det S = 1; \\ \left(\dfrac{P+P'}{Q+Q'}, \dfrac{P'}{Q'} \right), & \text{если } \det S = -1 \end{cases}$$

длины

$$|I(S)| = \frac{1}{Q'(Q+Q')}.$$

3°. Пусть q_1, …, q_l — натуральные числа и $S = S(q_1, \dots, q_l)$. Тогда число α будет лежать в интервале $I(S)$ в том и только том случае, когда $s(\alpha) > l$ и в каноническом разложении $\alpha = [t_0; t_1, \dots, t_l, \dots]$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = q_1, \dots, t_l = q_l.$$

4°. Пересечение $I(S) \cap I(S')$ непусто тогда и только тогда, когда один из интервалов содержится в другом. При этом, если $I(S) \subsetneq I(S')$, и $S' = S'(q_1, \dots, q_{l'})$, то для некоторого $l > l'$ и натуральных $q_{l'+1}$, …, q_l будет выполняться равенство

$$S = S' \cdot S'',$$

где $S'' = S''(q_{l'+1}, \dots, q_l)$ и $S = S(q_1, \dots, q_l)$.

5°. Если $Q' \geqslant 2$, $1 \leqslant Q \leqslant Q'$ и $(Q, Q') = 1$, то имеются ровно две пары

$$(P, P') \quad \text{и} \quad (Q - P, Q' - P'),$$

дополняющие в качестве первой строки, вторую (Q, Q') до матрицы из $\mathcal{M}$. Кроме того, если

$$\frac{Q}{Q'} = [0; q_s, \dots, q_1] = [0; q_s, \dots, q_1 - 1, 1] \qquad (q_1 \geqslant 2),$$

то соответствующие матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & q_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & q_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K(q_2,\ldots,q_{s-1}) & K(q_2,\ldots,q_s)\\ K(q_1,\ldots,q_{s-1}) & K(q_1,\ldots,q_s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P & P'\\ Q & Q'\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & q_1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & q_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & q_s\end{pmatrix}= \tag{1.6}$$

$$=\begin{pmatrix}K(q_1-1,q_2,\ldots,q_{s-1}) & K(q_1-1,q_2,\ldots,q_s)\\ K(1,q_1-1,q_2,\ldots,q_{s-1}) & K(1,q_1-1,q_2,\ldots,q_s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q-P & Q'-P'\\ Q & Q'\end{pmatrix}.$$

При $Q=Q'=1$ существует только одна матрица $S=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$, лежащая в множестве $\mathcal{M}$.

1.2. Асимптотическая формула для математического ожидания

Лемма 1.3. *При $R\geqslant 1$ для сумм*

$$\Phi(R)=\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}\frac{1}{Q'(Q+Q')}, \tag{1.7}$$

$$\Phi^*(R)=\sum_{Q'\leqslant R}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\frac{1}{Q'(Q+Q')} \tag{1.8}$$

справедливы асимптотические формулы

$$\Phi(R)=\log 2\,(\log R+\log 2+\gamma)-\frac{\zeta(2)}{2}+\frac{1}{R}\left(\log 2\cdot\rho(R)+\frac{1}{4}\right)+O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

$$\Phi^*(R)=\frac{\log 2}{\zeta(2)}\left(\log R+\log 2+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)-\frac{1}{2}+O\left(\frac{\log(R+1)}{R}\right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\Phi(R)=\log 2\sum_{Q'\leqslant R}\frac{1}{Q'}+\sigma_0-\sum_{Q'>R}\frac{1}{Q'}\left(\sum_{Q=1}^{Q'}\frac{1}{Q+Q'}-\log 2\right), \tag{1.9}$$

где

$$\sigma_0=\sum_{Q'=1}^{\infty}\frac{1}{Q'}\left(\sum_{Q=1}^{Q'}\frac{1}{Q+Q'}-\log 2\right). \tag{1.10}$$

Для суммы σ_0 методом производящих функций находится точное значение (см. [**56**]):

$$\sigma_0=\log^2 2-\frac{\zeta(2)}{2}. \tag{1.11}$$

Кроме того, по лемме 5.5,

$$\sum_{Q'\leqslant R}\frac{1}{Q'}=\log R+\gamma+\frac{\rho(R)}{R}+O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

$$\sum_{Q=1}^{Q'}\frac{1}{Q+Q'}=\log 2-\frac{1}{4Q'}+O\left(\frac{1}{(Q')^2}\right).$$

Подставляя три последних равенства в формулу (1.9), приходим к первому утверждению леммы.

Далее, применяя формулу обращения Мёбиуса

$$\Phi^*(R) = \sum_{\delta \leqslant R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\, \Phi\left(\frac{R}{\delta}\right)$$

и равенство

$$\sum_{d \leqslant R} \frac{\mu(d)}{d^2} \log d = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + O\left(\frac{\log R}{R}\right)$$

(см. лемму 5.8 приложения), приходим к нужному представлению для суммы $\Phi^*(R)$. □

Лемма 1.4. *При $R \geqslant 1$ величина*

$$\widetilde{E}(R) = \int_0^1 E(\alpha, R)\, d\alpha$$

может быть представлена в виде

$$\widetilde{E}(R) = 2\Phi^*(R) - \frac{1}{2}, \tag{1.12}$$

где функция $\Phi^*(R)$ задается равенством (1.8).

Доказательство. По лемме 1.2 для иррационального $\alpha \in (0, 1)$ величина $E(\alpha, R)$ совпадает с числом решений системы

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = \pm 1, \\ 0 < \dfrac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = S^{-1}(\alpha) < 1, \end{cases}$$

относительно неизвестных P, P', Q и Q', связанных неравенствами

$$1 \leqslant Q \leqslant Q' \leqslant R, \quad 0 \leqslant P \leqslant Q, \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q'.$$

Отсюда, с учетом свойства 2° множества $\mathcal{M}$,

$$E(\alpha, R) = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} [0 < S^{-1}(\alpha) < 1] = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \chi_{I(S)}(\alpha), \tag{1.13}$$

$$\widetilde{E}(R) = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \int_0^1 \chi_{I(S)}(\alpha)\, d\alpha = \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \frac{1}{Q'(Q + Q')}, \tag{1.14}$$

где $\chi_{I(S)}(\alpha)$ — характеристическая функция интервала $I(S)$ и $\mathcal{M}(R)$ — множество матриц $S \in \mathcal{M}$, для которых $Q' \leqslant R$.

Пусть $Q' \geqslant 2$, $1 \leqslant Q < Q'$ и $(Q, Q') = 1$. Тогда, согласно свойству 5° множества $\mathcal{M}$, дробь $\frac{1}{Q'(Q+Q')}$ в сумме (1.14) появится ровно два раза. Для пары $(Q', Q) = (1, 1)$ соответствующая дробь появится один раз. Следовательно, выполнено равенство (1.12). □

Доказательство теоремы 1. Применяя к равенству (1.12) лемму 1.3, приходим к асимптотической формуле для $\widetilde{E}(R)$. □

1.3. Выражение дисперсии через сумму специального вида

Лемма 1.5. *При $R \geqslant 1$ для величины*

$$\widetilde{D}(R) = \int_0^1 (E(\alpha, R) - \widetilde{E}(R))^2 \, d\alpha = \int_0^1 E^2(\alpha, R) \, d\alpha - \widetilde{E}^2(R)$$

справедливо представление

$$\widetilde{D}(R) = 4\sigma^*(R) - \widetilde{E}^2(R) + \frac{1}{2}, \tag{1.15}$$

где

$$\sigma^*(R) = \sum_{Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}} \frac{[mQ + nQ' \leqslant R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}.$$

Доказательство. По формулам (1.13), (1.14), а также свойству 4° множества $\mathcal{M}$

$$\int_0^1 E^2(\alpha, R) \, d\alpha = \int_0^1 \Big(\sum_{S \in \mathcal{M}(R)} \chi_{I(S)}(\alpha) \Big)^2 d\alpha =$$
$$= \sum_{S \in \mathcal{M}(R)} |I(S)| + 2 \sum_{\substack{S, S' \in \mathcal{M}(R) \\ I(S) \subsetneq I(S')}} |I(S)| = \widetilde{E}(R) + 2 \sum_{\substack{S, S' \in \mathcal{M}(R) \\ I(S) \subsetneq I(S')}} |I(S)| \, .$$

Опять опираясь на свойство 4° множества $\mathcal{M}$, запишем матрицы S и S' в виде

$$S' = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix},$$

где матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)$ также лежит в множестве $\mathcal{M}$. Значит,

$$\int_0^1 E^2(\alpha, R) \, d\alpha = \widetilde{E}(R) +$$
$$+ 2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}} \frac{[mQ + nQ' \leqslant R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')}.$$

Рассматривая отдельно случай $Q = Q' = 1$ и пользуясь свойством 5°, находим

$$\int_0^1 E^2(\alpha, R) \, d\alpha = \widetilde{E}(R) + 4\sigma^*(R) - 2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}} \frac{[m + n \leqslant R]}{(m+n)(a+b+m+n)}.$$

Из равенства

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & n \\ a+b & m+n \end{pmatrix}$$

и свойства 5° следует, что каждая пара чисел (q, q') такая, что $1 \leqslant q < q'$ и $(q, q') = 1$ будет второй строкой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} b & n \\ a+b & m+n \end{smallmatrix}\right)$ ровно для одной матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$.

Поэтому, с учетом равенства (1.12),

$$2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}} \frac{[m+n \leqslant R]}{(m+n)(a+b+m+n)} = 2\left(\Phi^*(R) - \frac{1}{2}\right) = \widetilde{E}(R) - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 E^2(\alpha, R)\, d\alpha = 4\sigma^*(R) + \frac{1}{2}, \tag{1.16}$$

что доказывает утверждение леммы. □

Замечание 1.2. Для суммы $\sigma^*(R)$ также справедливо представление:

$$\sigma^*(R) = \sum_{2 \leqslant Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \frac{s(Q/Q')}{Q'(Q+Q')}. \tag{1.17}$$

Действительно, если $S = S(q_1, \ldots, q_n)$, то матрицу $S' \in \mathcal{M}$, для которой $I(S) \subsetneq I(S')$, можно выбрать $n-1$ способом. Поэтому

$$\int_0^1 E^2(\alpha, R)\, d\alpha = \widetilde{E}(R) + 2 \sum_{\substack{S \in \mathcal{M} \\ Q' \geqslant 2}} \frac{n-1}{Q'(Q+Q')}.$$

По свойству 4° множества $\mathcal{M}$ для фиксированных Q и Q' ($1 \leqslant Q < Q'$, $(Q, Q') = 1$) параметр n может принимать два значения $s(Q/Q')$ и $s(Q/Q') + 1$. Таким образом

$$\int_0^1 E^2(\alpha, R)\, d\alpha = \widetilde{E}(R) + 2 \sum_{2 \leqslant Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \frac{2s(Q/Q') - 1}{Q'(Q+Q')} =$$

$$= 4 \sum_{2 \leqslant Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \frac{s(Q/Q')}{Q'(Q+Q')} + \frac{1}{2},$$

что, с учетом равенства (1.16), доказывает формулу (1.17).

Для нахождения $\widetilde{D}(R)$ введем параметр U, лежащий в пределах $2 \leqslant U \leqslant R$. Сумму $\sigma^*(R)$ представим в виде

$$\sigma^*(R) = \sigma_1^* - \sigma_2^* + \sigma_3^*,$$

где

$$\sigma_1^* = \sum_{Q' \leqslant R} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \frac{1}{(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')}, \tag{1.18}$$

$$\sigma_2^* = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \frac{[mQ+nQ' > R]}{(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')}, \tag{1.19}$$

$$\sigma_3^* = \sum_{Q' \leqslant R_1} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M} \\ n > U}} \frac{[mQ+nQ' \leqslant R]}{(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')}, \tag{1.20}$$

и $R_1 = R/U$.

Каждую из величин σ_1^*, σ_2^* и σ_3^* исследуем отдельно.

1.4. Вычисление трех вспомогательных сумм

1.4.1. Вычисление суммы σ_1^*. Для матрицы $S = \left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$ через $f_S(\xi)$ будем обозначать функцию

$$f_S(\xi) = \frac{1}{(m\xi + n)((a+m)\xi + (b+n))}, \tag{1.21}$$

а через $J_1(a,b,m,n)$ — интеграл

$$J_1(a,b,m,n) = \int_0^1 f_S(\xi)\, d\xi.$$

Далее штрих в суммах вида

$$\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot \ldots$$

будет означать, что (в соответствии со свойством 5° множества $\mathcal{M}$) при $n = 1$ из двух знаков в символе $\pm$ выбирается знак "минус", а при $n > 1$ оба знака берутся независимо; под a в таких суммах будет подразумеваться дробь $\frac{bm\pm 1}{n}$.

Лемма 1.6. *Пусть n — натуральное число. Тогда для суммы*

$$w_1(n) = \sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot J_1(a,b,m,n)$$

справедлива асимптотическая формула

$$w_1(n) = 2\log^2 2 \cdot \frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right),$$

где

$$\psi(n) = \sigma_0(n)\log^2(n+1).$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 2$. Так как

$$\frac{1}{\xi(\frac{bm\pm 1}{n} + m) + (b+n)} - \frac{1}{\xi(\frac{bm}{n} + m) + (b+n)} = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{1.22}$$

то для суммы $w_1(n)$ можно выписать более простое представление:

$$w_1(n) = \sum_{b,m=1}^{n} \delta_n(bm \pm 1) \int_0^1 \frac{d\xi}{\left(\frac{b}{n} + 1\right)(m\xi + n)^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее применим лемму 5.14. Числа

$$a(b,m) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\left(\frac{b}{n} + 1\right)(m\xi + n)^2},$$

очевидно, удовлетворяют условиям (5.24), значит,

$$w_1(n) = 2\frac{\varphi(n)}{n^2}\sum_{b,m=1}^{n}\frac{1}{b+n}\int_0^1\frac{n\,d\xi}{(m\xi+n)^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right). \tag{1.23}$$

Из леммы 5.5 следуют асимптотические формулы

$$\sum_{b=1}^{n}\frac{1}{b+n} = \log 2 + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.24}$$

$$\sum_{m=1}^{n}\int_0^1\frac{n\,d\xi}{(m\xi+n)^2} = \log 2 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Подставляя их в равенство (1.23), приходим к утверждению леммы. □

Следствие 1.1. *При любом действительном $U \geqslant 2$ для суммы*

$$W_1(U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)} J_1(a,b,m,n) \tag{1.25}$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_1(U) = \frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + C_1 + O\left(\frac{\log^3 U}{U^{1/2}}\right), \tag{1.26}$$

где

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)\cdot J_1\left(a,b,m,n\right) - 2\log^2 2\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\right). \tag{1.27}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{n>U}\frac{\psi(n)}{n^{3/2}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{2^kU<n\leqslant 2^{k+1}U}\frac{\sigma_0(n)\log^2(n+1)}{n^{3/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log^2(1+2^{k+1}U)}{(2^kU)^{3/2}}\sum_{1\leqslant n\leqslant 2^{k+1}U}\sigma_0(n) \ll \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log^3(2^kU)}{(2^kU)^{1/2}} \ll \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^3+\log^3 U}{(2^kU)^{1/2}}.$$

Поэтому

$$\sum_{n>U}\frac{\psi(n)}{n^{3/2}} \ll \frac{\log^3 U}{U^{1/2}} \qquad (U\geqslant 2). \tag{1.28}$$

Запишем сумму $W_1(U)$ в виде

$$W_1(U) = \sum_{n\leqslant U}\sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)\cdot J_1\left(a,b,m,n\right).$$

По лемме 1.6 с помощью оценки (1.28) находим:

$$W_1(U)=\sum_{n\leqslant U}\left(\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm\pm 1)\cdot J_1\left(a,b,m,n\right)-2\log^2 2\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\right)+$$

$$+2\log^2 2\sum_{n\leqslant U}\frac{\varphi(n)}{n^2}=2\log^2 2\sum_{n\leqslant U}\frac{\varphi(n)}{n^2}+C_1+O\left(\frac{\log^3 U}{U^{1/2}}\right).$$

Подставляя в последнее равенство формулу (5.4), приходим к утверждению следствия. □

В дальнейшем также понадобятся асимптотические формулы для сумм $A(U,0)$, $A(U,1)$ и $B(U,\xi)$, где

$$A(U,\xi)=\sum_{S\in\mathcal{M}(U)}f(\xi), \tag{1.29}$$

$$B(U,\xi)=\sum_{S\in\mathcal{M}(U)}f_S'(\xi). \tag{1.30}$$

Отметим, что

$$f_S(0)=\frac{1}{n(m+n)},$$

и, согласно равенству (1.14),

$$A(U,0)=\widetilde{E}(U).$$

Лемма 1.7. *Для любого $U\geqslant 2$ выполняются асимптотические формулы*

$$A(U,1)=\frac{\log 2}{\zeta(2)}\log U+C_2+O\left(\frac{\log^3 U}{U^{1/2}}\right),$$

$$B(U,\xi)=-\frac{2\log 2}{\zeta(2)(\xi+1)^2}\left(\log U+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+C_3(\xi)+O\left(\frac{\log^3 U}{U^{1/2}}\right),$$

где

$$C_2=\frac{\log 2}{\zeta(2)}\left(\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{b,m=1}^{n}{}'\delta_n(bm\pm 1)\cdot f_S(1)-\log 2\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\right),$$

$$C_3(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{b,m=1}^{n}{}'\delta_n(bm\pm 1)\cdot f_S'(\xi)+\frac{2\log 2}{(\xi+1)^2}\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\right). \tag{1.31}$$

Доказательство. Из равенства

$$\frac{\partial f_S(\xi)}{\partial b}=-\frac{1}{n\left((m\xi+n)^2(\frac{b}{n}+1)\pm\frac{\xi}{n}\right)^2} \tag{1.32}$$

следует, что числа

$$a(b,m)=f_S(\xi)=\frac{1}{\left((m\xi+n)^2(\frac{b}{n}+1)\pm\frac{\xi}{n}\right)}$$

при любом $\xi \in [0,1]$ удовлетворяют условиям леммы 5.14. Отсюда, как и при доказательстве следствия 1.1, получаем

$$\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot f_S(1) = \sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \frac{1}{(\frac{b}{n}+1)(m+n)^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 2\frac{\varphi(n)}{n^2} \sum_{b,m=1}^{n} \frac{1}{(\frac{b}{n}+1)(m+n)^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right) = \log 2 \cdot \frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right).$$

Поэтому, с помощью оценки (1.28), находим

$$A(U,1) = \sum_{n \leqslant U} \left(\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot f_S(1) - \log 2 \cdot \frac{\varphi(n)}{n^2} \right) + \log 2 \sum_{n \leqslant U} \frac{\varphi(n)}{n^2} =$$

$$= \log 2 \sum_{n \leqslant U} \frac{\varphi(n)}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot f_S(1) - \log 2 \cdot \frac{\varphi(n)}{n^2} \right) + O\left(\frac{\log^3 U}{U^{1/2}}\right).$$

Подставляя в последнее равенство формулу (5.4), приходим к первому утверждению леммы.

Из равенства

$$f_S'(\xi) = -\frac{2m}{(m\xi+n)^3(\frac{b}{n}+1)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

вытекает, что

$$\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot f_S'(\xi) = -\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \frac{2m}{(m\xi+n)^3(\frac{b}{n}+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Снова применяя лемму 5.14, получаем

$$\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot f_S'(\xi) = -\frac{\varphi(n)}{n^2} \sum_{b,m=1}^{n} \frac{2m}{(m\xi+n)^3(\frac{b}{n}+1)} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right) =$$

$$= -\frac{2\log 2}{(\xi+1)^2} \cdot \frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right).$$

Отсюда, так же используя оценку (1.28), находим

$$B(U,\xi) =$$

$$= \sum_{n \leqslant U} \left(\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot f_S'(\xi) + \frac{2\log 2}{(\xi+1)^2} \cdot \frac{\varphi(n)}{n^2} \right) - \frac{2\log 2}{(\xi+1)^2} \sum_{n \leqslant U} \frac{\varphi(n)}{n^2} =$$

$$= C_3(\xi) - \frac{2\log 2}{(\xi+1)^2} \sum_{n \leqslant U} \frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\log^3 U}{U^{1/2}}\right).$$

Вновь применяя формулу (5.4), приходим ко второму утверждению леммы. $\square$

Лемма 1.8. *Пусть* $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$ *и*

$$\eta(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\rho(qx)}{q^2}. \tag{1.33}$$

Тогда выполняется равенство

$$\int_0^1 \frac{\eta(x)}{(x+1)^2}\,dx = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{4}.$$

Доказательство. По определению функции $\rho(x)$

$$\int_0^1 \frac{\eta(x)}{(x+1)^2}\,dx = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \sum_{a=0}^{q-1} \int_{a/q}^{(a+1)/q} \left(\frac{1}{2} + a - qx\right) \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q+1} + \ldots + \frac{1}{2q} - \log 2 + \frac{1}{4q}\right) = \sigma_0 + \frac{\zeta(2)}{4}.$$

Подставляя сюда значение суммы σ_0 из формулы (1.11), приходим к утверждению леммы. $\square$

Лемма 1.9. *Предположим, что* $R, U \geqslant 2$ *и* R *— полуцелое число. Тогда для суммы*

$$\sigma_1(R,U) = \sum_{S\in\mathcal{M}(U)} \sum_{q\leqslant R} \sum_{x=1}^{q} \frac{1}{q^2} \cdot f_S\left(\frac{x}{q}\right), \tag{1.34}$$

где функция $f_S(t)$ *определена равенством (1.21), справедлива асимптотическая формула*

$$\sigma_1(R,U) = \frac{2\log^2 2}{\zeta(2)} \log R \log U + \left(\frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + C_1\right)\log R + C_1' +$$

$$+ \frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\log 2 + \gamma - \frac{\zeta(2)}{2\log 2}\right)\log U + \frac{1}{2R}\cdot\left(\frac{\log 2}{\zeta(2)}\log U + \widetilde{E}_0 - C_2\right) +$$

$$+ O\left(\frac{\log^3 U \cdot \log R}{U^{1/2}}\right) + O\left(\frac{\log U}{R^2}\right),$$

где константа C_1 *определена рядом (1.27),*

$$C_1' = \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\left(\frac{2\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2\log 2}\right) + \frac{C_1}{\zeta(2)}\right) -$$

$$- \frac{1}{\zeta^2(2)} \int_0^1 \eta(\xi) C_3(\xi)\,d\xi + \frac{C_2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}, \tag{1.35}$$

а C_2 *и* $C_3(\xi)$ *— величины из леммы 1.7.*

Доказательство. Применяя лемму 5.5 к функции

$$g(x) = \frac{1}{(mx+nq)((a+m)x+(b+n)q)} = \frac{1}{q^2} f_S\left(\frac{x}{q}\right),$$

получаем

$$\sum_{x=1}^{q}\frac{1}{q^2}f_S\left(\frac{x}{q}\right)=\frac{1}{q}\int_0^1 f_S(t)\,dt+\frac{1}{2q^2}(f_S(1)-f_S(0))-\frac{1}{q^2}\int_0^1\rho(qt)f_S'(t)\,dt.$$

Поскольку $\sigma(k)=0$ для целых k, то

$$\int_0^1\rho(qt)f_S'(t)\,dt=-\frac{1}{q}\int_0^1\sigma(qt)f_S''(t)\,dt\ll\frac{1}{n^2q}.$$

Отсюда, учитывая обозначения (1.25), (1.29), (1.30), по лемме 5.5 находим

$$\sigma_1(R,U)=(\log R+\gamma)W_1(U)+\frac{1}{2}\left(\zeta(2)-\frac{1}{R}\right)(A(U,1)-A(U,0))-$$
$$-\int_0^1\eta(t)B(U,t)\,dt+O\left(\frac{\log U}{R^2}\right).$$

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы для входящих в нее величин из следствия 1.1, теоремы 1 ($A(U,0)=\widetilde{E}(R)$), леммы 1.7 и применяя лемму 1.8, получаем утверждение леммы. □

Следствие 1.2. *Пусть $2\leqslant U\leqslant R$. Тогда для суммы*

$$\sigma_1^*=\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&m\\b&n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{Q\leqslant Q'}^{*}\frac{1}{(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')}$$

справедлива асимптотическая формула

$$\sigma_1^*=\frac{2\log^2 2}{\zeta^2(2)}\log R\log U+\frac{1}{\zeta(2)}\left(\frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+C_1\right)\log R+$$
$$+\frac{2\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}+\log 2-\frac{\zeta(2)}{2\log 2}\right)\log U+C_1'+O\left(\frac{\log^4 R}{U^{1/2}}\right),$$

с теми же константами, что и в лемме 1.9.

Доказательство. Утверждение следствия получается, если воспользоваться леммой 1.9, равенством

$$\sigma_1^*=\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{\delta|Q'}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&m\\b&n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\sum_{x=1}^{Q'/\delta}\frac{1}{(mx+nQ'/\delta)((a+m)x+(b+n)Q'/\delta)}=$$
$$=\sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sigma_1\left(\frac{R}{\delta},U\right)$$

и учесть условие $U\leqslant R$. □

1.4.2. Вычисление суммы σ_2^*. Для матрицы $S = \left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$ через $J_2(a,b,m,n)$ будем обозначать интеграл

$$J_2(a,b,m,n) = \int_0^1 \frac{\log(m\xi+n)\,d\xi}{(m\xi+n)((a+m)\xi+(b+n))}.$$

Лемма 1.10. *Пусть n — натуральное число. Тогда для суммы*

$$w_2(n) = \sideset{}{'}\sum_{b,m=1}^{n} \delta_n(bm\pm 1)\cdot J_2\left(\frac{bm\pm 1}{n}, b, m, n\right)$$

справедлива асимптотическая формула

$$w_2(n) = 2\log^2 2\cdot\frac{\varphi(n)\log n}{n^2} + \log^2 2\left(2+\log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\frac{\varphi(n)}{n^2} + \\ + O\left(\frac{\psi(n)\log(n+1)}{n^{3/2}}\right),$$

где, как и раньше,

$$\psi(n) = \sigma_0(n)\log^2(n+1).$$

— функция из леммы 5.14.

Доказательство. При $n=1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 2$. Из равенства (1.22) следует, что

$$w_2(n) = \int_0^1 \sum_{b,m=1}^{n} \delta_n(bm\pm 1)\frac{\log(m\xi+n)}{(1+\frac{b}{n})(m\xi+n)^2}\,d\xi + O\left(\frac{\log(n+1)}{n^3}\right).$$

Числа

$$a(b,m) = \frac{\log(m\xi+n)}{(1+\frac{b}{n})(m\xi+n)^2},$$

очевидно, удовлетворяют условиям (5.24). Поэтому, применяя лемму 5.14, находим

$$\begin{aligned} w_2(n) &= 2\frac{\varphi(n)}{n^2}\int_0^1 \sum_{b=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{b}{n}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\log(m\xi+n)}{(m\xi+n)^2}\,d\xi + O\left(\frac{\psi(n)\log(n+1)}{n^{3/2}}\right) = \\ &= 2\log 2\frac{\varphi(n)}{n}\int_0^1 d\xi\int_0^n \frac{\log(x\xi+n)}{(x\xi+n)^2}\,dx + O\left(\frac{\psi(n)\log(n+1)}{n^{3/2}}\right) = \\ &= 2\log 2\frac{\varphi(n)}{n^2}\int_0^1 d\xi\int_0^1 \frac{\log n+\log(z\xi+1)}{(z\xi+1)^2}\,dz + O\left(\frac{\psi(n)\log(n+1)}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{d\xi\, dz}{(z\xi+1)^2} = \int_0^1 \frac{dz}{z+1} = \log 2,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\log(z\xi+1)\, d\xi\, dz}{(z\xi+1)^2} = \int_0^1 \frac{z-\log(z+1)}{z(z+1)}\, dz =$$

$$= \left(\log(1+z) + \frac{\log^2(1+z)}{2} + \mathrm{Li}_2(-z)\right)\Bigg|_{z=0}^1 = \frac{\log 2}{2}\left(2+\log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right).$$

Подставляя их в формулу для $w_2(n)$, приходим к утверждению леммы. $\square$

Аналогично следствию 1.1, из лемм 5.8 и 1.10 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.3. *При любом действительном $U \geqslant 2$ для суммы*

$$W_2(U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)} J_2(a,b,m,n) \tag{1.36}$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_2(U) = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(2+\log 2-\frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\log U + C_4 + O\left(\frac{\log^4 U}{U^{1/2}}\right),$$

где

$$C_4 = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(2+\log 2-\frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + 2\log^2 2\cdot C_0 + C_4',$$

C_0 — константа из леммы 5.8 и C_4' — сумма ряда

$$C_4' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(w_2(n) - 2\log^2 2\cdot\frac{\varphi(n)}{n^2}\left(\log n + 2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\right). \tag{1.37}$$

Лемма 1.11. *Пусть $2 \leqslant U \leqslant R$. Тогда для суммы σ_2^*, заданной равенством (1.19), справедлива асимптотическая формула*

$$\sigma_2^* = \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)}\cdot\log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(2+\log 2-\frac{\zeta(2)}{\log 2}\right)\log U + \frac{C_4}{\zeta(2)} +$$
$$+ O\left(\frac{\log^4 R}{U^{1/2}}\right) + O\left(\frac{U\log R}{R}\right),$$

где C_4 — константа из следствия 1.3.

Доказательство. Применяя к внутренней сумме по переменной Q лемму 5.7, находим

$$\sigma_2^* = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant R} \sideset{}{^*}\sum_{Q \leqslant Q'} \frac{[mQ + nQ' > R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')} =$$

$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant R} \frac{\varphi(Q')}{Q'} \sum_{Q \leqslant Q'} \frac{[mQ + nQ' > R]}{(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')} +$$

$$+ O\left(\frac{U \log R}{R}\right).$$

Переходя от суммы по переменной Q к интегралу и делая замену переменной $Q = \xi Q'$, получаем

$$\sigma_2^* = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant R} \frac{\varphi(Q')}{(Q')^2} \int_0^1 \frac{[m\xi + n > R/Q']\, d\xi}{(m\xi + n)((a+m)\xi + b + n)} + O\left(\frac{U \log R}{R}\right).$$

Далее, так как

$$\sum_{Q' \leqslant R} \frac{\varphi(Q')}{(Q')^2} [m\xi + n > R/Q'] = \sum_{\delta \leqslant R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{Q' \leqslant R/\delta} \frac{[m\xi + n > R/(\delta Q')]}{Q'} =$$

$$= \sum_{\delta \leqslant R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \left(\log(m\xi + n) + O\left(\frac{n\delta}{R}\right)\right) = \frac{\log(m\xi + n)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{n \log R}{R}\right),$$

то

$$\sigma_2^* = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{\log(m\xi + n)\, d\xi}{(m\xi + n)((a+m)\xi + (b+n))} + O\left(\frac{U \log R}{R}\right) =$$

$$= \frac{1}{\zeta(2)} W_2(U) + O\left(\frac{U \log R}{R}\right).$$

Применяя следствие 1.3, приходим к утверждению леммы. □

1.4.3. Вычисление суммы σ_3^*. Рассмотрим сначала вспомогательную сумму

$$G(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi} \sum_{m \leqslant n} \frac{1}{m} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right) \left(\log \frac{\xi}{n} - 1\right) + \frac{1}{m+n} \log \frac{m+n}{n} \right) -$$

$$- \sum_{n \leqslant \xi} \sum_{m \leqslant n} [m + n > \xi] \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n} \left(\log \frac{\xi}{m+n} + 1\right)\right). \tag{1.38}$$

Лемма 1.12. *При* $\xi \geqslant 2$

$$G(\xi) = \frac{\log 2}{2} \log \xi \,(\log \xi + 2H_0) + C_G + O\left(\frac{\log^2 \xi}{\xi}\right),$$

где C_G — некоторая абсолютная постоянная и

$$H_0 = \frac{\log 2}{2} + \gamma - 1.$$

Доказательство. Перепишем сумму $G(\xi)$ в виде

$$G(\xi) = (\log \xi - 1) \cdot \Phi(\xi) - G_1(\xi) + G_2(\xi) - G_3(\xi) - G_4(\xi), \tag{1.39}$$

где

$$\begin{aligned}
G_1(\xi) &= \sum_{n\leqslant\xi}\sum_{m\leqslant n} \frac{\log n}{n(m+n)},\\
G_2(\xi) &= \sum_{n\leqslant\xi}\sum_{m\leqslant n} \frac{1}{m(m+n)} \log\frac{m+n}{n},\\
G_3(\xi) &= \sum_{n\leqslant\xi}\sum_{m\leqslant n} \frac{[m+n>\xi]}{m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n}\right),\\
G_4(\xi) &= \sum_{n\leqslant\xi}\sum_{m\leqslant n} \frac{[m+n>\xi]}{m(m+n)} \log\frac{m+n}{\xi},
\end{aligned}$$

и $\Phi(\xi)$ определено равенством (1.7).

Для вычисления суммы $G_1(\xi)$ воспользуемся формулой (5.3):

$$\begin{aligned}
G_1(\xi) &= \sum_{n\leqslant\xi} \frac{\log n}{n} \left(\sum_{m\leqslant n} \frac{1}{m+n} - \log 2\right) + \log 2 \sum_{n\leqslant\xi} \frac{\log n}{n} =\\
&= \log 2 \left(\frac{\log^2 \xi}{2} + \gamma_1\right) + C_5 + O\left(\frac{\log \xi}{\xi}\right) =\\
&= \frac{\log 2}{2} \cdot \log^2 \xi + C_{G_1} + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right),
\end{aligned} \tag{1.40}$$

где

$$C_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \left(\sum_{m\leqslant n} \frac{1}{m+n} - \log 2\right), \qquad C_{G_1} = \gamma_1 \cdot \log 2 + C_5.$$

Для вычисления $G_2(\xi)$ заметим, что, согласно лемме 5.9 и равенству (5.3),

$$\sum_{m\leqslant n} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n}\right) \log\frac{m+n}{n} = \frac{1}{2}(\zeta(2) - \log^2 2) + O\left(\frac{\log(n+1)}{n}\right).$$

Поэтому

$$G_2(\xi) = \frac{1}{2}(\zeta(2) - \log^2 2) \sum_{n \leqslant \xi} \frac{1}{n} +$$
$$+ \sum_{n \leqslant \xi} \frac{1}{n} \left(\sum_{m \leqslant n} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} \right) \cdot \log \frac{m+n}{n} - \frac{\zeta(2) - \log^2 2}{2} \right) =$$
$$= \frac{1}{2}(\zeta(2) - \log^2 2)(\log \xi + \gamma) + C_{G_2} + O\left(\frac{\log \xi}{\xi} \right), \tag{1.41}$$

где

$$C_{G_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{m \leqslant n} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} \right) \cdot \log \frac{m+n}{n} - \frac{\zeta(2) - \log^2 2}{2} \right).$$

Сумму $G_3(\xi)$ представим в виде

$$G_3(\xi) = G_{3,1}(\xi) + G_{3,2}(\xi),$$

где

$$G_{3,1}(\xi) = \frac{1}{\xi} \sum_{n \leqslant \xi} \sum_{m \leqslant n} \frac{[m+n > \xi]}{m}, \quad G_{3,2}(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi} \sum_{m \leqslant n} \frac{[m+n > \xi]}{m(m+n)}.$$

После перемены порядка суммирования в сумме $G_{3,1}(\xi)$ находим

$$G_{3,1}(\xi) = \frac{1}{\xi} \sum_{m \leqslant \xi/2} \frac{1}{m} \sum_{\xi - m < n \leqslant \xi} 1 + \frac{1}{\xi} \sum_{\xi/2 < m \leqslant \xi} \frac{1}{m} \sum_{m \leqslant n \leqslant \xi} 1 =$$
$$= \log 2 + O\left(\frac{\log \xi}{\xi} \right).$$

Аналогично,

$$G_{3,2}(\xi) = \sum_{m \leqslant \xi/2} \frac{1}{m} \sum_{\xi - m < n \leqslant \xi} \frac{1}{m+n} + \sum_{\xi/2 < m \leqslant \xi} \frac{1}{m} \sum_{m \leqslant n \leqslant \xi} \frac{1}{m+n} =$$
$$= Z_1(\xi) - \log \xi (\log \xi + \gamma) - \frac{\log^2 2}{2} + O\left(\frac{\log \xi}{\xi} \right),$$

где $Z_1(\xi)$ определено в условии леммы 5.9. Подставляя сюда асимптотическую формулу для $Z_1(\xi)$ из леммы 5.9, получаем

$$G_{3,2}(\xi) = \frac{1}{2}(\zeta(2) - \log^2 2) + O\left(\frac{\log \xi}{\xi} \right),$$
$$G_3(\xi) = C_{G_3} + O\left(\frac{\log \xi}{\xi} \right), \tag{1.42}$$

где

$$C_{G_3} = \log 2 - \frac{1}{2}(\zeta(2) - \log^2 2).$$

В сумме $G_4(\xi)$ также переменим порядок суммирования:

$$G_4(\xi) = \sum_{m\leqslant \xi/2} \frac{1}{m} \sum_{\xi-m\leqslant n\leqslant \xi} \frac{\log(m+n)-\log\xi}{m+n} +$$
$$+ \sum_{\xi/2<m\leqslant \xi} \frac{1}{m} \sum_{m\leqslant n\leqslant \xi} \frac{\log(m+n)-\log\xi}{m+n} + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right).$$

Внутренние суммы по переменной n заменим интегралами:

$$G_4(\xi) = \sum_{m\leqslant \xi/2} \frac{1}{m}\left(\frac{\log^2(m+\xi)-\log^2\xi}{2} - \log\xi\cdot\log\frac{m+\xi}{\xi}\right)+$$
$$+ \sum_{\xi/2<m\leqslant \xi} \frac{1}{m}\left(\frac{\log^2(m+\xi)-\log^2(2m)}{2} - \log\xi\cdot\log\frac{m+\xi}{2m}\right) + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right) =$$
$$= \sum_{m\leqslant \xi} \frac{1}{m}\left(\frac{\log^2(m+\xi)}{2} - \log\xi\cdot\log(m+\xi)\right) + \frac{\log^2\xi}{2}\sum_{m\leqslant \xi/2}\frac{1}{m}+$$
$$+ \sum_{\xi/2<m\leqslant \xi} \frac{1}{m}\left(\log\xi\cdot\log(2m) - \frac{\log^2(2m)}{2}\right) + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right).$$

Используя суммы $Z_1(\xi)$, $Z_3(\xi)$ из леммы 5.9 и равенство (5.3), перепишем $G_4(\xi)$ в виде

$$G_4(\xi) = \frac{1}{2}Z_3(\xi) - \log\xi\cdot Z_1(\xi) + \frac{1}{2}\log^3\xi + \frac{\gamma}{2}\log^2\xi - \frac{\log^3 2}{6} + O\left(\frac{\log^2\xi}{\xi}\right).$$

Пользуясь асимптотическими формулами для $Z_1(\xi)$ и $Z_3(\xi)$ из леммы 5.9, находим

$$G_4(\xi) = \frac{\zeta(3)}{8} - \frac{\log^3 2}{6} + O\left(\frac{\log^2\xi}{\xi}\right) = C_{G_4} + O\left(\frac{\log^2\xi}{\xi}\right). \tag{1.43}$$

Подставляя (1.40)–(1.43) в (1.39) и применяя лемму 1.3, приходим к нужной формуле для $G(\xi)$. □

Лемма 1.13. *Пусть $2\leqslant U\leqslant R$. Тогда для суммы σ_3^*, заданной равенством (1.20), справедлива асимптотическая формула*

$$\sigma_3^* = \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)}\cdot\log\frac{R}{U}\left(\log\frac{R}{U}+2H\right) + C_6 + O\left(\frac{\log^4 R}{U^{1/2}}\right) + O\left(\frac{U\log^3 R}{R}\right),$$

где

$$H = \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \frac{\log 2}{2} - 1, \tag{1.44}$$

и C_6 — абсолютная постоянная.

Доказательство. Так как для любой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}$

$$\frac{1}{(a+m)Q+(b+n)Q'} - \frac{1}{(\frac{bm}{n}+m)Q+(b+n)Q'} \ll \frac{1}{n^3Q'}$$

и

$$\sum_{Q'\leqslant R}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix}a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}\\ n>U}}\frac{1}{n^4(Q')^2}\ll\frac{\log R}{U^2},$$

то сумму σ_3^* можно переписать в виде

$$\sigma_3^*=\sum_{Q'\leqslant R_1}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{n>U}\sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)\frac{[mQ+nQ'\leqslant R]}{(b/n+1)(mQ+nQ')^2}+O\left(\frac{\log R}{U^2}\right),$$

где $R_1=R/U$. Числа

$$a(b,m)=\frac{1}{(b/n+1)(mQ+nQ')^2},$$

а вместе с ними и

$$a(b,m)=\frac{[mQ+nQ'\leqslant R]}{(b/n+1)(mQ+nQ')^2},$$

удовлетворяют условиям (5.24). Поэтому, применяя лемму 5.14 и оценку (1.28), находим

$$\sigma_3^*=2\sum_{Q'\leqslant R_1}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{n>U}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{b=1}^{n}\frac{1}{b+n}\sum_{m=1}^{n}\frac{[mQ+nQ'\leqslant R]}{(mQ+nQ')^2}+O\left(\frac{\log^4 R}{U^{1/2}}\right).$$

Далее, по формуле (1.24)

$$\sigma_3^*=2\log 2\cdot\sigma_4^*+O\left(\frac{\log^4 R}{U^{1/2}}\right), \tag{1.45}$$

где

$$\sigma_4^*=\sum_{Q'\leqslant R_1}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{n>U}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{[mQ+nQ'\leqslant R]}{(mQ+nQ')^2}=$$

$$=\sum_{Q'\leqslant R_1}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{U<n\leqslant\frac{R}{Q+Q'}}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(mQ+nQ')^2}+$$

$$+\sum_{Q'\leqslant R_1}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{\max\left\{U,\frac{R}{Q+Q'}\right\}<n\leqslant\frac{R}{Q'}}\frac{\varphi(n)}{n}\sum_{m\leqslant\frac{R-nQ'}{Q}}\frac{1}{(mQ+nQ')^2}.$$

Заменяя внутренние суммы по переменной m на соответствующие интегралы, получаем

$$\sigma_4^*=\sum_{Q'\leqslant R_1}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{U<n\leqslant\frac{R}{Q+Q'}}\frac{\varphi(n)}{n}\cdot\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{nQ'}-\frac{1}{nQ+nQ'}\right)+$$

$$+\sum_{Q'\leqslant R_1}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{\max\left\{U,\frac{R}{Q+Q'}\right\}<n\leqslant\frac{R}{Q'}}\frac{\varphi(n)}{n}\cdot\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{nQ'}-\frac{1}{R}\right)+O\left(\frac{\log R}{U}\right).$$

Далее, выражая $\varphi(n)$ через функцию Мёбиуса и освобождаясь от условия взаимной простоты на переменные Q и Q', получаем следующее представление для суммы $\sigma_4^* = \sigma_4^*(R,U)$:

$$\sigma_4^*(R,U) = \sum_{d_1 \leqslant R/U} \sum_{d_2 \leqslant R/d_1} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^2 d_2^2} \sigma_4\left(\frac{R}{d_1 d_2}, \frac{U}{d_2}\right) + O\left(\frac{\log R}{U}\right), \quad (1.46)$$

где

$$\sigma_4(R,U) = \sum_{Q' \leqslant R/U} \sum_{Q \leqslant Q'} \sum_{U < n \leqslant \frac{R}{Q+Q'}} \frac{1}{nQ}\left(\frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q+Q'}\right) +$$
$$+ \sum_{Q' \leqslant R/U} \sum_{Q \leqslant Q'} \sum_{\max\left\{U, \frac{R}{Q+Q'}\right\} < n \leqslant \frac{R}{Q'}} \frac{1}{nQ}\left(\frac{1}{Q'} - \frac{n}{R}\right).$$

Заменяя суммы по переменной n на интегралы, находим

$$\sigma_4(R,U) = G(R/U) + O\left(\frac{\log^2 R}{U}\right),$$

где $G(\xi)$ задается равенством (1.38). По лемме 1.12

$$\sigma_4(R,U) = \frac{\log 2}{2} \log\frac{R}{U}\left(\log\frac{R}{U} + 2H_0\right) + C_G + O\left(\frac{U\log^2 R}{R}\right) + O\left(\frac{\log^2 R}{U}\right).$$

Подставляя эту формулу в (1.46), получаем следующее представление для суммы $\sigma_4^*(R,U)$:

$$\sigma_4^*(R,U) = \frac{\log 2}{2\zeta^2(2)} \log\frac{R}{U}\left(\log\frac{R}{U} + 2H\right) + C_4^* + O\left(\frac{\log^3 R}{U}\right) + O\left(\frac{U\log^3 R}{R}\right),$$

где C_4^* — абсолютная константа, и H задано равенством (1.44). Подставляя асимптотическую формулу для суммы σ_4^* в (1.45), приходим к утверждению леммы. □

1.5. Асимптотическая формула для дисперсии

Доказательство теоремы 2 . Объединяя результаты следствия 1.2, лемм 1.11 и 1.13, для суммы $\sigma^*(R) = \sigma_1^* - \sigma_2^* + \sigma_3^*$ получаем асимптотическую формулу

$$\sigma^*(R) = \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)} \log^2 R + \frac{\log R}{\zeta(2)}\left(\frac{2\log^2 2}{\zeta(2)}\left(2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \frac{\log 2}{2} - 1\right) + C_1\right) +$$
$$+ C_6 + C_1' - \frac{C_4}{\zeta(2)} + O\left(\frac{U\log^3 R}{R}\right) + O\left(\frac{\log^4 R}{U^{1/2}}\right). \quad (1.47)$$

Выбирая $U = R^{2/3}\log R$ и применяя леммы 1.4, 1.5 приходим к утверждению теоремы с константами

$$\widetilde{D}_1 = \frac{8\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log 2}{2} - 1\right) + \frac{4}{\zeta(2)}\left(C_1 + \frac{3\log 2}{2}\right), \qquad (1.48)$$

$$\widetilde{D}_0 = 4\left(C_6 + C_1' - \frac{C_4}{\zeta(2)}\right) - \left(\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \log 2\right) - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

где C_1, C_1', C_4 определены соответственно равенствами (1.27), (1.35), (1.37), и C_6 — константа из леммы 1.13. □

Замечание 1.3. Равенство (1.47) из доказательства теоремы 2 дает асимптотическую формулу с тремя значащими членами для суммы из (1.17).

Замечание 1.4. Константа C_1, определенная равенством (1.27), возникает также при усреднении $E(\alpha, R)$ по мере Гаусса

$$\frac{1}{\log 2}\int \frac{d\alpha}{1+\alpha}.$$

Действительно, непосредственные вычисления, основанные на представлении (1.13), приводят к равенству

$$\frac{1}{\log 2}\int_0^1 E(\alpha, R)\cdot\frac{d\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{\log 2}\cdot W_1(R),$$

где $W_1(R)$ — сумма определенная формулой (1.25). Значит, согласно следствию 1.1,

$$\frac{1}{\log 2}\int_0^1 E(\alpha, R)\cdot\frac{d\alpha}{1+\alpha} = \frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\log R + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \frac{C_1}{\log 2} + O\left(R^{-1/2+\varepsilon}\right).$$

ГЛАВА 2

Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида

В данной главе вопрос о поведении математического ожидания

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s(c/d) \tag{2.1}$$

и дисперсии

$$D(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} \left(s(c/d) - E(R)\right)^2. \tag{2.2}$$

сводится к исследованию двух неравенств, второй и третьей степени соответственно.

Первое из них —

$$kQ + lQ' \leqslant R, \tag{2.3}$$

где

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad (Q, Q') = 1$$

линейно относительно двух групп переменных — $\{k, l\}$ и $\{Q, Q'\}$.

Поскольку для любого решения $l \cdot Q' \leqslant R$, то либо $Q' \leqslant [\sqrt{R}] + 1/2$, либо $l \leqslant \sqrt{R} + 1$. В первом случае неравенство сначала решается относительно неизвестных k, l, а во втором — относительно Q, Q'.

Второе неравенство

$$k(aQ + bQ') + l(mQ + nQ') \leqslant R, \tag{2.4}$$

в котором

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad (Q, Q') = 1, \quad \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$

линейно уже относительно трех наборов переменных — $\{k, l\}$, $\{Q, Q'\}$ и $\{a, b, m, n\}$. Его решения разбиваются на три группы:

1) $n \leqslant U$, $Q' \leqslant U_0$;

2) $n \leqslant U$, $Q' > U_0$;

3) $n > U$,

где $U = R^{3/4} \log^{-1/4} R$ и $U_0 = [R^{1/2} U^{-1/2}] + 1/2$. Каждая из них исследуется отдельно.

Кроме того, при подсчете числа решений неравенства (2.4) возникает необходимость в анализе вспомогательного неравенства второй степени

$$(\alpha m + n)(\beta k + l) \leqslant R$$

с неизвестными

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant m \leqslant n.$$

Оно также линейно относительно двух наборов переменных $\{m, n\}$, $\{k, l\}$ и исследуется аналогично неравенству (2.3).

Доказательство теоремы 4 дает следующую формулу для вычисления константы Хенсли D_1:

$$D_1 = \frac{8\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log 2}{2} - 1\right) + \frac{4}{\zeta(2)}\left(C_1 + \frac{3\log 2}{2}\right),$$

где C_1 определено равенством (1.27).

Компьютерные вычисления дают следующее приближенное значение константы D_1, которое согласуется с результатами статьи [**61**]:

$$D_1 = 0.51606\ldots$$

Настоящая глава основана на работах [**29, 30**].

2.1. О математическом ожидании и дисперсии

В следующей лемме для рациональных чисел $r \in (0, 1]$ будет использоваться (однозначное) разложение в цепную дробь с единицей на конце:

$$r = [0; t_1, \ldots, t_s, 1] \qquad (s \geqslant 0).$$

Оно удобнее канонического разложения тем, что единообразно описывает все такие числа, включая $r = 1$.

Лемма 2.1. *Пусть c и d — натуральные числа, $1 \leqslant c \leqslant d$ и*

$$\frac{c}{d} = [0; t_1, \ldots, t_{s-1}, t_s, 1] \qquad (s \geqslant 0). \tag{2.5}$$

Тогда:

1) уравнение

$$S \cdot \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

в котором неизвестными являются числа k, $l \in \mathbb{N}$ $(k \leqslant l)$ и матрица $S \in \mathcal{M}$, имеет s решений;

2) уравнение

$$S_1 \cdot S_2 \cdot \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

имеет $s(s-1)/2$ решений относительно неизвестных

$$k, l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant k \leqslant l, \qquad S_1, S_2 \in \mathcal{M}.$$

Доказательство. Если $k/l = [0; q_1, \ldots, q_m, 1]$ $(m \geqslant 0)$,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_n \end{pmatrix}$$

и числа c, d определены равенством (2.6), то

$$\frac{c}{d} = [0; z_1, \ldots, z_n, q_1, \ldots, q_m, 1]$$

(см. лемму 1.1 и свойство 5° множества $\mathcal{M}$). Поэтому из условий (2.5), (2.6) и леммы 1.1 вытекает, что для некоторого j ($1 \leqslant j \leqslant s$)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_j \end{pmatrix}, \qquad \frac{k}{l} = [0; t_{j+1}, \dots, t_s, 1].$$

Значит, количество решений уравнения (2.6) совпадает с числом способов, которыми можно выбрать j в пределах от 1 до s и равно s.

Аналогично из условий (2.5) и (2.7) следует, что для некоторых j и r таких, что $1 \leqslant j < r \leqslant s$, выполняются равенства

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_j \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_{j+1} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_r \end{pmatrix}, \quad \frac{k}{l} = [0; t_{r+1}, \dots, t_s, 1].$$

Поэтому количество решений уравнения (2.7) равно числу пар (j, r) таких, что $1 \leqslant j < r \leqslant s$, то есть $s(s-1)/2$. Лемма доказана. □

Замечание 2.1. Пусть в равенстве (2.6) $S = \left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right)$. Тогда из доказательства п. 1) леммы 2.1 следует неравенство

$$s_1\left(\frac{ak + ml}{bk + nl}\right) \ll s_1\left(\frac{m}{n}\right) + s_1\left(\frac{k}{l}\right),$$

где $s_1(r)$ — сумма неполных частных числа r.

Для действительного $R \geqslant 1$ положим

$$\mathcal{L}_1(R) = \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s(c/d), \qquad \mathcal{L}_2(R) = \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s^2(c/d).$$

Тогда, в соответствии с (2.1) и (2.2),

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \cdot \mathcal{L}_1(R), \tag{2.8}$$

$$D(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \cdot \mathcal{L}_2(R) - E^2(R). \tag{2.9}$$

Поэтому, чтобы доказать основные результаты (0.12) и (0.13), для сумм $\mathcal{L}_1(R)$ и $\mathcal{L}_2(R)$ нужно получить асимптотические формулы с двумя и тремя значащими членами соответственно.

Через $\lambda(d)$ обозначим число решений уравнения

$$kQ + lQ' = d$$

относительно неизвестных k, l, Q и Q' таких, что

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad (Q, Q') = 1. \tag{2.10}$$

Через $N^*(R)$ обозначим число решений неравенства

$$kQ + lQ' \leqslant R \tag{2.11}$$

относительно неизвестных k, l, Q, Q', связанных условиями (2.10); другими словами

$$N^*(R) = \sum_{d \leqslant R} \lambda(d).$$

Соответственно, через $M^*(R)$ обозначим число решений неравенства

$$k(aQ+bQ')+l(mQ+nQ')\leqslant R, \tag{2.12}$$

в котором

$$1\leqslant k\leqslant l,\quad 1\leqslant Q\leqslant Q',\quad (Q,Q')=1,\quad \begin{pmatrix} a & m\\ b & n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}. \tag{2.13}$$

Следующее утверждение сводит задачу о подсчете величин $E(R)$ и $D(R)$ к исследованию неравенств (2.11) и (2.12).

Лемма 2.2. *Пусть $R\geqslant 1$. Тогда*

$$\mathcal{L}_1(R)=2N^*(R)-\left[\frac{R}{2}\right]\cdot\left[\frac{R+1}{2}\right], \tag{2.14}$$

$$\mathcal{L}_2(R)=4M^*(R)+\left[\frac{R}{2}\right]\cdot\left[\frac{R+1}{2}\right]. \tag{2.15}$$

Доказательство. Из первого пункта леммы 2.1 вытекает, что сумма

$$\sum_{c\leqslant d}s(c/d)$$

равна числу решений уравнения

$$\begin{pmatrix} * & *\\ Q & Q'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k\\ l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} *\\ d\end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

где

$$\begin{pmatrix} * & *\\ Q & Q'\end{pmatrix}\in\mathcal{M},\quad 1\leqslant k\leqslant l.$$

Если $Q'\geqslant 2$, то по свойству 5° множества $\mathcal{M}$ для пары (Q,Q') существует ровно две пары чисел (P,P'), которые дополняют вторую строку (Q,Q') до матрицы из $\mathcal{M}$. Значит, в этом случае число решений уравнения (2.16) равно $2\lambda(d)$. Если же $Q'=1$, то $Q=1$, и число решений уравнения (2.16) совпадает с числом решений уравнения $k+l=d$, где $1\leqslant k\leqslant l$, то есть равно $[d/2]$.

Таким образом,

$$\sum_{d\leqslant R}\sum_{c\leqslant d}s(c/d)=\sum_{d\leqslant R}\left(2\lambda(d)-\left[\frac{d}{2}\right]\right)=$$
$$=2\sum_{d\leqslant R}\lambda(d)-\left[\frac{R}{2}\right]\cdot\left[\frac{R+1}{2}\right]=2N^*(R)-\left[\frac{R}{2}\right]\cdot\left[\frac{R+1}{2}\right].$$

Что доказывает первое утверждение леммы.

Для доказательства равенства (2.15) заметим, что по лемме 2.1 сумма

$$\frac{1}{2}\sum_{c\leqslant d}s(c/d)(s(c/d)-1)$$

совпадает с числом решений уравнения

$$\begin{pmatrix} * & * \\ Q & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} * & * \\ aQ + bQ' & mQ + nQ' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

где

$$\begin{pmatrix} * & * \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \quad 1 \leqslant k \leqslant l.$$

Если $Q' \geqslant 2$, то по свойству 5° множества $\mathcal{M}$ число решений уравнения (2.17) равно удвоенному числу решений уравнения

$$k(aQ + bQ') + l(mQ + nQ') = d$$

с ограничениями (2.13). Если же $Q' = 1$, то $Q = 1$, $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, и уравнение (2.17) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} * & * \\ a + b & m + n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

По свойству 5° (см. равенство (1.6)) множество пар $(a+b, m+n)$ совпадает с множеством всех пар (Q, Q') таких, что $1 \leqslant Q < Q'$ и $(Q, Q') = 1$. Следовательно, уравнение (2.18) может быть записано в виде

$$kQ + lQ' = d,$$

где

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant Q < Q', \quad (Q, Q') = 1.$$

Число решений такого уравнения равно $\lambda(d) - [d/2]$. Значит,

$$\frac{1}{2} \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s(c/d)(s(c/d) - 1) = 2M^*(R) - \sum_{d \leqslant R} \left(\lambda(d) - \left[\frac{d}{2} \right] \right) =$$
$$= 2M^*(R) - N^*(R) + \left[\frac{R}{2} \right] \cdot \left[\frac{R+1}{2} \right].$$

Отсюда

$$\mathcal{L}_2(R) = 4M^*(R) + \mathcal{L}_1(R) - 2N^*(R) + 2 \left[\frac{R}{2} \right] \cdot \left[\frac{R+1}{2} \right].$$

Подставляя в последнюю формулу значение $\mathcal{L}_1(R)$ из (2.14), получаем нужную формулу для суммы $\mathcal{L}_2(R)$. $\square$

2.2. Предварительные вычисления

Определим четыре суммы

$$\sigma_1(\alpha, R) = \sum_{n \leqslant R} \sum_{m=1}^{n} \frac{[\alpha m + n \leqslant R]}{(\alpha m + n)^2}, \tag{2.19}$$

$$\sigma_2(\alpha, R) = \sum_{n \leqslant R} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(\alpha m + n)^2}, \tag{2.20}$$

$$\sigma_3(\alpha, R) = \sum_{n \leqslant R} \sum_{m=1}^{n} [\alpha m + n \leqslant R], \tag{2.21}$$

$$\sigma_4(\alpha, R) = \sum_{n \leqslant R} \sum_{m=1}^{n} \frac{[\alpha m + n \leqslant R]}{\alpha m + n}. \tag{2.22}$$

Как и раньше, через $\eta(x)$ будем обозначать функцию

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(nx)}{n^2},$$

где $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$.

Лемма 2.3. *Пусть $R \geqslant 1$. Тогда*

$$\sigma_1(\alpha, R) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\log R + c_1(\alpha) + \frac{\alpha}{R}\left(\rho(R) + \frac{1}{2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$
$$\sigma_2(\alpha, R) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\log R + c_2(\alpha) + \frac{1}{2R}\left(\rho(R) + \frac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha+1}\right)\right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

где

$$c_1(\alpha) = \frac{\log(\alpha+1)}{\alpha} - \frac{\zeta(2)}{2} \cdot \frac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha+1} + \gamma - 1 + 2\alpha(\alpha+1)\int_0^1 \frac{\eta(\xi)}{(\alpha\xi+1)^3}\,d\xi, \tag{2.23}$$

$$c_2(\alpha) = c_1(\alpha) - \frac{\log(\alpha+1)}{\alpha} + 1.$$

Кроме того, для рационального $\alpha \in (0,1]$ со знаменателем $q(\alpha)$

$$\sigma_3(\alpha, R) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)} - \frac{\alpha R}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R}{q(\alpha)} + 1\right)s_1(\alpha)\right),$$
$$\sigma_4(\alpha, R) = \frac{R}{\alpha+1} - \frac{\alpha \log R}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{\log(R+1)}{q(\alpha)} + 1\right)s_1(\alpha)\right).$$

Доказательство. Для вычисления $\sigma_1(\alpha, R)$ воспользуемся леммой 5.5:

$$\sigma_1(\alpha, R) = \sum_{n\leqslant \frac{R}{\alpha+1}} \sum_{m\leqslant n} \frac{1}{(\alpha m+n)^2} + \sum_{\frac{R}{\alpha+1}<n\leqslant R} \sum_{m\leqslant \frac{R-n}{\alpha}} \frac{1}{(\alpha m+n)^2} =$$

$$= \sum_{n\leqslant \frac{R}{\alpha+1}} \left(\int_0^n \frac{dx}{(\alpha x+n)^2} + \frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{(\alpha+1)^2}-1\right) + 2\alpha\int_0^n \frac{\rho(x)\,dx}{(\alpha x+n)^3}\right) +$$

$$+ \sum_{\frac{R}{\alpha+1}<n\leqslant R} \left(\int_0^{(R-n)/\alpha} \frac{dx}{(\alpha x+n)^2} + \frac{\rho(R)}{R} - \frac{1}{2n^2}\right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\left(\log R + c_1(\alpha) + \frac{\alpha}{R}\left(\rho(R)+\frac{1}{2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Аналогично

$$\sigma_2(\alpha, R) = \sum_{n\leqslant R} \left(\int_0^n \frac{dx}{(\alpha x+n)^2} + \frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{(\alpha+1)^2}-1\right) + 2\alpha\int_0^n \frac{\rho(x)\,dx}{(\alpha x+n)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\left(\log R + c_2(\alpha) + \frac{1}{2R}\left(\rho(R)+\frac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha+1}\right)\right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Очевидно, что $\sigma_3(\alpha, R)$ можно переписать в виде

$$\sigma_3(\alpha, R) = \sum_{n\leqslant \frac{R}{\alpha+1}} n + \sum_{\frac{R}{\alpha+1}<n\leqslant R} \left[\frac{R-n}{\alpha}\right].$$

Применяя ко второй сумме лемму 5.3, находим

$$\sigma_3(\alpha, R) = \sum_{n\leqslant R} f(n) - \frac{\alpha R}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R}{q(\alpha)}+1\right)s_1(\alpha)\right),$$

где $f(n) = \min\left\{n, \frac{R-n}{\alpha}\right\}$. Применяя к сумме значений функции $f(n)$ на каждом из отрезков линейности лемму 5.5, получаем требуемую формулу для $\sigma_3(\alpha, R)$.

Чтобы доказать асимптотическую формулу для суммы $\sigma_4(\alpha, R)$ предположим, что $1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_P < R$ — значения, которые принимает форма $\alpha m + n$, когда $1 \leqslant m \leqslant n$, $\alpha m + n \leqslant R$. Тогда

$$\sigma_4(\alpha, R) = \sum_{j=1}^{P} \frac{1}{\lambda_j}.$$

Применим к этой сумме преобразование Абеля в интегральной форме

$$\sum_{j=1}^{P} a_j \cdot g(\lambda_j) = A(\lambda_P)\cdot g(\lambda_P) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_P} A(t)g'(t)\,dt,$$

где

$$A(t) = \sum_{\lambda_j\leqslant t} a_j$$

(см. лемму 5.6 приложения). Для этого выберем $a_j = 1$ ($j = 1, \ldots, P$), $g(t) = 1/t$. Тогда $A(t) = \sigma_3(\alpha, t)$ и

$$\sigma_4(\alpha, R) = \frac{\sigma_3(\alpha, \lambda_P)}{\lambda_P} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_P} \frac{\sigma_3(\alpha, t)}{t^2}\, dt.$$

Далее, так как $\lambda_1 > 1$, $\lambda_P - R \ll 1$, $\sigma_3(\alpha, R) \ll R^2$ и $\sigma_3(\alpha, \lambda_P) = \sigma_3(\alpha, R)$, то

$$\sigma_4(\alpha, R) = \frac{\sigma_3(\alpha, R)}{R} + \int_1^R \frac{\sigma_3(\alpha, t)}{t^2}\, dt + O(1) =$$
$$= \frac{R}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \log R + O\left(\left(\frac{\log(R+1)}{q(\alpha)} + 1 \right) s_1(\alpha) \right).$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.4. *Для функции $c_1(\alpha)$, заданной равенством* (2.23) *справедливо соотношение*

$$\int_0^1 \frac{c_1(\alpha)}{\alpha+1}\, d\alpha = \log 2 \left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2} \right). \tag{2.24}$$

Доказательство. Если $F(x) = \int f(x)\, dx$, то

$$\int_0^1 \rho(nx) f(x)\, dx = n \int_0^1 F(x)\, dx - {\sum_{k=0}^{n}}' F\left(\frac{k}{n}\right)$$

(здесь штрих в сумме означает, что при $k = 0$ и при $k = n$ слагаемые берутся с коэффициентом 1/2). Таким образом, вычисление интеграла с функцией $\eta(\xi)$ сводится к лемме 1.8. Остальные интегралы считаются непосредственно. □

Напомним, что для матрицы $S = \left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$ через $f_S(t)$ обозначается функция

$$f_S(t) = \frac{1}{(mt+n)((a+m)t + (b+n))}. \tag{2.25}$$

Для действительного $U \geqslant 1$ рассмотрим сумму

$$W_3(U) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 c_1\left(\frac{at+b}{mt+n} \right) \cdot f_S(t)\, dt. \tag{2.26}$$

Лемма 2.5. *При $U \geqslant 2$*

$$W_3(U) = \frac{2\log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2} \right) \log U + C_3'' + O\left(\frac{\log^3 U}{U^{1/2}} \right),$$

где C_3'' — абсолютная константа.

Доказательство. Запишем сумму $W_3(U)$ в виде

$$W_3(U) = \sum_{n \leqslant U} w_3(n),$$

где

$$w_3(n) = \sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \int_0^1 c_1\left(\frac{at+b}{mt+n}\right) \frac{dt}{(mt+n)((a+m)t+(b+n))} =$$

$$= \sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) c_1\left(\frac{b}{n}\right) \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n}+1\right)(mt+n)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(Напомним, что штрих в суммах вида

$$\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \cdot \ldots$$

означает, что при $n = 1$ из двух знаков в символе $\pm$ выбирается знак “минус”, а при $n > 1$ оба знака берутся независимо; под a в таких суммах будет подразумеваться дробь $\frac{bm\pm1}{n}$.)

К возникшей двойной сумме нельзя непосредственно применить лемму 5.14. Однако, в силу ограниченности $c_1(\alpha)$ и $c_1'(\alpha)$, каждая из сумм

$$\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n}+1\right)(mt+n)^2} \cdot C_0',$$

$$\sum_{b,m=1}^{n}{}' \delta_n(bm \pm 1) \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n}+1\right)(mt+n)^2} \left(C_0' + c_1\left(\frac{b}{n}\right)\right)$$

при достаточно большом C_0' удовлетворяет условиям леммы 5.14. Следовательно,

$$w_3(n) = 2\frac{\varphi(n)}{n^2} \sum_{b,m=1}^{n} c_1\left(\frac{b}{n}\right) \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n}+1\right)(mt+n)^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right) =$$

$$= 2\log 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \int_0^1 \frac{c_1(\alpha)}{\alpha+1}\, d\alpha + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right).$$

Далее, по формуле (2.24),

$$w_3(n) = 2\log^2 2\left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2}\right)\frac{\varphi(n)}{n^2} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}}\right).$$

Отсюда

$$W_3(U) = 2\log^2 2\left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2}\right)\sum_{n\leqslant U}\frac{\varphi(n)}{n^2} + C_3' + O\left(\frac{\log^3 U}{U^{1/2}}\right),$$

где

$$C_3' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(w_3(n) - 2\log^2 2\left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2}\right)\frac{\varphi(n)}{n^2}\right).$$

Подстановка в полученное равенство соотношения (5.4) завершает доказательство леммы. □

Лемма 2.6. *Пусть $R, U \geqslant 2$. Тогда для суммы*

$$W_4(R,U) =$$
$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leqslant R} \sum_{k \leqslant l} \left(\frac{R}{bk+nl} - \max\left\{1, \frac{R}{(a+b)k+(m+n)l}\right\}\right) [bk+nl \leqslant R]$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_4(R,U) = \frac{\log 2}{2\zeta(2)} R^2 \log U + C_5 \cdot R^2 + O(R^2 U^{-1/2} \log^3 U) + O(RU \log^2 U),$$

где C_5 — абсолютная константа.

Доказательство. Перепишем сумму $W_4(R,U)$ в виде

$$W_4(R,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \left(\sigma_5\left(\frac{b}{n}, \frac{R}{n}\right) - \sigma_5\left(\frac{a+b}{m+n}, \frac{R}{m+n}\right)\right),$$

где, в обозначениях (2.21), (2.22)

$$\sigma_5(\alpha, R) = R \cdot \sigma_4(\alpha, R) - \sigma_3(\alpha, R) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right) s_1(\alpha)\right).$$

Значит, по лемме 5.4 (с учётом обозначения (1.29)),

$$W_4(R,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \left(\frac{R^2}{2n(b+n)} - \frac{R^2}{2(m+n)(a+b+m+n)}\right) +$$
$$+ \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{n^{5/2}} + \frac{R}{n}\right) s_1\left(\frac{b}{n}\right)\right) =$$
$$= \frac{R^2}{2}(A(U,0) - A(U,1)) + O(R^{3/2}) + O(RU \log^2 U).$$

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы для $A(U,1)$ из леммы 1.7 и $A(U,0) = \widetilde{E}(R)$ из теоремы 1, и замечая, что

$$R^{3/2} \ll RU + R^2 U^{-1/2},$$

приходим к требуемой формуле для $W_4(R,U)$. □

Лемма 2.7. *Пусть $R, U \geqslant 2$. Тогда для сумм*

$$W_5(R,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant R} \sum_{Q \leqslant Q'} \frac{1}{mQ + nQ'}, \qquad (2.27)$$

$$W_6(R,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant R} \sum_{Q \leqslant Q'} \frac{1}{(a+m)Q + (b+n)Q'}, \qquad (2.28)$$

справедливы асимптотические формулы

$$W_5(R,U) = RU + O(U\log R) + O(RU^{1/2}\log^3 U),$$
$$W_6(R,U) = \log 2\cdot RU + O(U\log R) + O(RU^{1/2}\log^3 U).$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы для суммы $W_6(R,U)$. Асимптотическая формула для $W_5(R,U)$ проверяется аналогично.

Пользуясь равенством

$$\sum_{Q'\leqslant R}\sum_{Q\leqslant Q'}\frac{1}{(a+m)Q+(b+n)Q'} = R\int_0^1\frac{dt}{(mt+n)(1+\frac{b}{n})} + O\left(\frac{\log R}{n}\right),$$

находим

$$W_6(R,U) = R\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\int_0^1\frac{dt}{(mt+n)(1+\frac{b}{n})} + O(U\log R).$$

Числа

$$a(b,m) = \int_0^1\frac{dt}{(mt+n)(1+\frac{b}{n})}$$

удовлетворяют условиям (5.24). Значит, по лемме 5.14,

$$W_6(R,U) = 2\log 2\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t}\,dt\cdot R\sum_{n\leqslant U}\left(\frac{\varphi(n)}{n} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{1/2}}\right)\right) + O(U\log R).$$

Применяя равенства

$$\int_0^1\frac{\log(1+t)}{t}\,dt = -\operatorname{Li}_2(-1) = \frac{\zeta(2)}{2},\qquad \sum_{n\leqslant U}\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{U}{\zeta(2)} + O(\log U),$$

с помощью оценки (1.28) приходим к нужной формуле для суммы $W_6(R,U)$. □

Лемма 2.8. *Пусть* $2\leqslant U, R_1\leqslant R$, *сумма* $\sigma_3(\alpha,R)$ *определена равенством* (2.21), *и*

$$W_7(R_1,U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m\\ b & n\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}(U)}\int_0^1\sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n},\frac{R_1}{mt+n}\right)dt. \qquad (2.29)$$

Тогда

$$W_7(R_1,U) = \frac{R_1^2}{2}W_1(U) - \frac{R_1U}{2}(1-\log 2) + O(R_1U^{1/2}\log^3 R) + O(U^2\log^2 R), \qquad (2.30)$$

где $W_1(U)$ *задано формулой* (1.25).

Доказательство. Пусть $p \geqslant 2$ — простое число. По определению, $\sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right)$ — невозрастающая функция от переменной t и

$$\sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) \ll \frac{R_1^2}{n^2}.$$

Следовательно,

$$W_7(R_1,U) = \frac{1}{p} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{x=1}^{p-1} \sigma_3\left(\frac{a\frac{x}{p}+b}{m\frac{x}{p}+n}, \frac{R_1}{m\frac{x}{p}+n}\right) + O\left(\frac{R_1^2 \log R}{p}\right).$$

Далее, применяя лемму 2.3 и оценки

$$q\left(\frac{ax+bp}{mx+np}\right) = mx+np \geqslant np,$$

$$s_1\left(\frac{ax+bp}{mx+np}\right) \ll s_1\left(\frac{m}{n}\right) + s_1\left(\frac{x}{p}\right),$$

(см. замечание 2.1) получаем следующее представление для $W_7(R_1,U)$:

$$W_7(R_1,U) =$$

$$= \frac{1}{2p} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{x=1}^{p-1} \left(R_1^2 \cdot f_S\left(\frac{x}{p}\right) - \left(\frac{R_1}{m\frac{x}{p}+n} - \frac{R_1}{(a+m)\frac{x}{p}+b+n}\right)\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{p} \sum_{n \leqslant U} \sideset{}{^*}\sum_{m \leqslant n} \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{R_1}{n^2 p} + 1\right)\left(s_1\left(\frac{m}{n}\right) + s_1\left(\frac{x}{p}\right)\right)\right) + O\left(\frac{R_1^2 \log R}{p}\right).$$

По лемме 5.4

$$\frac{1}{p} \sum_{n \leqslant U} \sideset{}{^*}\sum_{m \leqslant n} \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{R_1}{n^2 p} + 1\right)\left(s_1\left(\frac{m}{n}\right) + s_1\left(\frac{x}{p}\right)\right) \ll \left(\frac{R_1}{p} \log R + U^2\right) \log^2 R.$$

Таким образом, выбирая p в пределах $R_1^2 \leqslant p \leqslant 2R_1^2$, приходим к равенству

$$W_7(R_1,U) = \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \left(R_1^2 \cdot f_S(t) - \left(\frac{R_1}{mt+n} - \frac{R_1}{(a+m)t+b+n}\right)\right) dt +$$

$$+ O(U^2 \log^2 R).$$

Как и при доказательстве леммы 2.7 проверяются асимптотические формулы

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{dt}{mt+n} = U + O(U^{1/2} \log^3 U),$$

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{dt}{(a+m)t+b+n} = \log 2 \cdot U + O(U^{1/2} \log^3 U).$$

Следовательно,

$$W_7(R_1, U) = \frac{R_1^2}{2} W_1(U) - \frac{R_1 U}{2}(1 - \log 2) + O(R_1 U^{1/2} \log^3 R) + O(U^2 \log^2 R).$$

Лемма доказана. □

2.3. Асимптотическая формула для математического ожидания

Рассмотрим сумму

$$F(\xi) = \sum_{n<\xi} \sum_{m \leqslant n} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right) - \sum_{n<\xi} \sum_{\substack{m \leqslant n \\ m+n>\xi}} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n}\right). \qquad (2.31)$$

Лемма 2.9. *При* $\xi \geqslant 2$

$$F(\xi) = \log 2\left(\log \xi + \frac{\log 2}{2} + \gamma - 1\right) + \frac{1}{2\xi}(1 - \log 2) + \\ + \frac{2 \log 2}{\xi} \cdot \rho(\xi/2) + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2}\right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$F(\xi) = F_1(\xi) - F_2(\xi) + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2}\right), \qquad (2.32)$$

где

$$F_1(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi - 1} \sum_{m \leqslant nx} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right) = \Phi(\xi - 1),$$

$$F_2(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi - 1} \sum_{\substack{m \leqslant n \\ m+n>\xi}} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n}\right),$$

а сумма $\Phi(R)$ определена равенством (1.7). По лемме 1.3

$$F_1(\xi) = \log 2(\log \xi + \log 2 + \gamma) - \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{1}{\xi}\left(\log 2(\rho(\xi) - 1) + \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right).$$

Далее, по лемме 5.5, при $n > \xi/2$

$$\sum_{\xi - n < m \leqslant n} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n}\right) = g(n) + \frac{1}{n}\left(\log 2 + \frac{1}{2\xi}\right) - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{\xi^2(\xi - n)}\right),$$

где

$$g(n) = \frac{1}{\xi}(\log n - \log(\xi - n)) + \frac{1}{n}(\log(\xi - n) - \log \xi).$$

Значит,

$$F_2(\xi) = \sum_{\xi/2 < n \leqslant \xi - 1} g(n) + \left(\log 2 + \frac{1}{2\xi}\right) \sum_{\xi/2 < n \leqslant \xi - 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{4\xi} + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2}\right).$$

Вновь применяя лемму 5.5, находим
$$\sum_{\xi/2<n\leqslant\xi-1}\frac{1}{n}=\log 2+\frac{1}{\xi}(\rho(\xi)-1-2\rho(\xi/2))+O\left(\frac{1}{\xi^2}\right),$$
$$\sum_{\xi/2<n\leqslant\xi-1}g(n)=\int_{\xi/2}^{\xi}g(n)\,dn+O\left(\frac{\log\xi}{\xi^2}\right).$$
После замены переменной $n=x\xi$ с учетом равенств
$$\mathrm{Li}_2(1)=\zeta(2),\qquad \mathrm{Li}_2(1/2)=\frac{\zeta(2)}{2}-\frac{\log^2 2}{2}$$
(см. [**59**]), получаем
$$\int_{\xi/2}^{\xi}g(n)\,dn=\int_{1/2}^{1}\left(\log x-\log(1-x)+\frac{\log(1-x)}{x}\right)dx=$$
$$=\left(x\log x+(1-x)\log(1-x)-\mathrm{Li}_2(x)\right)\Big|_{x=1/2}^{1}=\log 2-\frac{1}{2}\left(\zeta(2)+\log^2 2\right).$$
Следовательно,
$$F_2(\xi)=\log 2+\frac{1}{2}\left(\log^2 2-\zeta(2)\right)+\frac{\log 2}{\xi}\left(\rho(\xi)-2\rho(\xi/2)-1/2\right)-\frac{1}{4\xi}+O\left(\frac{\log\xi}{\xi^2}\right).$$

Подставляя найденные асимптотические формулы для $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ в равенство (2.32), приходим к утверждению леммы. □

Обозначим через $N(R)$ число решений неравенства
$$kQ+lQ'\leqslant R \tag{2.33}$$
относительно неизвестных
$$1\leqslant k\leqslant l,\quad 1\leqslant Q\leqslant Q'. \tag{2.34}$$

Лемма 2.10. *Пусть $R\geqslant 2$. Тогда*
$$N(R)=\frac{\log 2}{2}R^2\log R+\frac{R^2}{4}\left(\log 2(3\log 2+4\gamma-3)-\zeta(2)\right)+O(R\log^3 R).$$

Доказательство. Пусть U — полуцелое число, лежащее в пределах $1\leqslant U\leqslant R$. Через $N_1(R,U)$ обозначим число решений неравенства (2.33) с ограничениями (2.34), удовлетворяющих дополнительному условию $Q'\leqslant U$. Число решений, для которых $Q'>U$ обозначим через $N_2(R,U)$. Таким образом,
$$N(R)=N_1(R,U)+N_2(R,U). \tag{2.35}$$

Для нахождения $N_1(R,U)$ заметим, что
$$N_1(R,U)=\sum_{d\leqslant U}N_1^*(R/d,U/d), \tag{2.36}$$
где
$$N_1^*(R,U)=\sum_{Q'\leqslant U}\sideset{}{^*}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{l\leqslant R/Q'}\sum_{k\leqslant l}[kQ+lQ'\leqslant R].$$

По лемме 5.3

$$\sum_{l\leqslant R/Q'}\sum_{k\leqslant l}[kQ+lQ'\leqslant R]=\sum_{l\leqslant R/(Q+Q')} l+\sum_{R/(Q+Q')\leqslant l\leqslant R/Q'}\left[\frac{R-lQ'}{Q}\right]=$$
$$=\sum_{l\leqslant R/Q'}\min\left\{l,\frac{R-lQ'}{Q}\right\}-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{Q'}-\frac{R}{Q+Q'}\right)+ \tag{2.37}$$
$$+O\left(\left(\frac{R}{(Q')^2}+1\right)s_1(Q/Q')\right).$$

Для вычисления возникшей суммы разобьем интервал изменения переменной l на два так, что на каждом из них суммируемая функция линейна. Применяя к каждой из полученных сумм лемму 5.5, находим

$$\sum_{l\leqslant R/Q'}\min\left\{l,\frac{R-lQ'}{Q}\right\}=\int_0^{R/Q'}\min\left\{l,\frac{R-lQ'}{Q}\right\}dl+O\left(\frac{Q'}{Q}\right)=$$
$$=\frac{R}{2Q'(Q+Q')}+O\left(\frac{Q'}{Q}\right).$$

Сумма остаточных членов формулы (2.37) оценивается с помощью леммы 5.4:

$$\sum_{Q'\leqslant U}\sum_{Q\leqslant Q'}\left(\frac{R}{(Q')^2}+1\right)s_1(Q/Q')\ll R\log^3 R+U^2\log^2 R.$$

Следовательно,

$$N_1^*(R,U)=\frac{R^2}{2}\sum_{Q'\leqslant U}\sum_{Q\leqslant Q'}^{*}\frac{1}{Q'(Q+Q')}-\frac{RU}{2\zeta(2)}(1-\log 2)+$$
$$+O(R\log^3 R)+O(U^2\log^2 R).$$

По формуле (2.36)

$$N_1(R,U)=\frac{R^2}{2}\,\Phi(U)-\frac{RU}{2}(1-\log 2)+O(R\log^3 R)+O(U^2\log^2 R),$$

где функция $\Phi(R)$ задается равенством (1.7). Применяя лемму 1.3, находим окончательную формулу для $N_1(R,U)$:

$$N_1(R,U)=\frac{R^2}{2}\left(\log 2(\log U+\log 2+\gamma)-\frac{\zeta(2)}{2}\right)+\frac{R^2}{8U}-\frac{RU}{2}(1-\log 2)+ \tag{2.38}$$
$$+O(R\log^3 R)+O(U^2\log^2 R)+O(R^2U^{-2}).$$

Пусть $R_1=RU^{-1}$. Для величины $N_2(R,U)$ аналогично имеем

$$N_2(R,U)=\sum_{d\leqslant R_1}N_2^*(R/d,U), \tag{2.39}$$

где

$$N_2^*(R,U) = \sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}{}^{*}\sum_{U<Q'\leqslant R/l}\sum_{Q\leqslant Q'}[kQ+lQ'\leqslant R] =$$

$$= \sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}{}^{*}\left(\sum_{U<Q'\leqslant R/(k+l)} Q' + \sum_{\max\{U,R/(k+l)\}<Q'\leqslant R/l}\left[\frac{R-lQ'}{k}\right]\right).$$

Применяя последовательно леммы 5.3 и 5.4, находим

$$N_2^*(R,U) = \sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}{}^{*}\sum_{U<Q'\leqslant R/l}\min\left\{Q', \frac{R-lQ'}{k}\right\} - \frac{1}{2}\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{\substack{k\leqslant l\\ k+l\leqslant R_1}}{}^{*}\left(\frac{R}{l}-\frac{R}{k+l}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{\substack{k\leqslant l\\ k+l>R_1}}{}^{*}\left(\frac{R}{l}-U\right) + O(R\log^3 R) + O(R_1^2\log^2 R).$$

Отсюда, по формуле (2.39),

$$N_2(R,U) = \sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{U<Q'\leqslant R/l}\min\left\{Q', \frac{R-lQ'}{k}\right\} - \frac{1}{2}\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{\substack{k\leqslant l\\ k+l\leqslant R_1}}\left(\frac{R}{l}-\frac{R}{k+l}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l\leqslant R_1}\sum_{\substack{k\leqslant l\\ k+l>R_1}}\left(\frac{R}{l}-U\right) + O(R\log^3 R) + O(R^2U^{-2}\log^2 R) =$$

$$= \sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{U<Q'\leqslant R/l}\min\left\{Q', \frac{R-lQ'}{k}\right\} - \frac{R^2}{8U} + O(R\log^3 R) + O(R^2U^{-2}\log^2 R).$$

Далее, применяя на каждом из отрезков линейности функции $\min\left\{Q', \frac{R-lQ'}{k}\right\}$ лемму 5.5, получаем

$$N_2(R,U) = \sum_{l\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\int_U^R dQ'\int_0^{Q'}[kQ+lQ'\leqslant R]\,dQ - \frac{R^2}{8U} +$$

$$+ O(R\log^3 R) + O(R^2U^{-2}\log^2 R).$$

Для подсчета двойного интеграла сделаем последовательно замены переменных $w = kQ+lQ'$, $\xi = wU^{-1}$, $y = Q'U^{-1}$. Тогда получим

$$\int_U^R dQ'\int_0^{Q'}[kQ+lQ'\leqslant R]\,dQ = \frac{1}{k}\int_U^R dQ'\int_0^R\left[\frac{w}{k+l}\leqslant Q'\leqslant\frac{w}{l}\right]dw =$$

$$= \frac{U^2}{k}\int_1^{R_1}dy\int_0^{R_1}\left[\frac{\xi}{k+l}\leqslant y\leqslant\frac{\xi}{l}\right]d\xi =$$

$$= \frac{U^2}{k}\int_0^{R_1}\xi\left(\frac{1}{l}-\max\left\{\frac{1}{k+l},1\right\}\right)[\xi\geqslant l]d\xi =$$

$$= \frac{U^2}{k}\int_0^{R_1}\xi\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{k+l}\right)[\xi\geqslant k+l]\,d\xi + \frac{U^2}{k}\int_0^{R_1}\xi\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\xi}\right)[l\leqslant\xi<k+l]\,d\xi.$$

Отсюда

$$N_2(R, U) = U^2 \int_0^{R_1} \xi \cdot F(\xi)\, d\xi - \frac{R^2}{8U} + O(R \log^3 R) + O(R^2 U^{-2} \log^2 R),$$

где функция $F(\xi)$ определена равенством (2.31). По лемме 2.9

$$N_2(R, U) = \frac{\log 2}{2} R^2 \left(\log \frac{R}{U} + \frac{\log 2}{2} + \gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{RU}{2}(1 - \log 2) - \tag{2.40}$$
$$- \frac{R^2}{8U} + O(R \log^3 R) + O(R^2 U^{-2} \log^2 R) + O(U^2 \log^2 R).$$

Подставляя формулы (2.38), (2.40) в равенство (2.35) и выбирая $U = [R^{1/2}] + 1/2$, приходим к утверждению леммы. □

Доказательство теоремы 3. Подставляя результат леммы 2.10 в формулу обращения

$$N^*(R) = \sum_{d \leqslant R} \mu(d) N\left(\frac{R}{d}\right),$$

находим

$$N^*(R) = \frac{\log 2}{2\zeta(2)} R^2 \log R + \frac{R^2}{4\zeta(2)} \left(\log 2 \left(3 \log 2 + 4\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 3 \right) - \zeta(2) \right) +$$
$$+ O(R \log^4 R).$$

Отсюда, применяя первое утверждение леммы 2.2, приходим к равенству

$$\mathcal{L}_1(R) = \frac{\log 2}{\zeta(2)} R^2 \log R + \frac{R^2}{2\zeta(2)} \left(\log 2 \left(3 \log 2 + 4\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 3 \right) - \frac{3}{2}\zeta(2) \right) +$$
$$+ O(R \log^4 R).$$

Подставляя его в (2.8), получаем утверждение теоремы. □

2.4. Вычисление двух вспомогательных сумм

Для подсчета дисперсии $D(R)$ понадобится знать асимптотические формулы для двух вспомогательных величин. Они исследуются тем же способом, что и $N(R)$.

Пусть α, $\beta \in [0; 1]$ — действительные числа. Обозначим через $T(R) = T(\alpha, \beta; R)$ сумму

$$T(R) = \sum_{l, Q' \leqslant R} \sum_{k \leqslant l} \sum_{Q \leqslant Q'} [(\alpha k + l)(\beta Q + Q') \leqslant R], \tag{2.41}$$

которая, очевидно, совпадает с числом решений неравенства

$$(\alpha m + n)(\beta k + l) \leqslant R \tag{2.42}$$

относительно неизвестных k, l, m и n, связанных условиями

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{2.43}$$

Лемма 2.11. *Пусть $\alpha, \beta \in (0,1]$ — рациональные числа со знаменателями $q(\alpha)$ и $q(\beta)$ соответственно. Тогда при любом $R \geqslant 1$*

$$T(R) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)} \left(\log R + c_1(\alpha) + c_1(\beta) - \frac{1}{2}\right) + \\ + O\left(R^{3/2}\left(\frac{s_1(\alpha)}{q(\alpha)} + \frac{s_1(\beta)}{q(\beta)}\right) + R(s_1(\alpha) + s_1(\beta))\right),$$

где $c_1(\alpha)$ и $c_1(\beta)$ определены равенством (2.23).

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha \leqslant \beta$. Положим $U = [\sqrt{R}] + 1/2$. Обозначим через $T_1(R,U)$ число тех решений неравенства (2.42) с ограничениями (2.43), для которых $l \leqslant U$. Число решений, для которых $l > U$, обозначим соответственно через $T_2(R,U)$. Таким образом

$$T(R) = T_1(R,U) + T_2(R,U). \tag{2.44}$$

Для нахождения $T_1(R,U)$ заметим, что по лемме 5.3 при фиксированных k и l число решений неравенства (2.42) относительно m и n равно

$$\frac{1}{2(\alpha+1)}\left(\frac{R}{\beta k + l}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\beta k + l}\left(1 - \frac{1}{\alpha+1}\right) + O\left(\left(\frac{R}{q(\alpha) l} + 1\right) s_1(\alpha)\right).$$

Поэтому

$$T_1(R,U) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)}\cdot\sigma_2(\beta,U) - \frac{R\alpha}{2(\alpha+1)}\sum_{l\leqslant U}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\beta k + l} + \\ + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right) s_1(\alpha)\right),$$

где $\sigma_2(\alpha, R)$ определено равенством (2.20). Применяя лемму 2.3 и равенство

$$\sum_{l\leqslant U}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\beta k + l} = \frac{\log(\beta+1)}{\beta}\cdot U + O(\log U),$$

следующее из леммы 5.5, приходим к асимптотической формуле для величины $T_1(R,U)$:

$$T_1(R,U) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)}\left(\log U + c_1(\beta) - \frac{\log(\beta+1)}{\beta} + 1 + \frac{1}{U}\cdot\frac{\beta^2+\beta}{2(\beta+1)}\right) - \\ - \frac{R\alpha}{2(\alpha+1)}\cdot\frac{\log(\beta+1)}{\beta} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right) s_1(\alpha)\right).$$

Положим $R_1 = RU^{-1}$. Для нахождения величины $T_2(R,U)$ также применим лемму 5.3:

$$T_2(R,U) = \sum_{n\leqslant R_1}\sum_{m\leqslant n}\sum_{U<l\leqslant\frac{R}{\alpha m+n}} \min\left\{l, \left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{R}{\alpha m+n} - l\right)\right]\right\} =$$
$$= \sum_{n\leqslant R_1}\sum_{m\leqslant n}\sum_{U<l\leqslant\frac{R}{\alpha m+n}} \min\left\{l, \frac{1}{\beta}\left(\frac{R}{\alpha m+n} - l\right)\right\} -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant R_1}\sum_{m\leqslant n}\left(\left(\frac{R}{\alpha m+n} - \max\left\{U, \frac{R}{(\alpha m+n)(\beta+1)}\right\}\right) +\right.$$
$$\left.+O\left(\left(\frac{R}{q(\beta)n}+1\right)s_1(\beta)\right)\right).$$

Согласно лемме 5.5, с учетом того, что U — полуцелое число и $1/\beta \ll s_1(\beta)$,

$$\sum_{U<l\leqslant\frac{R}{\alpha m+n}} \min\left\{l, \frac{1}{\beta}\left(\frac{R}{\alpha m+n} - l\right)\right\} =$$
$$= \int_U^R dl \int_0^l dk\,[(\alpha m+n)(\beta k+l) \leqslant R] + O\left(s_1(\beta)\right).$$

Значит, $T_2(R,U)$ можно записать в виде

$$T_2(R,U) = \sum_{n\leqslant R_1}\sum_{m\leqslant n}\int_U^R dl\int_0^l [(\alpha m+n)(\beta k+l)\,dk \leqslant R] -$$
$$-\frac{U}{2}\left(\sigma_5(\alpha,R_1) - \sigma_5\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta+1}\right)\right) + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\beta)} + R\right)s_1(\beta)\right), \tag{2.45}$$

где, в обозначениях (2.21), (2.22)

$$\sigma_5(\alpha,R) = R\cdot\sigma_4(\alpha,R) - \sigma_3(\alpha,R) =$$
$$= \frac{R^2}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right)s_1(\alpha)\right).$$

Отсюда

$$\frac{U}{2}\left(\sigma_5(\alpha,R_1) - \sigma_5\left(\alpha,\frac{R_1}{\beta+1}\right)\right) = \frac{\beta^2+2\beta}{4(\alpha+1)(\beta+1)^2}\cdot\frac{R^2}{U} + \tag{2.46}$$
$$+O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right)s_1(\alpha)\right).$$

Для вычисления двойного интеграла в формуле для $T_2(R,U)$ сделаем замены переменных $k = t\cdot l$, $l = U\cdot\xi$. Тогда, в обозначениях (2.19), (2.21),

$$\sum_{n\leqslant R_1}\sum_{m\leqslant n}\int_U^R dl\int_0^l [(\alpha m+n)(\beta k+l)\,dk\leqslant R] =$$
$$= U^2\int_0^1 dt\sum_{n\leqslant R_1}\sum_{m\leqslant n}\int_1^{R_1}\xi\cdot[\xi(\alpha m+n)(\beta t+1)\leqslant R_1]\,d\xi =$$
$$= \frac{U^2}{2}\int_0^1\sum_{n\leqslant R_1}\sum_{m\leqslant n}\left(\frac{R_1^2}{(\beta t+1)^2(\alpha m+n)^2}-1\right)[(\alpha m+n)(\beta t+1)\leqslant R_1]\,dt =$$
$$= \frac{R^2}{2}\int_0^1\frac{1}{(\beta t+1)^2}\cdot\sigma_1\left(\alpha,\frac{R_1}{\beta t+1}\right)dt - \frac{U^2}{2}\int_0^1\sigma_3\left(\alpha,\frac{R_1}{\beta t+1}\right)dt.$$

Используя асимптотическую формулу для суммы $\sigma_1(\alpha,R)$ из леммы 2.3, находим

$$\int_0^1\frac{1}{(\beta t+1)^2}\cdot\sigma_1\left(\alpha,\frac{R_1}{\beta t+1}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\left(\log R_1 + c_1(\alpha) + \frac{\log(\beta+1)}{\beta} - 1\right) +$$
$$+\frac{\alpha}{(\alpha+1)R_1}\left(\frac{\log(\beta+1)}{2\beta} + \int_0^1\frac{1}{\beta t+1}\cdot\rho\left(\frac{R_1}{\beta t+1}\right)dt\right) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Также, по лемме 2.3,

$$\int_0^1\sigma_3\left(\alpha,\frac{R_1}{\beta t+1}\right)dt = \frac{R_1^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)} - \frac{\alpha R_1}{2(\alpha+1)}\cdot\frac{\log(\beta+1)}{\beta} +$$
$$+ O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right)s_1(\alpha)\right).$$

По предположению $\alpha\leqslant\beta$. Следовательно,

$$\alpha\int_0^1\rho\left(\frac{R_1}{\beta t+1}\right)\frac{dt}{\beta t+1} \ll \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{R_1} \ll \frac{1}{R_1},$$

и

$$\sum_{n\leqslant R_1}\sum_{m\leqslant n}\int_U^R dl\int_0^l [(\alpha m+n)(\beta k+l)\leqslant R]\,dk =$$
$$= \frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)}\left(\log R_1 + c_1(\alpha) + \frac{\log(\beta+1)}{\beta} - \frac{3}{2}\right) +$$
$$+\frac{\alpha}{(\alpha+1)RU}\cdot\frac{\log(\beta+1)}{2\beta} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right)s_1(\alpha)\right). \tag{2.47}$$

Объединяя вместе равенства (2.45), (2.46) и (2.47), приходим к асимптотической формуле для $T_2(R,U)$:

$$T_2(R,U) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)}\left(\log\frac{R}{U} + c_1(\alpha) + \frac{\log(\beta+1)}{\beta} - \frac{3}{2}\right) + \\ + \frac{\alpha}{(\alpha+1)RU}\cdot\frac{\log(\beta+1)}{2\beta} - \frac{R^2U^{-1}(\beta^2+2\beta)}{4(\alpha+1)(\beta+1)^2} + \\ + O\left(R^{3/2}\left(\frac{s_1(\alpha)}{q(\alpha)} + \frac{s_1(\beta)}{q(\beta)}\right) + R(s_1(\alpha)+s_1(\beta))\right).$$

Подстановка найденных асимптотических формул для $T_1(R,U)$ и $T_2(R,U)$ в формулу (2.44) завершает доказательство леммы. □

Для действительных α, $\beta \in (0;1]$ обозначим через $L(R) = L(\alpha,\beta;R)$ сумму

$$L(R) = \sum_{l,n\leqslant R}\sum_{k\leqslant l}\sum_{m\leqslant n}\frac{[(\alpha m+n)(\beta k+l)\leqslant R]}{(\alpha m+n)^2(\beta k+l)^2}. \tag{2.48}$$

Следствие 2.1. *Пусть $\alpha,\beta \in (0,1]$ — рациональные числа со знаменателями $q(\alpha)$ и $q(\beta)$ соответственно. Тогда при любом $R \geqslant 1$ для суммы $L(R)$ справедлива асимптотическая формула*

$$L(R) = \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\left(\frac{\log^2 R}{2} + \log R(c_1(\alpha)+c_1(\beta)) + c(\alpha,\beta)\right) + \\ + O\left(R^{-1/2}\left(\frac{s_1(\alpha)}{q(\alpha)} + \frac{s_1(\beta)}{q(\beta)}\right) + R^{-1}(s_1(\alpha)+s_1(\beta))\right),$$

в которой $c_1(\alpha)$ — функция из леммы 2.3, и $c(\alpha,\beta)$ — величина не зависящая от R.

Доказательство. Утверждение следствия получается из леммы 2.11 с помощью интегрального преобразования Абеля (5.1) (см. лемму 5.6 приложения). Для доказательства достаточно положить $a_j = 1$ $(j = 1,\ldots,P)$, $g(t) = 1/t^2$, и рассмотреть последовательность $\lambda_1, \ldots, \lambda_P$ значений произведения $(\alpha m+n)(\beta k+l)$, когда переменные k, l, m, n удовлетворяют ограничениям

$$1 \leqslant m \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant l, \quad (\alpha m+n)(\beta k+l) \leqslant R.$$

□

Следствие 2.2. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда*

$$\int_0^1\int_0^1 T(\alpha,\beta;R)\,d\alpha\,d\beta = \frac{\log^2 2}{2}R^2\left(\log R + 2\gamma - \frac{5}{2} + \log 2\right) + O(R\log^2 R),$$

$$\int_0^1\int_0^1 L(\alpha,\beta;R)\,d\alpha\,d\beta = \frac{\log^2 2}{2}\cdot\log^2 R + 2\log^2 2\cdot\log R\left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2}\right) + \\ + C_L + O(R^{-1}\log^2 R),$$

где C_L — абсолютная константа.

Доказательство. Пусть $p \geqslant 2$ — натуральное число. Тогда

$$\int_0^1 \int_0^1 T(\alpha, \beta; R)\, d\alpha\, d\beta = \frac{1}{p^2} \sum_{a,b=1}^{p-1} T\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}; R\right) + O\left(\frac{R^2 \log R}{p}\right).$$

Для простого p по лемме 2.11

$$\int_0^1 \int_0^1 T(\alpha, \beta; R)\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= \frac{1}{p^2} \sum_{a,b=1}^{p-1} \frac{R^2}{2(1+\frac{a}{p})(1+\frac{b}{p})} \left(\log R + c_1\left(\frac{a}{p}\right) + c_1\left(\frac{b}{p}\right) - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{R^2 \log R}{p}\right) + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{p} + R\right) \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} s_1\left(\frac{a}{p}\right)\right).$$

Пользуясь непрерывностью функции $c_1(\alpha)$ и леммой 5.4 получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 T(\alpha, \beta; R)\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{R^2}{2(1+\alpha)(1+\beta)} \left(\log R + c_1(\alpha) + c_1(\beta) - \frac{1}{2}\right) d\alpha\, d\beta +$$

$$+ O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{p} + R\right) \log^2 p\right) + O\left(\frac{R^2 \log R}{p}\right).$$

Выбирая p в пределах $R \leqslant p \leqslant 2R$ и применяя равенство (2.24), приходим к первому утверждению следствия.

Второе утверждение доказывается аналогично с помощью следствия 2.1.

Интегрируемость функции $c(\alpha, \beta)$ вытекает из интегрируемости $c_1(\alpha)$, $c_1(\beta)$ и $L(\alpha, \beta; R)$. □

2.5. Асимптотическая формула для дисперсии

Обозначим через $M(R)$ число решений неравенства (2.12), в котором

$$1 \leqslant k \leqslant l, \quad 1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}. \tag{2.49}$$

Пусть U и U_0 — действительные числа в пределах от 1 до R. Все решения неравенства (2.12) с ограничениями (2.49) разобьем на три группы, для которых выполняются дополнительные условия

1) $n \leqslant U$, $Q' \leqslant U_0$;
2) $n \leqslant U$, $Q' > U_0$;
3) $n > U$.

Величину $M(R)$, соответственно, представим в виде

$$M(R) = M_1(R, U, U_0) + M_2(R, U, U_0) + M_3(R, U).$$

Каждое из слагаемых в этой сумме исследуем отдельно.

2.5.1. Вычисление $M_1(R, U, U_0)$.

Лемма 2.12. *Пусть $2 \leqslant U, U_0 \leqslant R$, U_0 — полуцелое. Тогда*

$$M_1(R,U,U_0) = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} R^2 \log U \log U_0 + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right) R^2 \log U_0 +$$
$$+ \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\log 2 + \gamma - \frac{\zeta(2)}{2\log 2}\right) R^2 \log U + \frac{C_1'}{2} R^2 + \frac{R^2}{4U_0}\left(\frac{\log 2}{\zeta(2)}\log U + \widetilde{E}_0 - C_2\right) -$$
$$- \frac{1-\log 2}{2} RUU_0 + O(R^2 U_0^{-2}\log R) + O(R^2 U^{-1/2}\log^4 R) + O(RU_0U^{1/2}\log^3 R) +$$
$$+ O(U^2 U_0^2 \log^2 R),$$

где C_1 определено рядом (1.27), $\widetilde{E}_0$ — константа из теоремы 1, C_2 — из леммы 1.7, а C_1' — из леммы 1.9.

Доказательство. Пусть переменные a, b, m, n, Q, Q' фиксированы, и

$$f(l) = \min\left\{l, \frac{R - l(mQ+nQ')}{aQ+bQ'}\right\}.$$

Тогда число решений $M(a,b,m,n,Q,Q',R)$ неравенства

$$k(aQ+bQ') + l(mQ+nQ') \leqslant R$$

с ограничениями (2.49) относительно переменных k и l (при фиксированных a, b, m, n, Q и Q') равно

$$\sum_{l \leqslant R/(mQ+nQ')} f(l) - \sum_{l \leqslant R/(mQ+nQ')} \{f(l)\}.$$

Применяя к первой из этих сумм лемму 5.3, а ко второй — лемму 5.5, получаем

$$\begin{aligned} M(a,b,m,n,Q,Q',R) &= \frac{R^2}{2(mQ+nQ')((a+m)Q+(b+n)Q')} - \\ &- \frac{R}{2}\left(\frac{1}{mQ+nQ'} - \frac{1}{(a+m)Q+(b+n)Q'}\right) + \\ &+ O\left(\left(\frac{R}{nQ'} q^{-1}\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right) + 1\right) s_1\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Пользуясь соотношениями (см. замечание 2.1)

$$s_1\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right) \ll s_1\left(\frac{m}{n}\right) + s_1\left(\frac{Q}{Q'}\right), \quad q\left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'}\right) = \frac{mQ+nQ'}{(Q,Q')}$$

и применяя лемму 5.4 получаем следующую оценку суммы остаточных членов

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant U_0} \sum_{Q \leqslant Q'} \left(\frac{R}{nQ'} \cdot q^{-1} \left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'} \right) + 1 \right) s_1 \left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'} \right) =$$

$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{\delta \leqslant U_0} \sum_{Q' \leqslant U_0/\delta} \sum_{Q \leqslant Q'}{}^{*} \left(\frac{R}{n\delta Q'(mQ+nQ')} + 1 \right) s_1 \left(\frac{aQ+bQ'}{mQ+nQ'} \right) \ll$$

$$\ll \sum_{n \leqslant U} \sum_{m \leqslant n}{}^{*} \sum_{\delta \leqslant U_0} \sum_{Q' \leqslant U_0/\delta} \sum_{Q \leqslant Q'}{}^{*} \left(\frac{R}{\delta n^2 (Q')^2} + 1 \right) \left(s_1 \left(\frac{m}{n} \right) + s_1 \left(\frac{Q}{Q'} \right) \right) \ll$$

$$\ll R \log^4 R + U^2 U_0^2 \log^2 R.$$

Таким образом, суммируя (2.50), находим

$$M_1(R,U,U_0) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leqslant U_0} \sum_{Q \leqslant Q'} M(a,b,m,n,Q,Q',R) =$$

$$= \frac{R^2}{2} \sigma_1(U_0,U) - \frac{R}{2} (W_5(U_0,U) - W_6(U_0,U)) +$$
$$+ O(R \log^3 R) + O(U^2 U_0^2 \log^3 R),$$

где суммы $\sigma_1(R,U)$, $W_5(R,U)$ и $W_6(R,U)$ определены равенствами (1.34), (2.27) и (2.28) соответственно. Применяя к роследнему равенству леммы 1.9, 2.7 и учитывая оценку

$$RU \ll R^2 U_0^{-2} + U^2 U_0^2,$$

получаем требуемую формулу для $M_1(R,U,U_0)$. □

2.5.2. Вычисление $M_2(R,U,U_0)$.

Лемма 2.13. *Пусть $2 \leqslant U, U_0 \leqslant R$, U_0 — полуцелое. Тогда*

$$M_2(R,U,U_0) = \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} R^2 \log U \log \frac{R}{U_0} + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) R^2 \log \frac{R}{U_0} -$$
$$- \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)} R^2 \log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{5}{2} + \frac{\zeta(2)}{2 \log 2} \right) R^2 \log U + C_2' R^2 -$$
$$- \frac{R^2}{4U_0} \left(\frac{\log 2}{\zeta(2)} \log U + \widetilde{E}_0 - C_2 \right) + \frac{1 - \log 2}{2} R U U_0 + O(R^2 U_0^{-2} \log^2 R) +$$
$$+ O(R^2 U^{-1/2} \log^4 R) + O(R U_0 U^{1/2} \log^3 R) + O(U^2 U_0^2 \log^2 R)$$

где C_1 определено рядом (1.27), $\widetilde{E}_0$ — константа из теоремы 1, C_2 — из леммы 1.7, и C_2' — абсолютная постоянная.

Доказательство. Введем обозначение $R_1 = R U_0^{-1}$. Как и при доказательстве леммы 2.12 предположим, что переменные a, b, m, n, k, l

фиксированны и удовлетворяют условиям (2.49). Рассмотрим функцию

$$f(l) = \min\left\{Q', \frac{R - Q'(bk+nl)}{ak+ml}\right\}.$$

Тогда число решений неравенства

$$k(aQ + bQ') + l(mQ + nQ') \leqslant R$$

относительно переменных Q и Q', таких что $Q' > U_0$, $1 \leqslant Q \leqslant Q'$ можно представить в виде

$$\sum_{U_0 < Q' \leqslant R/(bk+nl)} f(Q') - \sum_{U_0 < Q' \leqslant R/(bk+nl)} \{f(l)\}.$$

Снова к первой из сумм применим лемму 5.3, а ко второй — лемму 5.5. Пользуясь тем, что U_0 — полуцелое число и

$$q\left(\frac{ak+ml}{bk+nl}\right) = \frac{bk+nl}{(k,l)},$$

получаем

$$\sum_{U_0 < Q' \leqslant R/(bk+nl)} f(Q') - \sum_{U_0 < Q' \leqslant R/(bk+nl)} \{f(l)\} =$$
$$= \int_{U_0}^{R} dQ' \int_0^{Q'} [Q(ak+ml) + Q'(bk+nl) \leqslant R]\, dQ -$$
$$- \frac{U_0}{2}\left(\frac{R_1}{bk+nl} - \max\left\{1, \frac{R_1}{(a+b)k + (m+n)l}\right\}\right)[bk+nl \leqslant R_1] +$$
$$+ O\left(\left(\frac{(k,l)R}{l^2 n^2} + 1\right) s_1\left(\frac{ak+ml}{bk+nl}\right)\right).$$

Сумма остатков оценивается как и в доказательстве леммы 2.12. Поэтому, в обозначениях леммы 2.6,

$$M_2(R, U, U_0) =$$
$$= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leqslant R} \sum_{k \leqslant l} \int_{U_0}^{R} dQ' \int_0^{Q'} [Q(ak+ml) + Q'(bk+nl) \leqslant R]\, dQ -$$
$$- \frac{U_0}{2} W_4(R_1, U) + O(R \log^3 R) + O(R^2 U_0^2 \log^2 R).$$

Возникшая сумма после замены переменных $Q = tQ'$ и $Q' = \xi U_0$ преобразуется к виду

$$U_0^2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leqslant R} \sum_{k \leqslant l} \int_0^1 dt \int_1^{R_1} \xi \left[\xi(t(ak+ml)+bk+nl) \leqslant R_1\right] d\xi =$$

$$= \frac{U_0^2}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leqslant R} \sum_{k \leqslant l} \int_0^1 \left(\left(\frac{R_1}{t(ak+ml)+bk+nl}\right)^2 - 1\right) \times$$

$$\times \left[t(ak+ml)+bk+nl \leqslant R_1\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{R^2}{(mt+n)^2} \cdot \sigma_1\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) dt -$$

$$- \frac{U_0^2}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) dt,$$

где суммы $\sigma_1(R,U)$ и $\sigma_3(R,U)$ определены равенствами (2.19) и (2.21) соответственно. Таким образом

$$M_2(R,U,U_0) = \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{R^2}{(mt+n)^2} \sigma_1\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) dt -$$

$$- \frac{U_0^2}{2} W_7(R_1,U) - \frac{U_0}{2} W_4(R_1,U) + O(R \log^3 R) + O(R^2 U_0^{-2} \log^2 R), \qquad (2.51)$$

где $W_7(R,U)$ задано равенством (2.29).

Применим лемму 2.3. Тогда

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{1}{(mt+n)^2} \sigma_1\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) dt =$$

$$= \log R_1 \cdot W_1(U) - W_2(U) + W_3(U) + \qquad (2.52)$$

$$+ \frac{U}{2R_1}(1 - \log 2) + I(U) + O(R_1^{-1} U^{1/2} \log^3 U) + O(R_1^{-2} U^2),$$

где

$$I(U) = \frac{1}{R_1} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \left(\frac{1}{mt+n} - \frac{1}{(a+m)t+b+n}\right) \rho\left(\frac{R_1}{mt+n}\right) dt,$$

а суммы $W_1(U)$, $W_2(U)$, $W_3(U)$ определены формулами (1.25), (1.36), (2.26) соответственно.

Интегрирование по частям приводит к оценке

$$I(U) \ll \frac{U \log U}{R_1^2} + \frac{\log U}{R_1}.$$

Таким образом слагаемое $I(U)$ по порядку не превосходит имеющихся остаточных членов.

Подставляя равенства (2.30) и (2.52) в (2.51), находим

$$M_2(R,U,U_0)=\frac{R^2}{2}\left(\left(\log R_1-\frac{1}{2}\right)W_1(U)-W_2(U)+W_3(U)\right)-$$
$$-\frac{U_0}{2}W_4(R_1,U)+\frac{RUU_0}{2}(1-\log 2)+O(R^2U_0^{-2}\log^2 R)+$$
$$+O(U^2U_0^2\log^2 R)+O(RU_0U^{1/2}\log^3 R).$$

Наконец, применяя следствия 1.1, 1.3 и леммы 2.5, 2.6, приходим к нужной формуле для $M_2(R,U,U_0)$. □

Следствие 2.3. *Пусть* $1\leqslant U\leqslant R$. *Тогда*

$$M_1(R,U,U_0)+M_2(R,U,U_0)=\frac{\log^2 2}{\zeta(2)}R^2\log R\log U-\frac{\log^2 2}{2\zeta(2)}R^2\log^2 U+$$
$$+\left(\frac{C_1}{2}+\frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right)R^2\log R+\frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(\log 2-\frac{5}{2}+2\gamma\right)R^2\log U+$$
$$+C_0''R^2+O(RU\log^2 R)+O(R^2U^{-1/2}\log^4 R)$$

с абсолютной константой C_0''.

Доказательство. Утверждение следствия получается, если сложить результаты лемм 2.12, 2.13 и выбрать $U_0=[R^{1/2}U^{-1/2}]+1/2$. □

2.5.3. Вычисление $M_3(R,U)$.

Лемма 2.14. *Пусть* $8R^{1/2}\leqslant U\leqslant R/2$. *Тогда*

$$M_3(R,U)=\frac{\log^2 2}{2\zeta(2)}R^2\left(\log^2\frac{R}{U}+2\log\frac{R}{U}\left(2\gamma-\frac{5}{2}+\log 2\right)+C_3'''\right)+$$
$$+O(RU\log^2 R)+O(R^2U^{-1/3}\log^{5/3} R)$$

с абсолютной константой C_3'''.

Доказательство. Положим $R_1=R/U$ и рассмотрим функцию

$$f_\pm(b)=\min\left\{n,\frac{1}{Q}\left(\frac{R\mp\frac{k}{n}Q}{\frac{k}{n}b+l}-nQ'\right)\right\}.$$

Согласно определению $M_3(R,U)$,

$$M_3(R,U)=\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{n>U}T_\pm(k,l,Q,Q',n), \qquad (2.53)$$

где

$$T_\pm(k,l,Q,Q',n) = \sum_{b,m=1}^{n} \delta_n(bm\pm 1)\left[k\left(\frac{bm\pm 1}{n}Q + bQ'\right) + l(mQ+nQ') \leqslant R\right] =$$

$$= \sum_{b,m=1}^{n} \delta_n(bm\pm 1)\left[m \leqslant f_\pm(b)\right].$$

Для вычисления $T_\pm(k,l,Q,Q',n)$ предположим сначала, что $l/k \leqslant Q'/Q$. Если

$$f_\pm(b) = \frac{1}{Q}\left(\frac{R \mp \frac{k}{n}Q}{\frac{k}{n}b + l} - nQ'\right),$$

то $m(b) \in [0,n]$ и

$$f''_\pm(b) = \frac{2}{Q}\left(R \mp \frac{k}{n}Q\right)\left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{k}{n}b + l\right)^3} \in \left[\frac{1}{A}, \frac{w}{A}\right],$$

где

$$A = \frac{Q}{2}\left(R \mp \frac{k}{n}Q\right)^{-1}\left(\frac{n}{k}\right)^2 l^3, \quad w = 8.$$

Применим к функции $f_\pm(b)$ следствие 5.5. Тогда, с учетом того, что

$$A \asymp n \cdot \frac{Q}{Q'} \cdot \frac{l^2}{k^2},$$

для остатка получаем оценку

$$\sigma_0^{2/3}(n) n^{2/3}\left(\frac{Q'}{Q}\cdot\frac{k^2}{l^2}\right)^{1/3} + n^{1/2+\varepsilon}\left(\left(\frac{Q}{Q'}\cdot\frac{l^2}{k^2}\right)^{1/2} + 1\right) \ll_\varepsilon$$

$$\ll_\varepsilon \sigma_0^{2/3}(n) n^{2/3}\left(\frac{Q'}{Q}\cdot\frac{l^2}{k^2}\right)^{1/3} + n^{1/2+\varepsilon}\left(\frac{Q'}{Q}\cdot\frac{l^2}{k^2}\right)^{1/2}.$$

На участке, где $f_\pm(b) = n$, воспользуемся равенством (5.2)

$$\sum_{\substack{1\leqslant b\leqslant x\\ (b,n)=1}} 1 = \frac{\varphi(n)}{n}x + O(\sigma_0(n)).$$

Таким образом,

$$T_\pm(k,l,Q,Q',n) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{b=1\\(b,n)=1}}^{n} f_\pm(b) +$$

$$+O\left(\sigma_0^{2/3}(n) n^{2/3}\left(\frac{Q'}{Q}\cdot\frac{l^2}{k^2}\right)^{1/3}\right) + O_\varepsilon\left(n^{1/2+\varepsilon}\left(\frac{Q'}{Q}\cdot\frac{l^2}{k^2}\right)^{1/2}\right).$$

Далее, по формуле обращения Мёбиуса,

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{b=1\\(b,n)=1}}^{n} f_{\pm}(b) = \frac{1}{n}\sum_{\delta|n}\mu(\delta)\sum_{b=1}^{n/\delta} f_{\pm}(\delta b),$$

и, по лемме 5.5,

$$\sum_{b=1}^{n/\delta} f_{\pm}(\delta b) = \frac{1}{\delta}\int_0^n f_{\pm}(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\delta}\cdot\frac{lQ'}{kQ}\right).$$

Значит,

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{b=1\\(b,n)=1}}^{n} f_{\pm}(b) = \frac{\varphi(n)}{n^2}\int_0^n f_{\pm}(t)\,dt + O\left(\frac{\log R}{n}\cdot\frac{lQ'}{kQ}\right),$$

$$T_{\pm}(k,l,Q,Q',n) = \frac{\varphi(n)}{n^2}V_{\pm}(k,l,Q,Q',n) + O\left(\frac{\log R}{n}\cdot\frac{l}{k}\cdot\frac{Q'}{Q}\right) + \tag{2.54}$$

$$+O\left(\sigma_0^{2/3}(n)n^{2/3}\left(\frac{Q'}{Q}\cdot\frac{l^2}{k^2}\right)^{1/3}\right) + O_{\varepsilon}\left(n^{1/2+\varepsilon}\left(\frac{Q'}{Q}\cdot\frac{l^2}{k^2}\right)^{1/2}\right),$$

где $V_{\pm}(k,l,Q,Q',n)$ — площадь области $\Omega_{\pm}(k,l,Q,Q',n)$ на плоскости Obm, задаваемой условиями

$$0 \leqslant b, m \leqslant n, \qquad k\left(\frac{bm\pm 1}{n}Q + bQ'\right) + l(mQ + nQ') \leqslant R. \tag{2.55}$$

Если же $l/k \geqslant Q'/Q$, то величину $T_{\pm}(k,l,Q,Q',n)$ нужно записать в виде

$$T_{\pm}(k,l,Q,Q',n) = \sum_{b,m=1}^{n}\delta_n(bm\pm 1)\left[b \leqslant g_{\pm}(m)\right],$$

где

$$g_{\pm}(m) = \min\left\{n, \frac{1}{k}\left(\frac{R\mp\frac{k}{n}}{\frac{Q}{n}m + Q'} - ln\right)\right\},$$

и применить следствие 5.5 к функции $g_{\pm}(m)$. Тогда, как и в случае $l/k \leqslant Q'/Q$, аналогичные преобразования приведут к (2.54).

Подставляя равенство (2.54) в формулу (2.53), получаем

$$M_3(R,U) = \sum_{l\cdot Q'\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{U<n\leqslant R/(lQ')}\frac{\varphi(n)}{n^2}\cdot V_{\pm}(k,l,Q,Q',n) +$$
$$+O(R^2U^{-1/3}\log^{5/3}R).$$

Обозначим через $\Omega(k,l,Q,Q',n)$ область, которая получается, если в (2.55) отбросить ± 1:

$$0 \leqslant b, m \leqslant n, \qquad \left(\frac{kb}{n} + l\right)(mQ + nQ') \leqslant R,$$

а через $V(k,l,Q,Q',n)$ — ее площадь. Так как

$$\Omega_+(k,l,Q,Q',n)\subset\Omega(k,l,Q,Q',n)\subset\Omega_-(k,l,Q,Q',n),$$

то при замене $V_\pm(k,l,Q,Q',n)$ на $V(k,l,Q,Q',n)$ возникнет погрешность, не превосходящая разности $V_-(k,l,Q,Q',n)-V_+(k,l,Q,Q',n)$. Но при фиксированном m разность между величинами b_- и b_+, такими что

$$k\left(\frac{b_\pm m\pm 1}{n}Q+b_\pm Q'\right)+l(mQv+nQ')=R,$$

есть $O(1/n)$. Следовательно,

$$V_-(k,l,Q,Q',n)-V_+(k,l,Q,Q',n)=O(1)$$

и

$$M_3(R,U)=2\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{U<n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}V(k,l,Q,Q',n)+O(R^2U^{-1/3}\log^{5/3}R). \tag{2.56}$$

Далее,

$$\sum_{U<n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}V(k,l,Q,Q',n)=\sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sum_{\frac{U}{\delta}<n\leqslant\frac{R}{\delta}}\frac{V(k,l,Q,Q',\delta n)}{n}.$$

Поэтому сумма главных членов в формуле (2.56) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&2\sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{\frac{U}{\delta}<n\leqslant\frac{R}{\delta}}\frac{1}{n}\times\\
&\quad\times\int_0^{\delta n}db\int_0^{\delta n}\left[\left(\frac{b}{\delta n}k+l\right)\left(\frac{m}{\delta n}Q+Q'\right)\leqslant\frac{R}{\delta n}\right]dm=\\
&=2\sum_{\delta\leqslant R}\mu(\delta)\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{\frac{U}{\delta}<n\leqslant\frac{R}{\delta}}n\int_0^1\int_0^1\left[(\alpha k+l)(\beta Q+Q')\leqslant\frac{R}{\delta n}\right]d\alpha\,d\beta=\\
&=2\sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\int_0^1\int_0^1\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\sum_{\frac{U}{\delta}<n\leqslant\frac{R}{\delta}}n\left[n\leqslant\frac{R}{\delta(\alpha k+l)(\beta Q+Q')}\right]d\alpha\,d\beta=\\
&=\sum_{\delta\leqslant R}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\int_0^1\int_0^1\sum_{l\cdot Q'\leqslant R_1}\sum_{k\leqslant l}\sum_{Q\leqslant Q'}\left(\frac{R^2}{(\alpha k+l)^2(\beta Q+Q')^2}-U^2\right)\times\\
&\quad\times[(\alpha k+l)(\beta Q+Q')\leqslant R_1]\,d\alpha\,d\beta+O(R^2U^{-1}\log R)
\end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}M_3(R,U)=\frac{U^2}{\zeta(2)}\int_0^1\int_0^1\left(R_1^2\cdot L(\alpha,\beta;R_1)-T(\alpha,\beta;R_1)\right)d\alpha\,d\beta+\\
+O(R^2U^{-1/3}\log^{5/3}R),\end{aligned}$$

где $T(\alpha,\beta;R)$ и $L(\alpha,\beta;R)$ определены равенствами (2.41) и (2.48) соответственно.

Подставляя в последнюю формулу соотношения из следствия 2.2, приходим к утверждению леммы. □

Следствие 2.4. *Пусть* $R \geqslant 2$. *Тогда*

$$M(R) = \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)} R^2 \log^2 R + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right) R^2 \log R + \\ + \widetilde{C} R^2 + O(R^{7/4} \log^{7/4} R),$$

где $\widetilde{C}$ *— абсолютная константа, и* C_1 *определено равенством (1.27).*

Доказательство. Складывая результаты следствия 2.3 и леммы 2.14 получаем равенство

$$M(R) = \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)} R^2 \log^2 R + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)}\left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right) R^2 \log R + \\ + \widetilde{C} R^2 + O(RU \log^2 R) + O(R^2 U^{-1/3} \log^{5/3} R),$$

в котором $\widetilde{C} = C_0'' + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} C_3'''$. Выбирая $U = R^{3/4} \log^{-1/4} R$, приходим к утверждению следствия. □

2.5.4. Вычисление $D(R)$.

Доказательство теоремы 4. Применим следствие 2.4 и воспользуемся формулой обращения Мёбиуса. Тогда

$$M^*(R) = \sum_{d \leqslant R} \mu(d) M\left(\frac{R}{d}\right) = \frac{\log^2 2}{2\zeta^2(2)} R^2 \log^2 R + C' R^2 + \\ + \left(\frac{C_1}{2\zeta(2)} + \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right) R^2 \log R + O(R^{7/4} \log^{7/4} R).$$

По формуле (2.15)

$$\mathcal{L}_2(R) = \frac{2\log^2 2}{\zeta^2(2)} \log^2 R + 4\left(\frac{C_1}{2\zeta(2)} + \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\right) \log R + \\ + C' + O(R^{-1/4} \log^{7/4} R).$$

Подставляя последнее равенство в (2.9), приходим к утверждению теоремы с константой

$$D_1 = \frac{8\log^2 2}{\zeta^2(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log 2}{2} - 1\right) + \frac{4}{\zeta(2)}\left(C_1 + \frac{3\log 2}{2}\right), \tag{2.57}$$

где C_1 определено равенством (1.27). □

Замечание 2.2. Сравнение формул (1.48) и (2.57) показывает, что константы при главных членах в теоремах 2 и 4 совпадают: $D_1 = \widetilde{D}_1$.

ГЛАВА 3

Задача Арнольда о статистиках Гаусса-Кузьмина

Для фиксированного $x \in [0,1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$ статистики Гаусса-Кузьмина задаются равенством

$$s^{(x)}(r) = \#\{j : 1 \leqslant j \leqslant s(r), [0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x\}.$$

В данной главе рассматривается вопрос об асимптотическом поведении суммы

$$N_x(R) = \sum_{(a,b)\in\Omega(R)} s^{(x)}(a/b),$$

где $\Omega(R)$ — область, полученная гомотетией с коэффициентом R ($R \to \infty$) из некоторой фиксированной области Ω_0:

$$\Omega(R) = R \cdot \Omega_0 = \left\{(x, y) : x, y > 0, (x/R, y/R) \in \Omega_0\right\}.$$

При этом предполагается, что Ω_0 на плоскости Oxy лежит внутри угла $0 < x \leqslant y$ и задана в полярных координатах

$$\Omega_0 = \left\{(\rho, \varphi) : 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \rho \leqslant r(\varphi)\right\}.$$

Задача об исследовании статистик Гаусса-Кузьмина для конечных цепных дробей, как и в главе 2 сводится к исследованию системы уравнений и неравенств (см. лемму 3.1). В основе такого подхода лежат свойства множества $\mathcal{M}$ введенного в разделе 1.1. Как и раньше, все решения системы разбиваются на два класса, каждый из которых рассматривается отдельно. От границы области $\Omega(R)$ не требуется, чтобы она задавалась дважды дифференцируемой функцией. Поэтому при подсчете решений второго класса вместо теоремы 8 используется более слабый ее вариант — лемма 5.13.

Отдельно рассматриваются случаи сектора (для которого первоначально была поставлена задача) и треугольника (для которого получается наиболее простой и точный ответ).

В качестве приложения теоремы 8, доказывается уточнение результата Портера [**68**], распространенное на случай статистик Гаусса-Кузьмина.

В заключение упрощенный вариант теоремы 5 (см. замечание 3.1) и теорема 6 применяются для исследования алгоритма Евклида с выбором минимального по модулю остатка.

Настоящая глава основана на работах [**25, 26, 31**].

3.1. Переход к системе уравнений и неравенств

Обозначим через $N_x^*(R)$ сумму

$$N_x^*(R) = \sum_{\substack{(a,b)\in\Omega(R)\\(a,b)=1}} s^{(x)}(a/b).$$

Так как

$$N_x(R) = \sum_{d\leqslant R} N_x^*(R/d),$$

то для решения задачи достаточно получить асимптотическую формулу для $N_x^*(R)$.

Пусть $T_x^*(R)$ — число решений системы

$$\begin{cases} mP + nP' = a,\\ mQ + nQ' = b,\\ a^2 + b^2 \leqslant R^2 \cdot r^2(\operatorname{arctg} a/b),\\ 1 \leqslant m \leqslant xn, \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \quad (m,n) = 1. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Для любого $R \geqslant 2$ и $x \in [0;1]$ справедливо равенство*

$$N_x^*(R) = T_x^*(R) + \frac{R^2}{\zeta(2)}[x<1]\cdot V_0(x) + O\left(R\log R\right), \tag{3.3}$$

где

$$V_0(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} x} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Доказательство. Пусть $(a,b)=1$ и a/b — некоторое фиксированное рациональное число из интервала $(0,1)$. Разложим его в цепную дробь:

$$a/b = [0; t_1, t_2, \ldots, t_{s-1}, t_s] \qquad (s \geqslant 1).$$

Нас интересует величина $s^{(x)}(a/b)$, равная числу номеров $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, для которых $[0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x$.

Если $s \geqslant 2$ и P/Q, P'/Q' — пара последовательных подходящих дробей к числу a/b (P'/Q' — дробь с бóльшим номером), отличных от этого числа, то для некоторого номера $j \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$

$$P = K_{j-2}(t_2, \ldots, t_{j-1}), \qquad P' = K_{j-1}(t_2, \ldots, t_j),$$
$$Q = K_{j-1}(t_1, \ldots, t_{j-1}), \qquad Q' = K_j(t_1, \ldots, t_j)$$

(в частности, при $j=1$ будем иметь $P=0$, $Q=P'=K()=1$, $Q'=t_1$). Так как $PQ'-P'Q=\pm1$, то, по паре чисел a и b однозначно находятся целые m и n, для которых

$$mP + nP' = a,$$
$$mQ + nQ' = b.$$

Из свойств континуантов (см. равенство (1.1)) следует, что такими числами являются

$$m = K_{s-j-1}(t_{j+2}, \ldots, t_s),$$
$$n = K_{s-j}(t_{j+1}, \ldots, t_s),$$

и, кроме того,

$$m/n = [0; t_{j+1}, \ldots, t_s].$$

По лемме 1.2

$$s^{(x)}(a/b) = [a/b \leqslant x] + l_x(a, b), \tag{3.4}$$

где $l_x(a, b)$ — число решений системы

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{aQ' - bP'}{-aQ + bP} < 1, \\ mP + nP' = a, \\ mQ + nQ' = b, \\ \quad m/n \leqslant x, \end{cases} \tag{3.5}$$

в которой $\left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$.

Далее, так как

$$\frac{aQ' - bP'}{-aQ + bP} = \frac{m}{n},$$

то систему (3.5) можно переписать в виде

$$\begin{cases} mP + nP' = a, \\ mQ + nQ' = b, \\ m/n \leqslant x, \end{cases}$$

где

$$\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \quad 0 < m < n.$$

Суммирование формулы (3.4) по примитивным точкам (a, b), лежащим в области $\Omega(R)$ приводит к равенству

$$N_x^*(R) = L_x^*(R) + \frac{R^2}{\zeta(2)} \cdot V_0(x) + O\left(R \log R\right), \tag{3.6}$$

где $L_x^*(R)$ — число решений системы (3.1), в которой

$$\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \quad 0 < m < n, \quad (m, n) = 1.$$

Если $x < 1$ или $n \geqslant 2$, то условие $m < n$ можно опустить. В этом случае $L_x^*(R) = T_x^*(R)$ и утверждение леммы доказано. Если же $x = 1$ и $m = n = 1$, то при отбрасывании условия $m < n$ число решений системы (3.1) увеличивается. Таким образом

$$L_x^*(R) = T_x^*(R) - T_0[x = 1], \tag{3.7}$$

где T_0 — число решений системы

$$\begin{cases} P + P' = a, \\ Q + Q' = b, \\ a^2 + b^2 \leqslant R^2 \cdot r^2(\operatorname{arctg} a/b), \end{cases} \tag{3.8}$$

в которой $\left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$.

Согласно замечанию 1.1, для каждой примитивной точки (a, b) такой, что

$$1 \leqslant a < b, \quad a^2 + b^2 \leqslant R^2 \cdot r^2(\operatorname{arctg} a/b),$$

система (3.8) будет иметь ровно одно решение. Следовательно, по лемме 5.2,

$$T_0 = \frac{R^2}{\zeta(2)} \cdot V_0(1) + O\left(R \log R\right). \tag{3.9}$$

Объединяя формулы (3.6), (3.7) и (3.9), приходим к утверждению леммы. $\square$

Для дальнейшего исследования величины $T_x^*(R)$ введем параметр U, лежащий в пределах $1 \leqslant U \leqslant R$. Через $T_1(R, U)$ обозначим число решений системы (3.1) с ограничениями (3.2), которые удовлетворяют дополнительному условию $Q' \leqslant U$. Число решений, для которых $Q' > U$, обозначим через $T_2(R, U)$. Таким образом

$$T_x^*(R) = T_1(R, U) + T_2(R, U).$$

Каждую из величин $T_1(R, U)$ и $T_2(R, U)$ исследуем отдельно.

3.2. Анализ первого случая

Пусть q — натуральное и $x \in [0, 1]$. Для целых u и v, лежащих в пределах $1 \leqslant u, v \leqslant q$ через $I_q^{(\pm)}(u, v)$ будем обозначать отрезки

$$I_q^{(+)}(u, v) = \left[\operatorname{arctg}\frac{u}{q}, \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q} + \frac{x}{q(q + vx)}\right)\right] \quad (q \geqslant 2),$$
$$I_q^{(-)}(u, v) = \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q} - \frac{x}{q(q + vx)}\right), \operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right].$$

При $q = 1$, в соответствии со свойством 5° множества $\mathcal{M}$ (см. стр. 28), будем считать, что $I_q^{(+)}(u, v) = \varnothing$.

Лемма 3.2. *Пусть $r(\varphi) \in C^{(1)}([0, \pi/4])$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию*

$$r'(\varphi) \leqslant r(\varphi) \operatorname{tg} \varphi$$

при $\varphi \in [0, \pi/4]$. Тогда для суммы

$$w_1(q, x) = \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^{q}{}' \delta_q(uv \pm 1) \int_{I_q^{(\pm)}(u,v)} r^2(\varphi)\, d\varphi$$

справедлива асимптотическая формула

$$w_1(q,x) = 2V_0 \cdot \log(1+x) \cdot \frac{\varphi(q)}{q^2} + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right),$$

где

$$V_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2(\varphi)\,d\varphi,$$

и $\psi(q) = \sigma_0(q)\log^2(q+1)$.

Доказательство. Будем предполагать, что $q \geqslant 2$, так как при $q = 1$ утверждение леммы очевидно.

Проверим, что функция

$$a(u,v) = \int_{I_q^{(\pm)}(u,v)} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

удовлетворяет условиям (5.24) леммы 5.14. Рассмотрим случай, когда интегрирование ведется по отрезку $I_q^{(+)}(u,v)$. Случай отрезка $I_q^{(-)}(u,v)$ разбирается аналогично.

Заметим сначала, что для $\varphi(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q}+t\right)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r^2(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\right) = \frac{2r(\varphi(t))}{\left(\frac{u}{q}+t\right)^2+1}\left(r'(\varphi(t)) - r(\varphi(t))\operatorname{tg}\varphi(t)\right) \leqslant 0, \quad (3.10)$$

так как по предположению $r(\varphi) \geqslant 0$ и $r'(\varphi) \leqslant r(\varphi)\operatorname{tg}\varphi$. Если f — непрерывная функция и

$$F(u) = \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} f(\varphi)\,d\varphi,$$

то

$$F'(u) = \beta'(u)f(\beta(u)) - \alpha'(u)f(\alpha(u)). \quad (3.11)$$

Поэтому

$$\frac{\partial a(u,v)}{\partial u} = r^2\left(\varphi\left(\frac{x}{q(q+vx)}\right)\right)\varphi'\left(\frac{x}{q(q+vx)}\right) - r^2\left(\varphi\left(0\right)\right)\varphi'\left(0\right).$$

Применяя к последнему тождеству теорему Лагранжа о конечном приращении и пользуясь неравенством (3.10), находим, что

$$\frac{\partial a(u,v)}{\partial u} \leqslant 0,$$

а, значит, и $\Delta_{1,0}a(u,v) \leqslant 0$.

Далее

$$\frac{\partial}{\partial v}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q}+\frac{x}{q(q+vx)}\right) = -\frac{xv}{q(q+vx)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{u}{q}+\frac{x}{q(q+vx)}\right)^2+1} < 0. \quad (3.12)$$

Следовательно, из (3.11) получаем

$$\frac{\partial a(u,v)}{\partial v} = r^2\left(\varphi\left(\frac{x}{q(q+vx)}\right)\right)\frac{\partial}{\partial v}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q}+\frac{x}{q(q+vx)}\right) < 0. \qquad (3.13)$$

Таким образом и $\Delta_{0,1}a(u,v) \leqslant 0$.

Для смешанной производной из (3.12) и (3.13) получаем представление

$$\frac{\partial^2 a(u,v)}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial a(u,v)}{\partial v}\right) =$$

$$= -\frac{xv}{q(q+vx)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\left(\frac{u}{q}+\frac{x}{q(q+vx)}\right)^2+1}\cdot r^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q}+\frac{x}{q(q+vx)}\right)\right)\right)$$

Поэтому из (3.10) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 a(u,v)}{\partial u\,\partial v} \geqslant 0.$$

Значит, $\Delta_{1,1}a(u,v) \geqslant 0$, и все условия (5.24) действительно выполняются.

По лемме 5.14,

$$w_1(q,x) = \frac{\varphi(q)}{2q^2}\sum_{u,v=1}^{q}\left(\int_{I_q^{(+)}(u,v)} r^2(\varphi)\,d\varphi + \int_{I_q^{(-)}(u,v)} r^2(\varphi)\,d\varphi\right) + O\left(\frac{\psi(q)\sqrt{q}}{q^2}\right).$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении (с учетом того, что $r(\varphi) = O(1)$ и $r'(\varphi) = O(1)$), находим

$$\int_{I_q^{(\pm)}(u,v)} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{x}{q(q+vx)}\cdot\frac{1}{1+\frac{u^2}{q^2}}\left(r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right)+O\left(\frac{1}{q^2}\right)\right),$$

$$\frac{x}{q+vx} = \log(q+vx) - \log(q+(v-1)x) + O\left(\frac{1}{q^2}\right),$$

$$\frac{1}{q\left(1+\frac{u^2}{q^2}\right)}\cdot r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right) = \int_{u-1}^{u} r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{q}\right)\,d\operatorname{arctg}\frac{z}{q} + O\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Таким образом

$$w_1(q,x) = \frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{u=1}^{q}\int_{u-1}^{u} r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{q}\right)\,d\operatorname{arctg}\frac{z}{q}\times$$

$$\times\sum_{v=1}^{q}\left[\log(q+vx)-\log(q+(v-1)x)\right] + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right) =$$

$$= 2V_0\cdot\log(1+x)\cdot\frac{\varphi(q)}{q^2} + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right),$$

и лемма 3.2 доказана. □

Следствие 3.1. *Пусть выполняются условия леммы 3.2. Тогда при $N \geqslant 1$ для суммы*

$$W_1(N,x) = \sum_{q \leqslant N} w_1(q,x)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_1(N,x) = 2V_0 \cdot \frac{\log(1+x)}{\zeta(2)} \left(\log N + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + f(x) + O\left(\frac{\log^3(N+1)}{N^{1/2}} \right), \tag{3.14}$$

где $f(x)$ — функция, задаваемая рядом

$$f(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \left(w_1(q,x) - 2V_0 \cdot \log(1+x) \cdot \frac{\varphi(q)}{q^2} \right). \tag{3.15}$$

Доказательство. Пользуясь оценкой (1.28), находим

$$\sum_{q \leqslant N} \left(w_1(q,x) - 2V_0 \cdot \log(1+x) \cdot \frac{\varphi(q)}{q^2} \right) = f(x) + O\left(\frac{\log^3(N+1)}{N^{1/2}} \right),$$

$$W_1(N,x) = 2V_0 \cdot \log(1+x) \sum_{q \leqslant N} \frac{\varphi(q)}{q^2} + f(x) + O\left(\frac{\log^3(N+1)}{N^{1/2}} \right). \tag{3.16}$$

Подставляя в последнее равенство формулу (5.4), приходим к утверждению следствия. □

Равенство (3.14) позволяет доказать асимптотическую формулу для величины $T_1(R,U)$.

Лемма 3.3. *Пусть $1 \leqslant U \leqslant R$. Тогда для величины $T_1(R,U)$, равной числу решений системы (3.1), (3.2) с дополнительным ограничением $Q' \leqslant U$, справедлива асимптотическая формула*

$$T_1(R,U) = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2 \left(\log(x+1) \log U + C_1(x) \right) + \\ + O\left(R^2 U^{-1/2} \log^3 R \right) + O\left(RU \log R \right),$$

где

$$C_1(x) = \log(x+1) \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + \frac{\zeta(2)}{2V_0} \cdot f(x), \tag{3.17}$$

а функция $f(x)$ определена равенством (3.15).

Доказательство. При фиксированных значениях параметров P, P', Q и Q' число решений системы (3.1) относительно неизвестных m и n равно числу примитивных точек (m,n) в области $\Omega = \Omega(P,P',Q,Q')$ задаваемой условиями

$$(mP + nP')^2 + (mQ + nQ')^2 \leqslant R^2 \cdot r^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{mP + nP'}{mQ + nQ'} \right),$$
$$1 \leqslant m \leqslant nx.$$

Эта область содержится внутри квадрата $0 < m, n \leqslant R/Q'$ и имеет кусочно-дифференцируемую границу, длина которой есть $O(R/Q')$. По лемме 5.2 число таких точек равно

$$\frac{1}{\zeta(2)} \cdot V(\Omega) + O\left(\frac{R}{Q'} \log R\right).$$

Отсюда

$$T_1(R, U) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{PQ'-P'Q=\pm 1} V(\Omega) + O\left(RU \log R\right),$$

где суммирование ведется по наборам (P, P', Q, Q'), удовлетворяющим ограничениям (3.2) и условию $Q' \leqslant U$. Заменяя переменные m и n на исходные параметры a и b

$$m = \pm(aQ' - bP'), \quad n = \pm(bP - aQ),$$

находим, что величина $V(\Omega)$ совпадает с площадью области

$$\frac{aQ' - bP'}{bP - aQ} \leqslant x, \quad \pm(aQ' - bP') > 0, \quad a^2 + b^2 \leqslant R^2 \cdot r^2(\operatorname{arctg} a/b)$$

на плоскости Oab. Значит,

$$V(\Omega) = \frac{R^2}{2} \int_{I_q^{(\pm)}(P', Q)} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

При фиксированном значении параметра $Q' = q$ переменные P' и Q должны удовлетворять сравнению $P'Q \pm 1 \equiv 0 \pmod q$. Если $P' = u$, $Q = v$ — решение такого сравнения, то значение параметра P находится однозначно: $P = (uv \pm 1)/q$. Оно будет попадать в нужные границы $0 \leqslant P \leqslant Q = v$ всегда за исключением случая, когда $q = u = v = 1$, $P = 2$ (что согласуется с определением интервала $I_q^{(+)}(u, v)$). Следовательно,

$$\begin{aligned} T_1(R, U) &= \frac{R^2}{2\zeta(2)} \sum_{q \leqslant U} \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv \pm 1) \int_{I_q^{(\pm)}(u,v)} r^2(\varphi)\, d\varphi + O\left(RU \log R\right) = \\ &= \frac{R^2}{\zeta(2)} \cdot W_1(U, x) + O\left(RU \log R\right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда асимптотическую формулу (3.14) для суммы $W_1(U, x)$, получаем утверждение леммы. □

3.3. Анализ второго случая

Далее будем рассматривать функцию $v(u)$, которая в области

$$1 \leqslant u \leqslant q - 1, \qquad 0 \leqslant v \leqslant q,$$

неявно задана уравнением

$$a^2 + b^2 = R^2 \cdot r^2(\operatorname{arctg} a/b), \tag{3.18}$$

где
$$a = m\frac{uv \pm 1}{q} + nu, \qquad b = mv + nq.$$
В следующем утверждении будем считать, что функция $v(u)$ определена хотя бы в одной точке.

Лемма 3.4. *Пусть $R \geqslant 1$ — действительное, m, n, q — натуральные и $1 \leqslant m \leqslant n$. Предположим также, что задана функция $r(\varphi) \in C^{(1)}([0, \pi/4])$, которая на всем отрезке $[0, \pi/4]$ удовлетворяет условиям*
$$r(\varphi) \geqslant \varepsilon_0 > 0, \qquad r'(\varphi) \leqslant r(\varphi) \operatorname{tg} \varphi.$$

Тогда при
$$q^2 > U_0 = \frac{13}{{\varepsilon_0}^2} \cdot \max_{\varphi \in [0, \pi/4]} r(\varphi)\, |r'(\varphi)| \tag{3.19}$$
функция $v(u)$ имеет областью определения отрезок $[u_0, q-1]$, где $1 \leqslant u_0 \leqslant q-1$, и на этом отрезке является невозрастающей функцией.

Доказательство. Во-первых, заметим, что выполняются следующие неравенства
$$\frac{\partial(a^2+b^2)}{\partial v} = 2a \cdot \frac{mu}{q} + 2bm \geqslant 2m,$$
$$\left|\frac{R^2 \cdot \partial r^2(\operatorname{arctg} a/b)}{\partial v}\right| = \frac{2R^2 \cdot r \cdot |r'| \cdot m}{(a^2+b^2)q^2} \leqslant \frac{2R^2 \cdot r \cdot |r'| \cdot m}{n^2 \cdot q^4},$$
где $r = r(\operatorname{arctg} a/b)$, $r' = r'(\operatorname{arctg} a/b)$.

Так как функция $v(u)$ должна быть определена хотя бы в одной точке, то параметр R удовлетворяет неравенству
$$\left(m\frac{q^2+1}{q} + nq\right)^2 + (mv+nq)^2 \geqslant R^2 \cdot {\varepsilon_0}^2.$$
Отсюда $R^2 \leqslant 13n^2q^2/{\varepsilon_0}^2$, и при $q^2 > U_0$
$$\left|\frac{R^2 \cdot \partial r^2(\operatorname{arctg} a/b)}{\partial v}\right| \leqslant \frac{2 \cdot 13}{{\varepsilon_0}^2} \cdot \frac{r \cdot |r'| \cdot m}{q^2} < 2m \leqslant \frac{\partial(a^2+b^2)}{\partial v}.$$

Значит, при фиксированном u равенство (3.18) определяет не более одного значения v.

Дифференцируя $v(u)$ как неявную функцию, находим
$$\frac{dv}{du} = -\frac{b^2}{m} \cdot \frac{a/b - r'/r}{au + bq \pm mr'/r}.$$
По условию леммы $r'/r \leqslant a/b$, значит, числитель полученного выражения неотрицателен. Далее, так как $m/n \leqslant 1$ и $q^2 > r'/r$, то
$$au + bq \pm m\frac{r'}{r} \geqslant nq^2 \pm m\frac{r'}{r} = n\left(q^2 \pm \frac{m}{n} \cdot \frac{r'}{r}\right) > 0.$$
Следовательно, функция $v(u)$ не возрастает и определена на некотором отрезке $[u_0, q-1]$, где $1 \leqslant u_0 \leqslant q-1$. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть функция $r(\varphi)$ удовлетворяет ограничениям из леммы 3.4, U_0 определено формулой (3.19), $U_0^{1/2} \leqslant U < R$ и $R_1 = R/U$. Тогда для величины $T_2(R,U)$, равной числу решений системы (3.1), (3.2) с дополнительным ограничением $Q' > U$, справедлива асимптотическая формула*

$$T_2(R,U) = 2\sum_{n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R} \frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot V(m,n,q) + O\left(R^2 U^{-1/4} \log^2 R\right),$$

где $V(m,n,q)$ — площадь области $\Omega(m,n,q)$ на плоскости Ouv, задаваемой условиями

$$0 \leqslant u, v \leqslant q, \quad \left(\frac{u^2}{q^2}+1\right)(mv+nq)^2 \leqslant R^2 \cdot r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right).$$

Доказательство. Согласно определению величины $T_2(R,U)$,

$$T_2(R,U) = \sum_{1\leqslant n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R/n} \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv\pm 1)\left[a^2+b^2 \leqslant R^2\cdot r^2(\operatorname{arctg} a/b)\right],$$

где

$$a = m\frac{uv\pm 1}{q} + nu, \qquad b = mv+nq.$$

Применяя леммы 3.4 и 5.13, находим:

$$T_2(R,U) = \sum_{1\leqslant n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R/n} \left(\frac{\varphi(q)}{q^2}\cdot V_{\pm}(m,n,q) + O\left(q^{3/4}\sigma_0(q)\log q\right)\right),$$

где $V_{\pm}(m,n,q)$ — площадь области $\Omega_{\pm}(m,n,q)$ на плоскости Ouv, задаваемой условиями

$$0 \leqslant u, v \leqslant q, \tag{3.20}$$

$$\left(m\frac{uv\pm 1}{q}+nu\right)^2 + (mv+nq)^2 \leqslant R^2\cdot r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q} \pm \frac{m}{q(mv+nq)}\right). \tag{3.21}$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что

$$V_{\pm}(m,n,q) = V(m,n,q) + O(q). \tag{3.22}$$

Действительно, из этого равенства будет следовать асимптотическая формула

$$T_2(R,U) = 2\sum_{n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R/n} \frac{\varphi(q)}{q^2}\cdot V(m,n,q) + O\left(R^2U^{-1/4}\log^2 R\right),$$

которая равносильна утверждению леммы, поскольку условие $q \leqslant R/n$ можно заменить более простым $q < R$ (при $nq > R$ область $\Omega(m,n,q)$ пуста и $V(m,n,q) = 0$).

Для доказательства формулы (3.22) рассмотрим, на сколько могут отличаться отрезки изменения переменной v, задаваемые неравенствами (3.20)–(3.21) при фиксированном u в пределах $1 \leqslant u \leqslant q-1$. Хотя бы один из этих отрезков не должен быть пустым, поэтому должно выполняться одно из неравенств

$$\left(m\frac{uv\pm 1}{q}+nu\right)^2+(mv+nq)^2>R^2\cdot r^2\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\pm\frac{m}{q(mv+nq)}\right),$$

а, значит, $R\ll nq$. Пусть пара (u,v) лежит в области $\Omega(m,n,q)$, но не лежит в одной из областей $\Omega_\pm(m,n,q)$ (или наоборот). Так как

$$\sqrt{\left(m\frac{uv\pm 1}{q}+nu\right)^2+(mv+nq)^2}=(mv+nq)\sqrt{\frac{u^2}{q^2}+1}+O\left(\frac{m}{q}\right),$$

и

$$r\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\pm\frac{m}{q(mv+nq)}\right)=r\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right)+O\left(\frac{m}{nq^2}\right),$$

то

$$R\cdot r\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right)-(mv+nq)\sqrt{\frac{u^2}{q^2}+1}\ll\frac{Rm}{nq^2}+\frac{m}{q}\ll\frac{m}{q}.$$

Поэтому при фиксированном значении u переменная v меняется внутри интервала длины $O(1/q)$.

Учитывая, что площади областей $\Omega(m,n,q)$ и $\Omega_\pm(m,n,q)$, попавшие внутрь полос $0\leqslant u\leqslant 1$ и $q-1\leqslant u\leqslant q$, отличаются не больше, чем на q, приходим к равенству (3.22). Лемма 3.5 доказана. □

Далее, для вычисления величины $T_2(R,U)$ понадобится вспомогательное утверждение, аналогичное лемме 2.9.

Лемма 3.6. *Пусть $\xi>1$, $x\in[0,1]$ и*

$$F^*(\xi,x)=\sum_{n<\xi}\sum_{m\leqslant nx}{}^{*}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)-\sum_{n<\xi}\sum_{\substack{m\leqslant nx\\ m+n>\xi}}{}^{*}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{m+n}\right). \tag{3.23}$$

Тогда равномерно по x

$$F^*(\xi,x)=\frac{\log(x+1)}{\zeta(2)}\log\xi+\frac{H(x)}{\zeta(2)}+O\left(\frac{\log^2(\xi+1)}{\xi}\right),$$

где

$$H(x)=\log(x+1)\left(\log x-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-\frac{1}{2}\log(x+1)+\gamma-1\right)+h(x),$$

и

$$h(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\sum_{\frac{m}{x}\leqslant n<\frac{m}{x}+m}\frac{1}{n}-\log(x+1)\right). \tag{3.24}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала сумму

$$F(\xi,x)=\sum_{n<\xi}\sum_{m\leqslant nx}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)-\sum_{n<\xi}\sum_{\substack{m\leqslant nx\\ m+n>\xi}}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{m+n}\right),$$

в которой отсутствует условие взаимной простоты чисел m и n. Положим

$$F(\xi, x) = F_1(\xi, x) - F_2(\xi, x),$$

где

$$F_1(\xi, x) = \sum_{n<\xi} \sum_{m \leqslant nx} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right),$$

$$F_2(\xi, x) = \sum_{n<\xi} \sum_{\substack{m \leqslant nx \\ m+n>\xi}} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n} \right).$$

Используя введенную функцию $h(x)$, находим

$$\begin{aligned} F_1(\xi, x) = &\sum_{m<x\xi} \frac{1}{m} \left(\sum_{\frac{m}{x} \leqslant n < \frac{m}{x}+m} \frac{1}{n} - \sum_{\xi \leqslant n < \xi+m} \frac{1}{n} \right) = \\ &= h(x) + \log(x+1) \sum_{m<x\xi} \frac{1}{m} - \sum_{m<x\xi} \frac{1}{m} \sum_{\xi \leqslant n<\xi+m} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{\xi}\right) = \\ &= h(x) + (\log(x+1) + \log \xi)(\log x\xi + \gamma) - \sigma + O\left(\frac{\log(\xi+1)}{\xi}\right), \end{aligned}$$

где

$$\sigma = \sum_{m<x\xi} \frac{\log(\xi+m)}{m}. \tag{3.25}$$

Сумму $F_2(\xi, x)$ представим в виде $F_2(\xi, x) = F_3(\xi, x) - F_4(\xi, x)$, где

$$F_3(\xi, x) = \frac{1}{\xi} \sum_{n<\xi} \sum_{\substack{m \leqslant nx \\ m+n>\xi}} \frac{1}{m},$$

$$F_4(\xi, x) = \sum_{n<\xi} \sum_{\substack{m \leqslant nx \\ m+n>\xi}} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m+n}.$$

После перемены порядка суммирования в $F_3(\xi, x)$ находим

$$\begin{aligned} F_3(\xi, x) &= \frac{1}{\xi} \sum_{m \leqslant \frac{x\xi}{x+1}} \frac{1}{m} \sum_{\xi-m<n<\xi} 1 + \frac{1}{\xi} \sum_{\frac{x\xi}{x+1}<m<x\xi} \frac{1}{m} \sum_{\frac{m}{x} \leqslant n<\xi} 1 = \\ &= \log(x+1) + O\left(\frac{\log(\xi+1)}{\xi}\right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} F_4(\xi, x) &= \sum_{m \leqslant \frac{x\xi}{x+1}} \frac{1}{m} \sum_{\xi-m<n<\xi} \frac{1}{m+n} + \sum_{\frac{x\xi}{x+1}<m<x\xi} \frac{1}{m} \sum_{\frac{m}{x} \leqslant n<\xi} \frac{1}{m+n} = \\ &= \sigma - \log \xi (\log x\xi + \gamma) - \frac{1}{2} \log^2(x+1) + O\left(\frac{\log(\xi+1)}{\xi}\right), \end{aligned}$$

где величина σ определена равенством (3.25). Значит,

$$F_2(\xi, x) = \log\xi(\log x\xi + \gamma) + \frac{\log^2(x+1)}{2} + \log(x+1) - \sigma + O\left(\frac{\log(\xi+1)}{\xi}\right),$$

$$F(\xi, x) = \log(x+1)\left(\log\xi x - \frac{\log(x+1)}{2} + \gamma - 1\right) + h(x) + O\left(\frac{\log(\xi+1)}{\xi}\right).$$

По формуле обращения Мёбиуса окончательно находим

$$F^*(\xi, x) = \sum_{d<\xi} \frac{\mu(d)}{d^2} F(\xi/d, x) =$$

$$= \frac{\log(x+1)}{\zeta(2)}\left(\log\xi x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(x+1)}{2} + \gamma - 1\right) + \frac{h(x)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log^2(\xi+1)}{\xi}\right).$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.7. *Пусть* $1 \leqslant U \leqslant R$, $R_1 = R/U$. *Тогда для суммы*

$$\widetilde{T}_2(R, U) = \sum_{n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R} \frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot V(m, n, q)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\widetilde{T}_2(R, U) = \frac{U^2}{\zeta(2)} \int_0^1 dt \int_0^{R_1(t)} \xi \cdot F^*(\xi, x)\, d\xi + O(R^2U^{-1}\log R),$$

где

$$R_1(t) = R_1 \cdot r(\operatorname{arctg} t)/\sqrt{t^2+1}$$

и $F^*(\xi, x)$ *определено равенством* (3.23).

Доказательство. Найдем сначала приближенное значение для суммы

$$\sum_{U<q\leqslant R} \frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot V(m, n, q).$$

Запишем $V(m, n, q)$ в виде интеграла

$$V(m, n, q) = \int_0^q du \int_0^q \left[\sqrt{u^2/q^2+1}(mv+nq) \leqslant R \cdot r(\operatorname{arctg} u/q)\right] dv.$$

Вводя переменные $t = u/q$, $w = mv + nq$ и функцию

$$R(t) = R \cdot r(\operatorname{arctg} t)/\sqrt{t^2+1},$$

величину $V(m, n, q)$ можно переписать в виде

$$V(m, n, q) = \frac{q}{m} \int_0^1 dt \int_0^{R(t)} \left[\frac{w}{m+n} < q \leqslant \frac{w}{n}\right] dw.$$

Далее

$$\sum_{U<q\leqslant R} \frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot V(m, n, q) = \sum_{\delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{\frac{U}{\delta}<q\leqslant\frac{R}{\delta}} \frac{V(m, n, \delta q)}{q}.$$

Найдем внутреннюю сумму:

$$\sum_{\frac{U}{\delta}<q\leqslant\frac{R}{\delta}}\frac{V(m,n,\delta q)}{q}=\frac{\delta}{m}\int_0^1 dt\int_0^{R(t)}\sum_{\frac{U}{\delta}<q\leqslant\frac{R}{\delta}}\left[\frac{w}{m+n}<q\leqslant\frac{w}{n}\right]dw=$$

$$=\frac{\delta}{m}\int_0^1 dt\int_0^{R(t)}\left(\frac{w}{n\delta}-\max\left\{\frac{w}{(m+n)\delta},\frac{U}{\delta}\right\}+O(1)\right)[w\geqslant nU]\,dw=$$

$$=\frac{1}{m}\int_0^1 dt\int_0^{R(t)}\left(\frac{w}{n}-\max\left\{\frac{w}{m+n},U\right\}\right)[w\geqslant nU]\,dw+O\left(\frac{\delta R}{m}\right).$$

Вводя переменную $\xi=w/U$, имеем

$$\sum_{\frac{U}{\delta}<q\leqslant\frac{R}{\delta}}\frac{\varphi(q)}{q^2}\cdot V(m,n,q)=$$

$$=\frac{U^2}{m}\int_0^1 dt\int_0^{R_1(t)}\left(\frac{\xi}{n}-\max\left\{\frac{\xi}{m+n},1\right\}\right)[\xi\geqslant n]\,d\xi+O\left(\frac{\delta R}{m}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{U<q\leqslant R}\frac{\varphi(q)}{q^2}\cdot V(m,n,q)=$$

$$=\frac{U^2}{m\zeta(2)}\int_0^1 dt\int_0^{R_1(t)}\left(\frac{\xi}{n}-\max\left\{\frac{\xi}{m+n},1\right\}\right)[\xi\geqslant n]\,d\xi+O\left(\frac{R}{m}\log R\right)=$$

$$=\frac{U^2}{m\zeta(2)}\int_0^1 dt\int_0^{R_1(t)}\left(\frac{\xi}{n}-\frac{\xi}{m+n}\right)[\xi\geqslant m+n]\,d\xi+$$

$$+\frac{U^2}{m\zeta(2)}\int_0^1 dt\int_0^{R_1(t)}\left(\frac{\xi}{n}-1\right)[n\leqslant\xi\leqslant m+n]\,d\xi+O\left(\frac{R}{m}\log R\right).$$

Суммируя последнее равенство по n и m приходим к утверждению леммы. □

Следствие 3.2. *Пусть $2\leqslant U\leqslant R$, $R_1=R/U$ и*

$$R_1(t)=R_1\cdot r(\operatorname{arctg} t)/\sqrt{t^2+1}. \tag{3.26}$$

Тогда для величины $T_2(R,U)$ справедлива асимптотическая формула

$$T_2(R,U)=2\frac{U^2}{\zeta(2)}\int_0^1 dt\int_0^{R_1(t)}\xi\cdot F^*(\xi,x)\,d\xi+O(R^2U^{-1/4}\log^2 R),$$

где $F^*(\xi,x)$ определено равенством (3.23).

Доказательство вытекает из лемм 3.5 и 3.7.

Непосредственным вычислением проверяется следующее утверждение.

Лемма 3.8. *Пусть* $R_1 > 0$ *и при* $t \in [0,1]$ *функция* $R_1(t)$ *определена равенством* (3.26). *Тогда*

$$\int_0^1 dt \int_0^{R_1(t)} \xi\, d\xi = V_0 \cdot R_1^2,$$
$$\int_0^1 dt \int_0^{R_1(t)} \xi \log \xi\, d\xi = V_0 \cdot R_1^2 \left(\log R_1 - \frac{1}{2}\right) + V_1 \cdot R_1^2,$$

где

$$V_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2(\varphi)\log(r(\varphi)\cos\varphi)\, d\varphi.$$

Следствие 3.3. *Пусть* $1 \leqslant U \leqslant R$, $R_1 = R/U$. *Тогда для величины* $T_2(R,U)$, *равной числу решений системы (3.1) с дополнительным ограничением* $Q' > U$, *справедлива асимптотическая формула*

$$T_2(R,U) = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2 \left(\log(x+1)\log R_1 + C_2(x)\right) + $$
$$+ O(R^2 U^{-1/4}\log^2 R) + O(RU\log^2 R),$$

в которой

$$C_2(x) = \log(x+1)\left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \gamma - \frac{\log(x+1)}{2} - \frac{3}{2} + \frac{V_1}{V_0}\right) + h(x), \quad (3.27)$$

а функция $h(x)$ *определена равенством (3.24).*

Доказательство получается подстановкой результатов лемм 3.6 и 3.8 в следствие 3.2.

3.4. Асимптотическая формула в задаче Арнольда

Доказательство теоремы 5. Из леммы 3.3 и следствия 3.3 вытекает равенство

$$T_x^*(R) = T_1(R,U) + T_2(R,U) = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2 \left(\log(x+1)\log R + C_1(x) + C_2(x)\right) + $$
$$+ O(R^2 U^{-1/2}\log^3 R) + O(R^2 U^{-1/4}\log^2 R) + O(RU\log^2 R).$$

Выбирая $U = R^{4/5}$ и подставляя результат в формулу (3.3), получаем

$$N_x^*(R) = \frac{2V_0}{\zeta^2(2)} R^2 \left(\log(x+1)\log R + C_3(x)\right) + O(R^{9/5}\log^2 R),$$

где

$$C_3(x) = C_1(x) + C_2(x) + \frac{\zeta(2)}{2}\cdot\frac{V_0(x)}{V_0}\cdot[x<1].$$

Наконец, применяя равенство

$$N_x(R) = \sum_{d\leqslant R} N_x^*(R/d),$$

приходим к утверждению теоремы функцией

$$C(x) = \frac{2V_0 \cdot \log(x+1)}{\zeta(2)} \left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + 2\gamma - \frac{\log(x+1)}{2} - \frac{3}{2} + \frac{V_1}{V_0} \right) + \\ + \frac{2V_0}{\zeta(2)} \left(h(x) + \frac{\zeta(2)}{2V_0} \left(f(x) + V_0(x) \cdot [x < 1] \right) \right),$$

где $f(x)$ и $h(x)$ определены равенствами (3.15) и (3.24) соответственно. $\square$

3.5. Результаты для сектора и треугольной области

Первоначально задача о статистиках Гаусса-Кузьмина была поставлена В. И. Арнольдом для сектора $a^2 + b^2 \leqslant R^2$ $(0 < a \leqslant b)$. В этом случае $r(\varphi) \equiv 1$ и константы V_0, V_1 в теореме 5 можно вычислить явно.

Лемма 3.9. *Для области*

$$\Omega_0 = \{(\rho, \varphi) : 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \rho \leqslant 1\} \tag{3.28}$$

справедливы равенства

$$V_0 = \frac{\pi}{8}, \qquad V_1 = \frac{1}{8}(2C - \pi \cdot \log 2),$$

где

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2i} \left[\mathrm{Li}_2(i) - \mathrm{Li}_2(-i) \right]$$

— константа Каталана.

Доказательство. Пусть $X > 0$, $X(t) = X/\sqrt{t^2+1}$.

$$I_1 = \int_0^1 dt \int_0^{X(t)} \xi \, d\xi, \qquad I_2 = \int_0^1 dt \int_0^{X(t)} \xi \log \xi \, d\xi,$$

Тогда для доказательства леммы достаточно проверить равенства

$$I_1 = \frac{\pi}{8} X^2, \qquad I_2 = \frac{\pi}{8} X^2 \left(\log \frac{X}{2} + 2\frac{C}{\pi} - \frac{1}{2} \right).$$

В первом интеграле после замены переменной $y = \xi^2$ получаем

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_0^{X^2(t)} dy = \frac{X^2}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{X^2}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_{t=0}^{1} = \frac{\pi}{8} X^2.$$

Для доказательства второго равенства найдём сначала значение интеграла

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\log(t^2+1)}{t^2+1} \, dt.$$

Рассмотрим главную ветвь логарифма $\log z$, для которой $|\arg z| < \pi$. Формула

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} \, dt$$

задаёт главную ветвь дилогарифма, определённую на всей комплексной плоскости за исключением луча $[1;+\infty)$. Для функции, стоящей в интеграле I_0, первообразную можно указать явно:

$$\int \frac{\log(t^2+1)}{t^2+1}\,dt =$$
$$= \frac{\operatorname{arctg} t}{2}\left[\log(t^2+1)+2\log 2\right] + \frac{i}{2}\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+it}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-it}{2}\right)\right].$$

Значит,

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\log(t^2+1)}{t^2+1}\,dt = \frac{3\pi}{8}\log 2 + \frac{i}{2}\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+i}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-i}{2}\right)\right].$$

Применяя тождество (см. [**59**])

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -\operatorname{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\log^2(1-z), \qquad z \notin [1;+\infty),$$

при $z = \frac{1\pm i}{2}$, находим

$$\frac{i}{2}\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+i}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-i}{2}\right)\right] = \frac{i}{2}\left[\operatorname{Li}_2(i) - \operatorname{Li}_2(-i)\right] + \frac{\pi}{8}\log 2 =$$
$$= -C + \frac{\pi}{8}\log 2.$$

Следовательно,

$$I_0 = -C + \frac{\pi}{2}\log 2.$$

После замены $y=\xi^2$ во втором интеграле, получим

$$I_2 = \frac{1}{4}\int_0^1 dt \int_0^{X^2(t)} \log y\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(y\log y - y\right)\Big|_{y=0}^{X^2(t)} dt =$$
$$= \frac{X^2}{4}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\left(\log\frac{X^2}{t^2+1} - 1\right)dt = \frac{\pi}{16}X^2(2\log X - 1) - \frac{X^2}{4}I_0.$$

Подставляя в последнюю формулу значение интеграла I_0, приходим к нужному равенству. □

Следствие 3.4. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда для сектора (3.28) равномерно по $x \in [0,1]$*

$$N_x(R) = \frac{3}{2\pi}\log(x+1)R^2\log R + C(x) + O(R^{2-\frac{1}{5}}\log^3 R),$$

где

$$C(x) = \frac{3\log(x+1)}{2\pi}\left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + 2\gamma - \frac{\log(x+1)}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2C}{\pi} - \log 2\right) +$$
$$+\frac{3}{2\pi}\left(h(x) + \frac{2\zeta(2)}{\pi}\left(f(x) + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\cdot[x<1]\right)\right),$$

а функции $f(x)$ и $h(x)$ определены равенствами (3.15) и (3.24).

Замечание 3.1. Наиболее просто выглядит результат в случае треугольной области

$$\Omega_0 = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}.$$

Аналогично лемме 2.10 доказывается асимптотическая формула

$$\frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{d \leqslant R} \sum_{c \leqslant d} s^{(x)}(c/d) = \frac{2}{\zeta(2)} \left(\log(1+x) \log R + C(x)\right) + O(R^{-1} \log^4 R), \tag{3.29}$$

где

$$C(x) = \log(1+x) \left(2\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(1+x)}{2} + \log x - \frac{3}{2}\right) +$$
$$+ h_1(x) + h_2(x) - \frac{x\zeta(2)}{2(x+1)} + \frac{x\zeta(2)}{2}[x<1],$$

а $h_1(x)$ и $h_2(x) = h(x)$ — функции из теоремы 6 (см. стр. 17).

3.6. Уточнение теоремы Портера

Лемма 3.10. *При любом натуральном $b \geqslant 4$ суммы*

$$D_k = \sum_{a|b} \frac{\sigma_0^k(a)}{a} \qquad (k \geqslant 0)$$

удовлетворяют оценке

$$D_k \ll (\log\log b)^{2^k}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Из соотношений

$$\sigma_1(n) = n \cdot \sigma_{-1}(n), \qquad \sigma_1(n) \ll n \log\log n$$

(см., например, [**46**, теорема 323]) следует, что утверждение леммы справедливо для суммы $D_0 = \sigma_{-1}(b)$. Если предположить, что для некоторого $k \geqslant 0$ оценка (3.30) выполняется, то для $k+1$, соответственно, получаем

$$D_{k+1} = \sum_{a|b} \frac{\sigma_0^k(a)}{a} \sum_{t|a} 1 = \sum_{t|b} \sum_{a_1|b/t} \frac{\sigma_0^k(ta_1)}{ta_1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{t|b} \frac{\sigma_0^k(t)}{t} \sum_{a_1|b/t} \frac{\sigma_0^k(a_1)}{a_1} \leqslant D_k^2 \ll (\log\log b)^{2^{k+1}}$$

□

Доказательство теоремы 6. Будем предполагать, что $\varepsilon_0 < 1/6$. Обозначим через $T_x(b)$ число решений уравнения

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = b \tag{3.31}$$

относительно неизвестных

$$1 \leqslant m_1 \leqslant n_1, \qquad 1 \leqslant m_2 \leqslant n_2 x.$$

Через $T_x^*(b)$ обозначим число решений уравнения (3.31), в котором

$$1 \leqslant m_1 \leqslant n_1, \qquad (m_1, n_1) = 1, \qquad 1 \leqslant m_2 \leqslant n_2 x.$$

Для суммы

$$\Psi_x(b) = \sum_{a=1}^{b} s^{(x)}(a/b)$$

справедливо равенство (см. доказательство леммы 3.1)

$$\Psi_x(b) = 2T_x^*(b) + b\left(x \cdot [x < 1] - \frac{x}{x+1}\right) + O(1).$$

Величины $\Psi_x(b)$ и $T_x(b)$ связаны с $\Psi_x^*(b)$ и $T_x^*(b)$ формулой обращения Мебиуса

$$\Psi_x^*(b) = \sum_{d|b} \mu(d)\, \Psi_x(b/d), \quad T_x^*(b) = \sum_{d|b} \mu(d)\, T_x(b/d).$$

Поэтому

$$\Psi_x^*(b) = 2\sum_{d_1 d_2 | b} \mu(d_1)\, \mu(d_2)\, T_x\left(\frac{b}{d_1 d_2}\right) + \varphi(b)\left(x \cdot [x < 1] - \frac{x}{x+1}\right) + O(b^{\varepsilon_0}). \tag{3.32}$$

Для вычисления $T_x(b)$ введем параметр $U = (b \log b)^{1/2}$ и разобьем все решения уравнения (3.31) на две группы. К первой отнесем те, для которых $n_1 < U$, а ко второй — все остальные. Соответственно $T_x(b)$ представится в виде

$$T_x(b) = T_1(b, U) + T_2(b, U). \tag{3.33}$$

Найдем сначала асимптотическую формулу для $T_1(b, U)$. Заметим, что при фиксированном n_1 переменные m_1 и m_2 удовлетворяют сравнению

$$m_1 m_2 \equiv b \pmod{n_1} \tag{3.34}$$

Для известных n_1, m_1 и m_2 значение n_2 уже находится однозначно:

$$n_2 = \frac{b - m_1 m_2}{n_1}.$$

Ограничение $m_2 \leqslant n_2 x$ равносильно неравенству

$$m_2 \leqslant \frac{bx}{n_1 + m_1 x} = f_{n_1}(m_1). \tag{3.35}$$

Таким образом, задача сводится к подсчету числа решений сравнения (3.34), в котором переменные удовлетворяют ограничениям

$$0 < m_1 \leqslant n_1, \qquad m_2 \leqslant f_{n_1}(m_1).$$

Применим теорему 8 с $P_1 = 0$, $P_2 = n_1$, $f = f_{n_1}$ и упрощенной оценкой остаточного члена из замечания 5.4. С учетом того, что

$$f''_{n_1}(m_1) \asymp \frac{b}{n_1^3}$$

находим

$$T[f_{n_1}] = S[f_{n_1}] - \frac{n_1}{2} \cdot \delta_{n_1}(b) + R[f_{n_1}].$$

Отсюда

$$T_1(b,U) = \sum_{n_1<U} T[f_{n_1}] = S_1(b,U) + R_1(b,U) + O_{\varepsilon_0}(b^{1/2+\varepsilon_0}), \tag{3.36}$$

где ε_0 — любое положительное,

$$S_1(b,U) = \sum_{n_1<U} S[f_{n_1}] = \sum_{n_1<U} \frac{1}{n_1} \sum_{m_1 \leqslant n_1} \mu_{n_1,b}(m_1) f_{n_1}(m_1), \tag{3.37}$$

$$R_1(b,U) = \sum_{n_1<U} R[f_{n_1}] \ll_{\varepsilon_0} b^{1/3} \sum_{n_1<U} \sigma_0^{2/3}(n_1)\sigma_0^2(a_1) + \tag{3.38}$$

$$+ b^{\varepsilon_0} \sum_{n_1<U} \left(n_1^{3/2} a_1^{1/2} b^{-1/2} + n_1^{1/2} + a_1 \right),$$

и $a_1 = (n_1, b)$. Применяя оценку $\sigma_0(xy) \leqslant \sigma_0(x)\,\sigma_0(y)$ и неравенство Гёльдера, находим

$$\sum_{n_1<U} \sigma_0^{2/3}(n_1)\,\sigma_0^2(a_1) \leqslant \sum_{a_1|b} \sigma_0^2(a_1) \sum_{n<U/a_1} \sigma_0^{2/3}(na_1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{a_1|b} \sigma_0^3(a_1) \left(\sum_{n<U/a_1} \sigma_0(n) \right)^{2/3} (U/a_1)^{1/3} \ll U \cdot \log^{2/3} b \sum_{a_1|b} \frac{\sigma_0^3(a_1)}{a_1}$$

Далее, применяя лемму 3.10, приходим к неравенству

$$b^{1/3} \sum_{n_1<U} \sigma_0^{2/3}(n_1) \cdot \sigma_0^2(a_1) \ll_{\varepsilon} b^{5/6} \cdot \log^{7/6+\varepsilon/2} b$$

Остальные слагаемые, входящие в формулу для $R_1(b,U)$ при $\varepsilon_0 < 1/6$ дают меньший вклад:

$$b^{-1/2+\varepsilon_0} \sum_{n_1<U} n_1^{3/2}\, a_1^{1/2} \ll b^{-1/2+\varepsilon_0} \sum_{a_1|b} a_1^{1/2} \sum_{n<U/a_1} (a_1 n)^{3/2} \ll$$

$$\ll b^{-1/2+\varepsilon_0} \cdot U^{5/2} \sum_{a_1|b} a_1^{-1/2} \ll b^{3/4+2\varepsilon_0},$$

$$b^{\varepsilon_0} \sum_{n_1<U} n_1^{1/2} \ll b^{\varepsilon_0} \cdot U^{3/2} \ll_{\varepsilon_0} b^{3/4+2\varepsilon_0},$$

$$b^{\varepsilon_0} \sum_{n_1<U} a_1 \ll b^{\varepsilon_0} \sum_{a_1|b} a_1 \sum_{n<U/a_1} 1 \leqslant b^{\varepsilon_0} \cdot U \cdot \sigma_{-1}(b) \ll_{\varepsilon_0} b^{1/2+2\varepsilon_0}.$$

Таким образом,

$$T_1(b,U) = S_1(b,U) + O_{\varepsilon}(b^{5/6} \cdot \log^{7/6+\varepsilon} b) \tag{3.39}$$

Для нахождения $S_1(b,U)$ рассмотрим сначала сумму, аналогичную (1.3)

$$\Phi_x(U) = \sum_{n<U} \frac{1}{n} \sum_{m \leqslant n} \frac{x}{n+mx}.$$

Ее можно переписать в виде

$$\Phi_x(U) = \log(1+x)\sum_{n<U}\frac{1}{n} + \sum_{n<U}\frac{1}{n}\left(\sum_{m\leqslant n}\frac{x}{n+mx} - \log(1+x)\right) =$$
$$= \log(1+x)(\log U + \gamma) + h_1(x) + O(U^{-1}),$$

где $h_1(x)$ определено равенством (0.17). Отсюда для суммы

$$\Phi_x^*(U) = \sum_{n\leqslant U}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}{}^{*}\frac{x}{n+mx}$$

по формуле обращения Мёбиуса

$$\Phi_x^*(U) = \sum_{d\leqslant U}\frac{\mu(d)}{d^2}\cdot\Phi_x\left(\frac{U}{d}\right)$$

получаем следующую асимптотическую формулу

$$\Phi_x^*(U) = \frac{\log(1+x)}{\zeta(2)}\left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \frac{h_1(x)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log(U+1)}{U}\right). \quad (3.40)$$

Подставляя

$$\mu_{n_1,b}(m_1) = d_1\cdot\delta_{d_1}(b),$$

где $d_1 = (m_1, n_1)$, в равенство (3.37), после замен $m_1 = d_1 m$, $n_1 = d_1 n$, получаем

$$S_1(b,U) = \sum_{n_1<U}\frac{1}{n_1}\sum_{m_1\leqslant n_1}\frac{bx}{n_1+m_1x}\,d_1\cdot\delta_{d_1}(b) =$$
$$= \sum_{d_1|b}\frac{b}{d_1}\sum_{n<U/d_1}{}^{*}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\frac{x}{n+mx} = \sum_{d|b}\frac{b}{d}\,\Phi_x^*\left(\frac{U}{d}\right).$$

Пользуясь (3.40), находим

$$S_1(b,U) = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|b}\frac{b}{d}\left(\log(1+x)\left(\log\frac{U}{d} + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + h_1(x)\right) + O_{\varepsilon_0}\left(b^{1/2+\varepsilon_0}\right) \quad (3.41)$$

Подставляя (3.41) в (3.39), приходим к асимптотической формуле для $T_1(b,U)$:

$$T_1(b,U) = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|b}\frac{b}{d}\left(\log(1+x)\left(\log\frac{U}{d} + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + h_1(x)\right) + \quad (3.42)$$
$$+ O_\varepsilon\left(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b\right).$$

Для нахождения $T_2(b,U)$ аналогично заметим, что при фиксированном n_2 переменные m_1 и m_2 удовлетворяют сравнению

$$m_1 m_2 \equiv b \pmod{n_2}. \quad (3.43)$$

Для известных n_2, m_1 и m_2 значение n_1 определяется однозначно:

$$n_1 = \frac{b - m_1 m_2}{n_2}.$$

Ограничение $\max\{m_1, U\} \leqslant n_1$ равносильно неравенству

$$m_1 \leqslant \min\left\{\frac{b}{m_2 + n_2},\ \frac{b - Un_2}{m_2}\right\} = g_{n_2}(m_2)$$

Разобьем интервал $I = (0, n_2]$, внутри которого меняется переменная m_2, на более короткие интервалы точками $1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^k$ $(k = [\log_2 n_2])$ и добавим к разбиению точку $m_0 = \frac{b}{U} - n_2$, в которой функция g_{n_2} может быть недифференцируема:

$$I = \bigsqcup_{j=1}^{k'} I_j \qquad (k' = k + 2).$$

Будем предполагать, что

$$g_{n_2}(m_2) = \begin{cases} \dfrac{b}{m_2 + n_2}, & \text{если}\ \ m_2 \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{k''} I_j; \\ \dfrac{b - Un_2}{m_2}, & \text{если}\ \ m_2 \in \bigsqcup\limits_{j=k''+1}^{k'} I_j, \end{cases}$$

где $0 \leqslant k'' \leqslant k'$. На каждом из интервалов I_j к функции g_{n_2} применим теорему 8. Тогда для всего интервала I получим

$$T[g_{n_2}] = S[g_{n_2}] + R''[g_{n_2}] + R'[g_{n_2}] + O_{\varepsilon_0}\left(b^{1+\varepsilon_0} U^{-1}\right),$$

где

$$S[g_{n_2}] = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant m_2 \leqslant n_2} \mu_{n_2,b}(m_2)\, g_{n_2}(m_2),$$

$$R''[g_{n_2}] = \sum_{j=1}^{k''} R^{(j)}[g_{n_2}], \qquad R'[g_{n_2}] = \sum_{j=k''+1}^{k'} R^{(j)}[g_{n_2}],$$

и $R^{(j)}[g_{n_2}]$ — остаток, который получается в теореме 8 на интервале I_j.

Для $j = 1, \ldots, k''$ на интервале I_j

$$g''_{n_2}(m_2) \asymp \frac{b}{n_2^3}.$$

Поэтому сумма остатков $R''[g_{n_2}]$ оценивается аналогично сумме (3.38) (с заменой U на b/U):

$$\sum_{n_2 \leqslant b/U} R''[g_{n_2}] \ll_\varepsilon b^{5/6} \cdot \log^{7/6+\varepsilon} b. \tag{3.44}$$

Если же $j = k'' + 1, \ldots, k'$, то на промежутке I_j

$$g''_{n_2}(m_2) \asymp \frac{b - Un_2}{m_2^3} \asymp \frac{b - Un_2}{2^{3j}}.$$

Значит, согласно оценке (5.36),

$$R^{(j)}[g_{n_2}] \ll_{\varepsilon_0} \sigma_0^{2/3}(n_2)\,\sigma_0^2(a_2)b^{1/3} + b^{\varepsilon_0/2}\left(2^{3j/2}\,a_2^{1/2}\,b^{-1/2} + n_2^{1/2} + a_2\right),$$

где $a_2 = (n_2, b)$. Следовательно,

$$R'[g_{n_2}] = \sum_{j=k''+1}^{k'} R^{(j)}[g_{n_2}] \ll_{\varepsilon_0} \sigma_0^{2/3}(n_2)\sigma_0^2(a_2)\log b \cdot b^{1/3} + \\ + b^{\varepsilon_0}\left(n_2^{3/2}\,a_2^{1/2}(b - Un_2)^{-1/2} + n_2^{1/2} + a_2\right).$$

Отсюда, как и в случае остатка $R[f_{n_1}]$, приходим к оценке

$$\sum_{n_2 \leqslant b/U-2} R'[g_{n_2}] \ll_{\varepsilon} b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b. \tag{3.45}$$

Если значение переменной $n_2 > b/U - 2$ фиксировано, то n_1 может принимать не более $b^{1/2+\varepsilon_0/2}$ значений, а при фиксированных n_1, n_2 существует не более $\sigma_0(b - n_1n_2) \ll b^{\varepsilon_0/2}$ значений m_1 и m_2. Поэтому, с учетом оценок (3.44), (3.45), получаем

$$T_2(b,U) = \sum_{n_2 \leqslant b/U} T[g_{n_2}] = \sum_{n_2 \leqslant b/U-2} T[g_{n_2}] + O_{\varepsilon_0}(b^{1/2+\varepsilon_0}) = \\ = S_2(b,U) + O_{\varepsilon}(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b),$$

где

$$S_2(b,U) = \sum_{n_2 \leqslant b/U} \frac{1}{n_2} \sum_{m_2 \leqslant n_2} \mu_{n_2,b}(m_2)\, g_{n_2}(m_2).$$

Как и в случае суммы $S_1(b,U)$ после подстановки

$$\mu_{n_2,b}(m_2) = d_2 \cdot \delta_{d_2}(b), \qquad d_2 = (m_2, n_2),$$

сумма $S_2(b,U)$ перепишется в виде

$$S_2(b,U) = \sum_{d|b} \frac{b}{d} \sum_{n \leqslant b/(dU)} \frac{1}{n} {\sum_{m \leqslant nx}}^{*} \min\left\{\frac{1}{m+n}, \frac{1}{m} - \frac{dUn}{bm}\right\} = \sum_{d|b} \frac{b}{d} F_x^*\left(\frac{b}{dU}\right),$$

где

$$F_x^*(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi} \frac{1}{n} {\sum_{m \leqslant nx}}^{*} \min\left\{\frac{1}{m+n}, \frac{1}{m} - \frac{n}{m\xi}\right\}.$$

Согласно лемме 3.6, для суммы $F_x^*(\xi)$ верна асимптотическая формула

$$F_x^*(\xi) = \frac{\log(x+1)}{\zeta(2)}\log\xi + \frac{H(x)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log^2(\xi+1)}{\xi}\right),$$

в которой

$$H(x) = \log(1+x)\left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(x+1)}{2} + \gamma - 1\right) + h_2(x),$$

и $h_2(x)$ определено равенством (0.18). Поэтому

$$S_2(b,U) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{d|b} \frac{b}{d} \left(\log(x+1) \log \frac{b}{dU} + H(x) \right) + O_{\varepsilon_0}(b^{1/2+\varepsilon_0}),$$

$$T_2(b,U) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{d|b} \frac{b}{d} \left(\log(x+1) \log \frac{b}{dU} + H(x) \right) + O_{\varepsilon}(b^{5/6} \log^{7/6+\varepsilon} b).$$

Подставляя последнее равенство и (3.42) в (3.33) приходим к асимптотической формуле для $T_x(b)$:

$$T_x(b) = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{d|b} \frac{b}{d} \left(\log(x+1) \log \frac{b}{d^2} + C_1(x) \right) + O_{\varepsilon}(b^{5/6} \log^{7/6+\varepsilon} b),$$

где

$$C_1(x) = H(x) + \log(1+x) \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + h_1(x).$$

Подставим полученный результат в (3.32). Тогда, с учетом соотношений (см. [**49**])

$$\sum_{dd_1d_2|b} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d\,d_1d_2} = \frac{\varphi(b)}{b},$$

$$\sum_{dd_1d_2|b} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d\,d_1d_2} \log(d_1d_2\,d^2) = 0,$$

находим

$$\sum_{d_1d_2|n} \mu(d_1)\,\mu(d_2)\,T_x\left(\frac{b}{d_1d_2}\right) = \frac{\varphi(b)}{\zeta(2)}(\log(x+1)\log b + C_1(x)) + O_{\varepsilon}(b^{5/6} \log^{7/6+\varepsilon} b),$$

$$\Psi_x^*(b) = \frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)} (\log(x+1)\log b + C_P(x)) + O_{\varepsilon}(b^{5/6} \log^{7/6+\varepsilon} b),$$

где $C_P(x)$ определено равенством (0.16). Теорема доказана. □

3.7. О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с выбором минимального по модулю остатка

Как отмечалось во введении, алгоритм Евклида с выбором наименьшего по модулю остатка

$$a = bq + r, \quad q = \left[\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\right], \quad -\frac{q}{2} \leqslant r < \frac{q}{2},$$

приводит к разложению в дробь

$$\frac{a}{b} = t_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{t_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{t_2 + \ddots + \cfrac{\varepsilon_l}{t_l}}}, \tag{3.46}$$

длины $l = l(a/b)$, где t_0 — целое, $t_1, \ldots, t_l$ — натуральные,

$$\varepsilon_k = \pm 1, \quad t_k \geqslant 2 \quad (k = 1, \ldots, l), \quad t_k + \varepsilon_{k+1} \geqslant 2 \quad (k = 1, \ldots, l-1).$$

Существует простой алгоритм (см. [**64**, § 39]), который превращает обычную цепную дробь в дробь вида (3.46). К первому неполному частному t_j $(j \geqslant 1)$, равному единице, нужно применить тождество

$$t_{j-1} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t_{j+1} + \ldots}} = t_{j-1} + 1 - \cfrac{1}{t_{j+1} + 1 + \ldots}.$$

То есть первая единица в разложении вычеркивается, соседние неполные частные увеличиваются на единицу, и между ними ставится знак "минус". Затем находится следующая единица и процедура повторяется. Если в разложении имеется цепочка из подряд идущих единиц, то преобразование применяется к единицам, стоящим на нечетных местах в этой цепочке. Например,

$$[0; 2, 1, 3, 1, 1, 6] = \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{2 + 1/6}}}.$$

Лемма 3.11. *Для любого рационального числа a/b*

$$l(a/b) = s^{(\varphi-1)}(a/b),$$

где $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение.

Доказательство. Пусть $a/b = [t_0; t_1, \ldots, t_s]$. Обозначим через $s'(a/b)$ количество остатков $r_j = [0; t_j, \ldots, t_s]$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$, разложение которых начинается с нечетного числа единиц. Соответственно $s''(a/b)$ будет обозначать количество остатков, начинающихся с четного (возможно нулевого) числа единиц. Очевидно, выполняется равенство $s(a/b) = s'(a/b) + s''(a/b)$.

Согласно приведенному выше алгоритму, при переводе обычной цепной дроби в дробь вида (3.46) каждый отрезок из k подряд идущих единиц заменяется на $[k/2]$ неполных частных. Поэтому исчезает в точности $s'(a/b)$ неполных частных:

$$l(a/b) = s(a/b) - s'(a/b) = s''(a/b).$$

Но цепная дробь для числа $r \in (0,1)$ начинается с четного числа единиц тогда и только тогда, когда $r \in (0, \varphi - 1)$. Следовательно, $s''(a/b) = s^{(\varphi-1)}(a/b)$. $\square$

Следствие 3.5. *При любом $R \geqslant 2$*

$$\frac{2}{R(R+1)} \sum_{b \leqslant R} \sum_{a \leqslant b} l(a/b) = \frac{2 \log \varphi}{\zeta(2)} \cdot \log R + C_l + O(R^{-1} \log^4 R),$$

Доказательство. Подставляя равенство из леммы 3.11 в (3.29), получаем утверждение следствия с константой

$$C_l = \frac{2C(\varphi)}{\zeta(2)} = \frac{2\log\varphi}{\zeta(2)}\left(-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{3}{2}\log\varphi - \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{\zeta(2)}(h_1(\varphi) + h_2(\varphi)) + \frac{1}{\varphi^3},$$

где функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ заданы рядами (0.17)–(0.18) (см. формулировку теоремы 6 во введении). □

Следствие 3.6. *При любом* $b \geqslant 2$

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} l(a/b) = \frac{2\log\varphi}{\zeta(2)} \cdot \log b + C_l' + O_\varepsilon(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b).$$

Доказательство. Подставляя равенство из леммы 3.11 в теорему 6 получаем утверждение следствия с константой

$$C_l' = \frac{2C_P(\varphi)}{\zeta(2)} = C_l + \frac{2\log\varphi}{\zeta(2)}\left(\frac{1}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right).$$

□

ГЛАВА 4

Статистики траекторий в задаче Синая

Исследование бильярда Синая, как и результаты других глав, фактически базируется на свойствах цепных дробей. Хорошо известно, что подходящие дроби $P_n(\alpha)/Q_n(\alpha)$ $(n \geqslant 0)$ к числу α совпадают с наилучшими приближениями второго рода числа α, то есть из условий

$$\frac{x}{y} \neq \frac{P_n(\alpha)}{Q_n(\alpha)}, \quad 0 < y \leqslant Q_n(\alpha)$$

необходимо следует, что

$$|\alpha y - x| > |\alpha Q_n(\alpha) - P_n(\alpha)|$$

(тривиальными исключениями являются полуцелые α, см. [**32**, § 6]). С геометрической точки зрения это означает, что если $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ — центр первой h-окрестности целочисленной точки, которую пересекает луч

$$\{(t\cos\varphi, t\sin\varphi) : t \geqslant 0\}, \tag{4.1}$$

то для некоторого $n > 0$ выполняется равенство $(p, q) = (P_n(\alpha), Q_n(\alpha))$. В этом случае теория цепных дробей позволяет решить однородную задачу Синая о статистических свойствах траекторий, начинающихся в начале координат (см.[**12**]).

Рассмотрим теперь луч

$$\left\{(-hv\sin\varphi + t\cos\varphi, hv\cos\varphi + t\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, \infty)\right\}, \tag{4.2}$$

стартующий из h-окрестности начала координат с выходным прицельным параметром $h \cdot v$ $(|v| < 1)$. Напомним, что через $(m(\varphi), n(\varphi))$ обозначался центр первой h-окрестности (ненулевой) точки решетки $\mathbb{Z}^2$, которую пересекает луч (4.2). Оказывается, что (см. замечание 4.4) число $n(\varphi)/m(\varphi)$ будет либо подходящей, либо промежуточной дробью для $\alpha = \operatorname{tg}\varphi$. Такое наблюдение лежит в основе решения задачи Синая в неоднородном $(v \neq 0)$ случае.

Настоящая глава основана на работе [**12**].

4.1. Свойства целочисленных пар $(m(\varphi), n(\varphi))$

Как уже отмечалось во введении, параметрически заданная прямая

$$\left\{(-hv\sin\varphi + t\cos\varphi, hv\cos\varphi + t\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : t \in (-\infty, \infty)\right\} \tag{4.3}$$

на плоскости при $t = 0$ проходит через ближайшую к началу координат $O = (0, 0)$ точку $O' = (-hv\sin\varphi, hv\cos\varphi)$ (проекция O на прямую (4.3)).

Еще одно параметрическое представление

$$\left\{(x - t'\sin\varphi,\ y + t'\cos\varphi) \in \mathbb{R}^2 : t' \in (-\infty, \infty)\right\} \tag{4.4}$$

определяет перпендикулярную к (0.20) прямую, проходящую при $t' = 0$ через точку (x, y). Они пересекаются в некоторой точке при

$$\begin{aligned} t &= R(x, y) = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ t' &= U(x, y) = x\sin\varphi - y\cos\varphi + hv. \end{aligned}$$

Среди всех целочисленных точек (m, n) на плоскости с условиями

$$R(m, n) > 0 \quad \text{и} \quad |U(m, n)| < h$$

для точки $(m(\varphi), n(\varphi))$ величина $R(m, n)$ принимает минимальное значение. Отсюда немедленно следует единственность пары $(m(\varphi), n(\varphi))$.

Нормированный *свободный пробег* $r = r(\varphi)$ и нормированный *входной прицельный параметр* задаются равенствами

$$r(\varphi) = h \cdot R\left(m(\varphi), n(\varphi)\right), \quad u(\varphi) = h^{-1} \cdot U\left(m(\varphi), n(\varphi)\right).$$

При этом

$$0 < r(\varphi) < \frac{1}{1 - |v|} \quad \text{и} \quad -1 < u(\varphi) < 1.$$

Число v называется нормированным *выходным прицельным параметром.*

В соответствии с определениями

$$\begin{aligned} h^{-1} \cdot r\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\varphi - m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\varphi, \\ h \cdot u\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\varphi + m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\varphi + h \cdot v. \end{aligned}$$

Так как при повороте плоскости на угол $\pi/2$ вокруг начала координат множество целых точек переходит в себя и ориентация сохраняется, то выходной прицельный параметр v не меняется и

$$r\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = r(\varphi), \quad u\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = u(\varphi).$$

Поэтому

$$m\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -n(\varphi), \quad n\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = m(\varphi).$$

Далее,

$$\begin{aligned} h^{-1} \cdot r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= n\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \cos\varphi + m\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \sin\varphi, \\ h \cdot u\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= -n\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \sin\varphi + m\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \cos\varphi + h \cdot v. \end{aligned}$$

Речь идет о зеркальной симметрии относительно прямой $y = x$. И в этом случае множество целых точек на плоскости переходит в себя. Однако, ориентация меняется на противоположную. Поэтому выходной прицельный параметр v переходит в $-v$ и

$$r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=r(\varphi), \quad u\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=-u(\varphi),$$
$$m\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=n(\varphi), \quad n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=m(\varphi).$$

Подытоживая вышесказанное и принимая во внимание равенство

$$\rho(r,u,v)=\rho(r,-u,-v),$$

мы можем заключить, что теорему 7 достаточно доказать для случая, когда $\varphi_0 \in (0, \pi/4)$.

На самом деле удобнее работать с другой параметризацией угла наклона траектории: $\alpha=\alpha(\varphi)=\operatorname{tg}\varphi \in (0,1)$. При этом

$$\sin\varphi=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$
$$R(x,y)=\frac{x+\alpha y}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad U(x,y)=\frac{\alpha x-y}{\sqrt{1+\alpha^2}}+h\cdot v,$$
$$r(\varphi)=h\frac{m(\varphi)+\alpha n(\varphi)}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad u(\varphi)=\frac{\alpha m(\varphi)-n(\varphi)}{h\sqrt{1+\alpha^2}}+v.$$

Лемма 4.1. *Числа $m(\varphi)$ и $n(\varphi)$ взаимно просты.*

Доказательство. Предположим, что

$$(m(\varphi), n(\varphi))=q>1.$$

Положив $m=m(\varphi)/q$ и $n=n(\varphi)/q$, получим

$$|U(m,n)|=\frac{\alpha m-n}{\sqrt{1+\alpha^2}}+hv=$$
$$=\frac{1}{q}\,\frac{\alpha m(\varphi)-n(\varphi)}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{1}{q}hv+\frac{q-1}{q}hv=$$
$$=\frac{1}{q}U(m(\varphi),n(\varphi))+\frac{q-1}{q}hv<\frac{1}{q}h+\frac{q-1}{q}h=h.$$

При этом

$$R(m,n)=\frac{1}{q}\cdot R(m(\varphi),n(\varphi))<R(m(\varphi),n(\varphi)),$$

что противоречит определению пары $(m(\varphi), n(\varphi))$. Значит, наше предположение неверно и $q=1$. □

Заметим, что равенство

$$(m(\varphi),n(\varphi))=(0,1) \quad \text{или} \quad (1,1)$$

выполняется только для $\alpha \in (0,\theta_0)$ в первом случае и $\alpha \in (\theta_1, 1)$ во втором, где θ_0 и θ_1 — корни уравнений (относительно переменной α)

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}+hv=h \quad \text{и} \quad \frac{\alpha-1}{\sqrt{1+\alpha^2}}+hv=-h$$

из интервала $(0,1)$. При этом

$$0 < \theta_0 < \sqrt{8}h < 1 - \sqrt{8}h < \theta_1 < 1 \tag{4.5}$$

Кроме того, так как

$$m(\varphi)\sin\varphi - n(\varphi)\cos\varphi + hv \geqslant -h,$$

то

$$n(\varphi) \leqslant m(\varphi)\alpha + (1+v)h\sqrt{1+\alpha^2} \leqslant m(\varphi) + \frac{1}{2}.$$

Поэтому $n(\varphi) \leqslant m(\varphi)$.

Положим

$$\mathcal{N} = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : 0 < n < m, (m,n) = 1\}.$$

Подытожим вышесказанное в следующем виде.

Замечание 4.1. Для любого числа $\alpha \in [\theta_0, \theta_1]$ пара $(m(\varphi), n(\varphi))$ лежит в множестве $\mathcal{N}$.

Пусть $(m,n) \in \mathcal{N}$. Определим натуральные m_+ и m_- из условий:

$$nm_\pm \equiv \pm 1 \pmod m, \qquad 0 < m_\pm < m. \tag{4.6}$$

Так как n и m взаимно простые и $m \geqslant 2$, то натуральные m_+ и m_- определяются единственным способом из сравнений с $+1$ и -1. Положим также

$$n_- = \frac{nm_- + 1}{m}, \qquad n_+ = \frac{nm_+ - 1}{m}. \tag{4.7}$$

Из определения немедленно вытекает следующее утверждение.

Замечание 4.2. Если задана пара (m, m_+), то n, для которого $(m,n) \in \mathcal{N}$, однозначно определяется из условий: $0 < n < m$ и $nm_+ \equiv 1 (\mathrm{mod} m)$. А по (m,n) однозначно восстанавливается и n_-. То же самое верно и в отношении пары (m, m_-).

Лемма 4.2. *Для целых чисел m_+, m_-, n_+, n_-, однозначно определяемых парой $(m,n) \in \mathcal{N}$, выполняются следующие свойства:*

1) $0 \leqslant n_+ < m_+ < m$, $1 \leqslant n_- \leqslant m_- < m$;
2) $(m_+, n_+) + (m_-, n_-) = (m, n)$;
3) $nm_+ - n_+m = n_-m - nm_- = n_-m_+ - n_+m_- = 1$.

Доказательство. Пункт 1) непосредственно следует из равенств (4.7). Складывая сравнения из (4.6), получим еще одно

$$(m_+ + m_-)\, n \equiv 0 \pmod m.$$

Поскольку n взаимно просто с m, то $m_+ + m_- = km$ при некотором натуральном k. Но $m_+ + m_- < 2m$, и поэтому $k = 1$. Складывая равенства из (4.7), получим и второе соотношение: $n_+ + n_- = n$. Тем самым пункт 2) доказан. И, наконец, в соответствии с (4.7),

$$1 = \det\begin{pmatrix} n & n_+ \\ m & m_+ \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} n_- & n \\ m_- & m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} n_- & n_+ + n_- \\ m_- & m_+ + m_- \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} n_- & n_+ \\ m_- & m_+ \end{pmatrix}.$$

А это и утверждается в пункте 3). Лемма 4.2 полностью доказана. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть* $\alpha = \alpha(\varphi) \in [\theta_0, \theta_1]$. *Пара* $(m, n) \in \mathcal{N}$ *совпадает с* $(m(\varphi), n(\varphi))$ *тогда и только тогда, когда*

$$U(m_+, n_+) \geqslant h, \quad U(m_-, n_-) \leqslant -h, \quad |U(m, n)| < h.$$

Доказательство. Предположим, что числа

$$U(m_+(\varphi), n_+(\varphi)) \quad \text{и} \quad U(m_-(\varphi), n_-(\varphi)) \tag{4.8}$$

имеют одинаковые знаки. Тогда в соответствии с пунктом 2) леммы 4.2

$$|U(m(\varphi), n(\varphi))| =$$
$$= |U(m_+(\varphi), n_+(\varphi)) + U(m_-(\varphi), n_-(\varphi)) - vh| > 2h - h = h,$$

что противоречит определению пары $(m(\varphi), n(\varphi))$. Следовательно, наше предположение неверно, и интересующие нас числа имеют разные знаки.

Теперь предположим, что

$$U(m_+(\varphi), n_+(\varphi)) = \frac{\alpha m_+(\varphi) - n_+(\varphi)}{\sqrt{1+\alpha^2}} + vh \leqslant -h.$$

Тогда

$$\alpha m_+(\varphi) - n_+(\varphi) \leqslant -\sqrt{1+\alpha^2}(1+v)h < 0.$$

Поскольку у числа $U(m_-(\varphi), n_-(\varphi))$ противоположный знак, то

$$\alpha m_-(\varphi) - n_-(\varphi) \geqslant \sqrt{1+\alpha^2}(1-v)h > 0.$$

В таком случае

$$\frac{n_-(\varphi)}{m_-(\varphi)} < \alpha < \frac{n_+(\varphi)}{m_+(\varphi)}.$$

Но это противоречит равенству

$$n_-(\varphi)m_+(\varphi) - n_+(\varphi)m_-(\varphi) = 1$$

из леммы 4.2, и наше предположение неверно. Кроме того,

$$U(m_\pm(\varphi), n_\pm(\varphi))| \geqslant h$$

по определению пары $(m(\varphi), n(\varphi))$. То есть, первое число из (4.8) положительное, а второе отрицательное. Необходимость условий в лемме 4.3 доказана.

Теперь докажем их достаточность. Предположим, что найдется целочисленная пара (m_1, n_1) с $0 < m_1 < m$, для которой $|U(m_1, n_1)| < h$. Принимая во внимание те же соображения, что и при доказательстве леммы 4.1, мы можем считать, что m_1 и n_1 взаимно просты. Тогда найдутся два взаимно простых целых a и b, для которых (в соответствии с пунктом 3) леммы 4.2 определитель системы, из которой находятся a и b, равен 1)

$$am_+ + bm_- = m_1, \quad an_+ + bn_- = n_1.$$

Если одно из чисел a и b равно нулю, то второе есть единица, и для получающихся при этом пар (m_+, n_+) и (m_-, n_-) предполагаемое неравенство неверно по условию. Поэтому a и b отличны от нуля. Предположим, что $ab < 0$. В таком случае

$$|U(m,n)| = |aU(m_+,n_+) + bU(m_-,n_-) + (1-a-b)vh| \geqslant \\ \geqslant |a|h + |b|h - |a+b-1|h \geqslant h.$$

Мы пришли к противоречию, а поэтому у a и b одинаковые (положительные) знаки. Но тогда

$$m_1 = am_+ + bm_- \geqslant m_+ + m_- = m,$$

чего опять не может быть. Следовательно, для всех натуральных $m_1 < m$ и любого целого n_1 выполняется неравенство $|U(m_1,n_1)| \geqslant h$. Лемма 4.3 полностью доказана. $\square$

Замечание 4.3. В терминах раздела 1.1 свойства пар (m,n), (m_+,n_+), (m_-,n_-). означают, что

$$\begin{pmatrix} n_+ & m_+ \\ n & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_-, \quad \begin{pmatrix} n_- & m_- \\ n & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_+.$$

При этом (m_+,n_+), (m_-,n_-) — в точности те две строки, которые дополняют вторую строку (m,n) до матрицы из множества $\mathcal{M}$ (см. свойство 5° множества $\mathcal{M}$).

Замечание 4.4. Отметим, хотя это не будет использоваться в дальнейшем, что числа $m(\varphi)$ и $n(\varphi)$ непосредственно связаны с разложением числа $\alpha = \operatorname{tg}\varphi$ в цепную дробь.

Пусть $(m_0,n_0) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ — центр первой $2h$-окрестности, которую пересекает луч (4.1). Как известно (см. [**32**, § 6]), n_0/m_0 будет подходящей дробью к числу α. Из леммы 4.3 вытекает, что точка (m_0,n_0) совпадает с одной из точек (m,n), (m_+,n_+) или (m_-,n_-). Из свойств промежуточных дробей (см. [**32**, § 4, 6]) следует, что каждое из трех чисел n/m, n_+/m_+, n_-/m_- будет либо подходящей либо промежуточной дробью для числа α. При этом для некоторого $k \geqslant 0$ и натуральных t_1, t_2, … либо

$$\frac{n}{m} = [0; t_1, \ldots, t_{2k}, 1], \quad \frac{n_+}{m_+} = [0; t_1, \ldots, t_{2k}], \\ \frac{n_-}{m_-} = [0; t_1, \ldots, t_{2k-1}];$$

либо

$$\frac{n}{m} = [0; t_1, \ldots, t_{2k+1}, 1], \quad \frac{n_+}{m_+} = [0; t_1, \ldots, t_{2k}], \\ \frac{n_-}{m_-} = [0; t_1, \ldots, t_{2k+1}].$$

4.2. Вспомогательные преобразования

Так как для $-v < u_- < u_+$

$$\chi_{(u_-,u_+]}(u) = \chi_{(-v,u_+]}(u) - \chi_{(-v,u_-]}(u),$$

а для $u_- < u_+ < -v$

$$\chi_{[u_-,u_+)}(u) = \chi_{[u_-,-v)}(u) - \chi_{[u_+,-v)}(u),$$

то утверждение теоремы достаточно доказать только в случае

$$-1 < u_- \leqslant -v \leqslant u_+ < 1,$$

что и будет предполагаться в дальнейшем.

Пусть $(m, n) \in \mathcal{N}$. В соответствии с леммой 4.3, обозначим через

$$I(m, n) = I(h, v, u_-, u_+; m, n)$$

подмножество отрезка $[\theta_0, \theta_1]$, состоящее из всех чисел α, удовлетворяющих условиям:

$$(1 - v)h\sqrt{1 + \alpha^2} \leqslant \alpha m_+ - n_+, \quad \alpha m_- - n_- \leqslant -(1 + v)h\sqrt{1 + \alpha^2}; \tag{4.9}$$

$$(u_- - v)h\sqrt{1 + \alpha^2} \leqslant \alpha m - n \leqslant (u_+ - v)h\sqrt{1 + \alpha^2}. \tag{4.10}$$

Из (4.10) немедленно следует, что для α из $I(m, n)$

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| \leqslant 2\sqrt{2} \cdot \frac{h}{m}. \tag{4.11}$$

Как отмечалось во введении, по заданному углу φ пара $(m(\varphi), n(\varphi))$ определяется однозначно. Поэтому область интегрирования по α (после замены φ на $\operatorname{arctg} \alpha$) в интеграле, определяющем $\Phi_v(h)$, в соответствии с леммой 4.3 разбивается на непересекающиеся отрезки $I(m, n)$ с $(m, n) \in \mathcal{N}$ и еще два: $[0, \theta_0]$ и $[\theta_1, 1]$. Оценив интегралы по последним двум отрезкам с помощью неравенств из (4.5) и положив $\alpha_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$ получаем

$$\Phi_v(h) = \sum_{(m,n)\in\mathcal{N}} \int_{I(m,n)} \chi_{[0,\alpha_0]}(\alpha) \cdot \chi_{[0,r_0]}\left(h\frac{m + \alpha n}{\sqrt{1 + \alpha^2}}\right) \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} + O(h).$$

Пусть для $R \in [1, \infty)$ и $t \in (0, 1)$

$$\mathcal{N}(R) =\{(m, n) \in \mathcal{N} : \sqrt{m^2 + n^2} \leqslant R\},$$
$$\mathcal{N}_t(R) =\{(m, n) \in \mathcal{N}(R) : n/m \leqslant t\}.$$

Лемма 4.4. *Для $r_0 < (1 - |v|)^{-1}$ и $|v| \leqslant c < 1$*

$$\Phi_v(h) = \sum_{(m,n)\in\mathcal{N}_{\alpha_0}(r_0h^{-1})} |I(m, n)| \cdot \left(1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2\right)^{-1} + O_c\left(h \cdot \log(h^{-1})\right).$$

Доказательство. Поскольку

$$\left(\frac{m + \alpha n}{\sqrt{1 + \alpha^2}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha m - n}{\sqrt{1 + \alpha^2}}\right)^2 = m^2 + n^2,$$

то для $\alpha \in I(m,n)$ (см. (4.10))

$$m^2+n^2-(2h)^2 < \left(\frac{m+\alpha n}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 \leqslant m^2+n^2.$$

Отсюда, ввиду (4.11), следует, что

$$\Phi_v(h) - \sum_{(m,n)\in\mathcal{N}(r_0h^{-1})} \int_{I(m,n)} \chi_{[0,\alpha_0]}(\alpha)\frac{d\alpha}{1+\alpha^2} \ll$$

$$\ll h + \sum_{(m,n)\in\mathcal{N}} [0 \leqslant m^2+n^2-(r_0h^{-1})^2 \leqslant (2h)^2] \int_{I(m,n)} d\alpha \ll$$

$$\ll \sum_{1\leqslant m\leqslant r_0h^{-1}} \sum_{n\geqslant 1} [0 \leqslant n^2+m^2-(r_0h^{-1})^2 \leqslant 1/2]\frac{h}{m} \ll$$

$$\ll h \sum_{1\leqslant m\leqslant r_0h^{-1}} \frac{1}{m} \ll_c h\cdot\log(h^{-1}).$$

Если для некоторого $\alpha \in I(m,n)$

$$\chi_{[0,\alpha_0]}(\alpha) \neq \chi_{[0,\alpha_0]}\left(\frac{n}{m}\right),$$

то из неравенства (4.11) следует, что

$$\left|\alpha_0 - \frac{n}{m}\right| \leqslant 2\sqrt{2}\frac{h}{m}, \quad |\alpha_0 m - n| \leqslant 2\sqrt{2}h < \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\Phi_v(h) - \sum_{(m,n)\in\mathcal{N}_{\alpha_0}(r_0h^{-1})} \int_{I(m,n)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \ll_c$$

$$\ll_c h\cdot\log(h^{-1}) + \sum_{\substack{(m,n)\in\mathcal{N}_{\alpha_0}(r_0h^{-1}) \\ |\alpha_0 m-n|<1/2}} |I(m,n)| \ll$$

$$\ll h\cdot\log(h^{-1}) + \sum_{m\leqslant 1+r_0h^{-1}} \frac{h}{m} \ll_c h\cdot\log(h^{-1}).$$

В соответствии с (4.11), для всех $\alpha \in I(m,n)$

$$(1+\alpha^2)^{-1} - \left(1+\left(\frac{n}{m}\right)^2\right)^{-1} \ll \frac{h}{m}$$

и мы окончательно находим

$$\Phi_v(h) - \sum_{(m,n)\in\mathcal{N}_{\alpha_0}(r_0h^{-1})} |I(m,n)|\cdot\left(1+\left(\frac{n}{m}\right)^2\right)^{-1} \ll_c$$

$$\ll_c h\cdot\log(h^{-1}) + \sum_{1\leqslant m<n\leqslant r_0h^{-1}} \frac{h}{m}\cdot\frac{h}{m} \ll_c h\cdot\log(h^{-1}).$$

Лемма 4.4 полностью доказана. □

Упростим условия, которые определяют интервал $I(m,n)$. Для этого положим $\alpha = \frac{n}{m} + \beta$ и с помощью соотношений пункта 3) из леммы 4.2 преобразуем неравенства (4.9) и (4.10) к виду

$$-\frac{1}{mm_+} + (1-v)\frac{h}{m_+}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2} \leqslant \beta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{mm_-} - (1+v)\frac{h}{m_-}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2},$$
$$(u_- - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2} \leqslant \beta \leqslant (u_+ - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2}.$$

Пусть

$$f_1(\beta) = \beta + \frac{1}{mm_+} - (1-v)\frac{h}{m_+}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2}.$$

Тогда

$$f_1'(\beta) = 1 - \frac{(1-v)h\left(\frac{n}{m}+\beta\right)}{m_+\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2}} \geqslant 1-(1-v)\frac{h}{m_+} \geqslant 1-2h > \frac{1}{2}.$$

Поэтому $f_1(\beta)$ — возрастающая функция и уравнение $f_1(\beta) = 0$ имеет единственный корень, который мы обозначим через $\lambda_-(m,n)$. Точно так же показывается, что функции

$$\begin{aligned} f_2(\beta) =& \beta - \frac{1}{mm_-} + (1+v)\frac{h}{m_-}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2}, \\ f_3(\beta) =& \beta - (u_- - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2}, \\ f_4(\beta) =& \beta - (u_+ - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2} \end{aligned}$$

возрастают и меняют знак на интересующем нас промежутке. По этой причине они принимают нулевое значение в единственных точках $\lambda_+(m,n)$, $\gamma_-(m,n)$, $\gamma_+(m,n)$, соответственно. Следовательно, ограничения на β можно переписать в виде

$$\lambda_-(m,n) \leqslant \beta \leqslant \lambda_+(m,n) \quad \text{и} \quad \gamma_-(m,n) \leqslant \beta \leqslant \gamma_+(m,n).$$

Положим

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}_-(m,n) =& -\frac{1}{mm_+} + (1-v)\frac{h}{m_+}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2},\\
\widetilde{\lambda}_+(m,n) =& \frac{1}{mm_-} - (1+v)\frac{h}{m_-}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2},\\
\widetilde{\gamma}_-(m,n) =& (u_- - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2},\\
\widetilde{\gamma}_+(m,n) =& (u_+ - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Так как

$$0 = f_1(\lambda_-(m,n)) = \lambda_-(m,n) - \widetilde{\lambda}_-(m,n) +$$
$$+(1-v)\frac{h}{m_+}\left(\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\lambda_-(m,n)\right)^2}\right),$$

то по теореме Лагранжа о конечном приращении с помощью неравенства (4.11) для $\frac{n}{m}+\beta \in I(m,n)$ находим, что

$$\lambda_-(m,n) - \widetilde{\lambda}_-(m,n) \ll \frac{h}{m_+}\lambda_-(m,n) \ll \frac{h^2}{mm_+}.$$

Точно так же получаются еще три оценки:

$$\lambda_+(m,n) - \widetilde{\lambda}_+(m,n) \ll \frac{h^2}{mm_-}, \qquad \gamma_\pm(m,n) - \widetilde{\gamma}_\pm(m,n) \ll \frac{h^2}{m^2}.$$

Поэтому

$$|I(m,n)| = |J(m,n)| + O\left(\frac{h^2}{mm_-} + \frac{h^2}{mm_+}\right), \tag{4.12}$$

где $J(m,n)$ — множество, состоящее из всех β, удовлетворяющих условию

$$\max\{\widetilde{\lambda}_-(m,n), \widetilde{\gamma}_-(m,n)\} \leqslant \beta \leqslant \min\{\widetilde{\lambda}_+(m,n), \widetilde{\gamma}_+(m,n)\}.$$

Лемма 4.5. *Пусть*

$$w(m,n) = ((1+v)m_+ + (1-v)m_-)\, h\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}.$$

Тогда отрезок $J(m,n)$ с $(m,n) \in \mathcal{N}$ является непустым в том и только том случае, когда $w(m,n) \leqslant 1$.

Доказательство. Так как $u_- - v \leqslant u_+ - v$, то $\widetilde{\gamma}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\gamma}_+(m,n)$. Следовательно, $J(m,n)$ — непустое множество только для пар $(m,n) \in \mathcal{N}$, для которых одновременно выполняются неравенства

$$\widetilde{\lambda}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\lambda}_+(m,n), \quad \widetilde{\lambda}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\gamma}_+(m,n), \quad \widetilde{\gamma}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\lambda}_+(m,n).$$

С помощью соотношения $m_+ + m_- = m$ перепишем их в виде

$$w(m,n) = ((1+v)m_+ + (1-v)m_-)\, h\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \leqslant 1, \tag{4.13}$$

$$((1-u_+)m_+ + (1-v)m_-)\, h\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \leqslant 1,$$

$$((1+v)m_+ + (1+u_-)m_-)\, h\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \leqslant 1.$$

Поскольку по условию $1-u_+ \leqslant 1+v$ и $1+u_- \leqslant 1-v$, то второе и третье неравенства следуют из первого. □

Легко проверить, что неравенство (4.13) эквивалентно неравенству

$$\widetilde{\lambda}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\gamma}_-(m,n) \quad \text{при} \quad u_- = -v$$

и неравенству

$$\widetilde{\lambda}_+(m,n) \geqslant \widetilde{\gamma}_+(m,n) \quad \text{при} \quad u_+ = -v.$$

Поэтому $J(m,n)$ разбивается точкой

$$\beta_0 = -2v\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}$$

на два отрезка $J_+(m,n)$ и $J_-(m,n)$, которые получаются из $J(m,n)$ при заменах пары (u_-,u_+) на $(-v,u_+)$ и $(u_-,-v)$ соответственно. При этом

$$J_+(m,n) = \{\beta\in\mathbb{R} : \beta_0 \leqslant \beta \leqslant \min\{\lambda_+(m,n),\gamma_+(m,n)\}\},$$
$$J_-(m,n) = \{\beta\in\mathbb{R} : \max\{\lambda_-(m,n),\gamma_-(m,n)\} \leqslant \beta \leqslant \beta_0\},$$
$$|J(m,n)| = |J_+(m,n)| + |J_-(m,n)|.$$

Лемма 4.6. *В условиях леммы 4.4*

$$\Phi_v(h) = \Psi_v^+(h) + \Psi_v^-(h) + O_c\left(h\cdot\log(h^{-1})\right),$$

где

$$\Psi_v^\pm(h) = \sum_{(m,n)\in\mathcal{N}_{\alpha_0}(r_0h^{-1})} |J_\pm(m,n)|\cdot[w(m,n)\leqslant 1]\left(1+\left(\frac{n}{m}\right)^2\right)^{-1}.$$

Доказательство. Применяя леммы 4.4, 4.5 и принимая во внимание асимптотическое равенство (4.12), получим (см. также замечание 4.2)

$$\Phi_v(h) - \Psi_v^+(h) - \Psi_v^-(h) \ll_c$$
$$\ll_c \sum_{(m,n)\in\mathcal{N}(r_0h^{-1})}\left(\frac{h^2}{mm_+} + \frac{h^2}{mm_-}\right) + h\cdot\log(h^{-1}) \ll$$
$$\ll \sum_{0<m'<m\leqslant r_0h^{-1}} \frac{h^2}{m'm} + h\log(h^{-1}) \ll h\cdot\log(h^{-1}),$$

что равносильно утверждению леммы. □

4.3. Применение оценок сумм Клостермана

В соответствии с определениями

$$\frac{|J_+(m,n)|}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} = \frac{2v\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} + \min\{\lambda_+(m,n),\gamma_+(m,n)\}}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} = $$
$$= \frac{h}{m}\, g_+\left(\frac{n}{m}, \frac{m_-}{m}\right),$$

где

$$g_+(x,y) = \frac{2v + \min\{u_+ - v, s_+(x,y)\}}{\sqrt{1+x^2}}$$

с

$$s_+(x,y) = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{mh\sqrt{1+x^2}} - (1+v)\right).$$

При этом

$$w(m,n) \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad s_+\left(\frac{n}{m}, \frac{m_-}{m}\right) \geqslant -2v.$$

Аналогично,

$$\frac{|J_-(m,n)|}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} = \frac{-2v\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} - \max\{\lambda_-(m,n),\gamma_-(m,n)\}}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} = $$
$$= \frac{h}{m}\, g_-\left(\frac{n}{m}, \frac{m_+}{m}\right),$$

где

$$g_-(x,y) = \frac{-2v + \min\{v - u_-, s_-(x,y)\}}{\sqrt{1+x^2}}$$

с

$$s_-(x,y) = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{mh\sqrt{1+x^2}} - (1-v)\right).$$

При этом

$$w(m,n) \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad s_-\left(\frac{n}{m}, \frac{m_+}{m}\right) \geqslant 2v.$$

Заметим также, что условие $\sqrt{m^2+n^2} \leqslant r_0 h^{-1}$ можно переписать в виде

$$\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \leqslant \frac{r_0}{mh}.$$

Пусть

$$\alpha_1 = \min\left\{\alpha_0, \sqrt{r_0^2 (mh)^{-2} - 1}\right\}.$$

Определим на прямоугольнике $[0,\alpha_1]\times[0,1]$ функции $f_\pm$, положив

$$f_\pm(x,y) = \begin{cases} g_\pm(x,y), & \text{если} \quad \mp 2v \leqslant s_\pm(x,y); \\ 0, & \text{если} \quad \mp 2v > s_\pm(x,y). \end{cases}$$

Тогда

$$\Psi_v^{\pm}(h) = h \cdot \sum_{1<m\leqslant r_0 h^{-1}} \frac{W_{\pm}(m)}{m}\,,$$

где

$$W_{\pm}(m) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m' \\ 1\leqslant n'\leqslant m}} \delta_m(nn' \pm 1) \cdot f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}\right)$$

с $m' = [\alpha_1 m]$.

Применяя по второй переменной преобразование Абеля

$$\sum_{0<l\leqslant N} a(l)\, b(l) = a(N) \cdot \sum_{0<k\leqslant N} b(k) - \sum_{0<l<N} (a(l+1) - a(l)) \cdot \sum_{0<k\leqslant l} b(k),$$

получим

$$W_{\pm}(m) = W_{\pm}^{(0)}(m) - W_{\pm}^{(1)}(m),$$

где

$$W_{\pm}^{(0)}(m) = \sum_{1\leqslant n\leqslant m'} f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{m}{m}\right) \cdot \left(\sum_{1\leqslant n'\leqslant m} \delta_m(nn' \pm 1)\right),$$

$$W_{\pm}^{(1)}(m) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m' \\ 1\leqslant k'<m}} \Delta_{0,1} f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot \left(\sum_{1\leqslant n'\leqslant k'} \delta_m(nn' \pm 1)\right).$$

Выполнив еще раз преобразование Абеля в обеих суммах по первой переменной, находим

$$W_{\pm}^{(0)}(m) = W_{\pm}^{(0,0)}(m) - W_{\pm}^{(0,1)}(m), \quad W_{\pm}^{(1)}(m) = W_{\pm}^{(1,0)}(m) - W_{\pm}^{(1,1)}(m),$$

где

$$\begin{aligned}
W_{\pm}^{(0,0)}(m) &= f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{m}{m}\right) \cdot \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m' \\ 1\leqslant n'\leqslant m}} \delta_m(nn' \pm 1), \\
W_{\pm}^{(0,1)}(m) &= \sum_{1\leqslant k<m'} \Delta_{1,0} f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{m}{m}\right) \cdot \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant k \\ 1\leqslant n'\leqslant m}} \delta_m(nn' \pm 1), \\
W_{\pm}^{(1,0)}(m) &= \sum_{1\leqslant k'<m} \Delta_{0,1} f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m' \\ 1\leqslant n'\leqslant k'}} \delta_m(nn' \pm 1), \\
W_{\pm}^{(1,1)}(m) &= \sum_{\substack{1\leqslant k<m' \\ 1\leqslant k'<m}} \Delta_{1,1} f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant k \\ 1\leqslant n'\leqslant k'}} \delta_m(nn' \pm 1).
\end{aligned}$$

Согласно следствию 5.4 для $1 \leqslant k, k' < m$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant k \\ 1\leqslant n'\leqslant k'}} \delta_m(nn' \pm 1) = \frac{\varphi(m)}{m^2} kk' + O_{\varepsilon}\left(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Подставляя его в формулы для вычисления $W_{\pm}^{(i,j)}(m)$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 1)$ получим 8 равенств

$$W_{\pm}^{(i,j)}(m) = \frac{\varphi(m)}{m^2} D_{\pm}^{(i,j)}(m) + O_{\varepsilon}\left(G_{\pm}^{(i,j)}(m) \cdot m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где

$$D_{\pm}^{(0,0)}(m) = f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{m}{m}\right) \cdot m'm,$$

$$D_{\pm}^{(0,1)}(m) = \sum_{1 \leqslant k < m'} \Delta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{m}{m}\right) \cdot km,$$

$$D_{\pm}^{(1,0)}(m) = \sum_{1 \leqslant k' < m} \Delta_{0,1}\, f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot m'k',$$

$$D_{\pm}^{(1,1)}(m) = \sum_{\substack{1 \leqslant k < m' \\ 1 \leqslant k' < m}} \Delta_{1,1} f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot kk',$$

и

$$G_{\pm}^{(0,0)}(m) = 1,$$

$$G_{\pm}^{(0,1)}(m) = \sum_{1 \leqslant k < m'} \Delta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{m}{m}\right),$$

$$G_{\pm}^{(1,0)}(m) = \sum_{1 \leqslant k' < m} \Delta_{0,1}\, f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{k'}{m}\right),$$

$$G_{\pm}^{(1,1)}(m) = \sum_{\substack{1 \leqslant k < m' \\ 1 \leqslant k' < m}} \Delta_{1,1}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right).$$

Легко проверить,что преобразование Абеля по двум переменным, примененное к сумме

$$\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant m' \\ 1 \leqslant n' \leqslant m}} f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}\right) \cdot b(n, n')$$

с $b(n, n') = 1$, приводит к равенству

$$S_{\pm}(m) = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant m' \\ 1 \leqslant n' \leqslant m}} f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}\right) =$$

$$= D_{\pm}^{(0,0)}(m) - D_{\pm}^{(0,1)}(m) - D_{\pm}^{(1,0)}(m) + D_{\pm}^{(1,1)}(m).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

$$W_{\pm}(m) = \frac{\varphi(m)}{m^2} S_{\pm}(m) + O_{\varepsilon}\left(G_{\pm}(m) \cdot m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{4.14}$$

где

$$G_{\pm}(m) = G_{\pm}^{(0,0)}(m) + G_{\pm}^{(0,1)}(m) + G_{\pm}^{(1,0)}(m) + G_{\pm}^{(1,1)}(m).$$

Нам понадобятся два следующих очевидных утверждения.

Замечание 4.5. При фиксированном x обе функции $f_\pm(x, \dots)$ монотонны по второй переменной y.

Замечание 4.6. Для фиксированного y обе функции $f_\pm(\dots, y)$ непрерывны по первой переменной на отрезке $[0, \alpha_1]$. Кроме того, они непрерывно дифференцируемы, за возможным исключением одной точки, и равномерно по (x, y)

$$\Delta_{1,0}\, f_\pm\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right) \ll \frac{1}{m}.$$

Лемма 4.7. *Для любого натурального $m \geqslant 2$, $G_\pm(m) \ll 1$.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что при $0 \leqslant i, j \leqslant 1$

$$G_\pm^{(i,j)}(m) \ll 1.$$

При $i = j = 0$, $G_\pm^{(0,0)}(m) = 1$ и нужное неравенство выполнено. Принимая во внимание замечание 4.5, при $i = 1$ и $j = 0$ находим

$$G_\pm^{(1,0)}(m) = -\sum_{1 \leqslant k' < m} \Delta_{0,1}\, f_\pm\left(\frac{m'}{m}, \frac{k'}{m}\right) = f_\pm\left(\frac{m'}{m}, \frac{1}{m}\right) - f_\pm\left(\frac{m'}{m}, \frac{m}{m}\right) \ll 1.$$

Опираясь на замечание 4.6, при $i = 0$ и $j = 1$ получаем

$$G_\pm^{(0,1)}(m) \ll \sum_{1 \leqslant k < m'} \frac{1}{m} \ll 1.$$

Осталось разобрать самый сложный случай с $i = j = 1$.

Заметим, что на прямоугольнике $[0, m'/m] \times [0, 1]$

$$\frac{\partial^2 g_\pm}{\partial x\, \partial y}(x, y) = \begin{cases} g''_\pm(x, y), & \text{если} \quad s_\pm(x, y) < \pm(u_\pm - v); \\ 0, & \text{если} \quad s_\pm(x, y) > \pm(u_\pm - v), \end{cases}$$

где

$$g''_\pm(x, y) = \frac{x}{mhy^2(1 + x^2)^2}\left(2 - (1 \pm v)mh\sqrt{1 + x^2}\right).$$

Пусть $\alpha_\pm$ — положительные корни уравнений

$$2 - (1 \pm v)mh\sqrt{1 + x^2} = 0$$

относительно x.

Предположим, сначала, что $m\alpha_\pm \geqslant m'$. Для этого случая в рассматриваемом прямоугольнике, за исключением точек кривых

$$s_\pm(x, y) = \pm(u_\pm - v), \tag{4.15}$$

смешанная производная функции $g_\pm$ неотрицательна. Следовательно,

$$\Delta_{1,1}\, f_\pm\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right) \geqslant 0$$

во всех точках

$$\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right) \qquad \text{с} \quad 1 \leqslant k < m' \quad \text{и} \quad 1 \leqslant k' < m,$$

за исключением, быть может, тех, для которых кривые из (4.15) пересекают квадрат

$$\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right] \times \left[\frac{k'}{m}, \frac{k'+1}{m}\right].$$

Количество последних есть $O(m)$ и для них, в соответствии с замечанием 4.6,

$$\left|\Delta_{1,1}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right| \leqslant \left|\Delta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right| + \left|\Delta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'+1}{m}\right)\right| \ll \frac{1}{m}\,.$$

Поэтому

$$G_{\pm}^{(1,1)}(m) = \sum_{\substack{1 \leqslant k < m' \\ 1 \leqslant k' < m}} \Delta_{1,1}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m'-1} \left(\Delta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{m}{m}\right) - \Delta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{1}{m}\right)\right) =$$

$$= f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{m}{m}\right) - f_{\pm}\left(\frac{1}{m}, \frac{m}{m}\right) - f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{1}{m}\right) + f_{\pm}\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) \ll 1.$$

Предположим теперь, что $m\alpha_{\pm} < m'$. Обозначим через $l_{\pm}$ наибольшие целые, не превосходящие $m\alpha_{\pm}$, и разобьем сумму $G_{\pm}^{(1,1)}(m)$ на три:

$$G'_{\pm}, \quad G''_{\pm}, \quad G'''_{\pm}.$$

К первой отнесем слагаемые с $0 < k' < l_{\pm}$, ко второй с $k' = l_{\pm}$, к третьей с $l_{\pm} < k' < m'$. Суммы $G'_{\pm}$ и $G'''_{\pm}$ оцениваются точно по такой же схеме, как и в предыдущем варианте с $m\alpha_{\pm} \geqslant m'$, поскольку в первом случае смешанная производная неотрицательна везде, а во втором неположительна (за исключением точек на кривой (4.15)). Кроме того, с учетом замечания 4.6,

$$\begin{aligned}
G''_{\pm} = &\sum_{1 \leqslant k' < m} \left|\Delta_{1,1}\, f_{\pm}\left(\frac{l_{\pm}}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{1 \leqslant k' < m} \left(\left|\Delta_{0,1}\, f_{\pm}\left(\frac{l_{\pm}}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right| + \left|\Delta_{0,1}\, f_{\pm}\left(\frac{1+l_{\pm}}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right|\right) = \\
&= f_{\pm}\left(\frac{l_{\pm}}{m}, \frac{1}{m}\right) - f_{\pm}\left(\frac{l_{\pm}}{m}, \frac{m}{m}\right) + \\
&+ f_{\pm}\left(\frac{1+l_{\pm}}{m}, \frac{1}{m}\right) - f_{\pm}\left(\frac{1+l_{\pm}}{m}, \frac{m}{m}\right) \ll 1.
\end{aligned}$$

Лемма 4.7 полностью доказана. □

4.4. Выделение главного члена

Доказательство теоремы 7 . Пусть $F(x)$ произвольная фиксированная кусочно дифференцируемая на отрезке $[x_0, x_1]$ функция с ограниченной производной. Хорошо известно, что для $x_0 \leqslant y_0 < y_1 \leqslant x_1$

$$\sum_{y_0 \leqslant \frac{k}{N} \leqslant y_2} F\left(\frac{k}{N}\right) = N \cdot \int_{y_0}^{y_1} F(x)\,dx + O(1). \tag{4.16}$$

Дважды применяя это асимптотическое равенство и принимая во внимание замечания 4.5 и 4.6, получим

$$S_\pm(m) = \sum_{1 \leqslant n' \leqslant m} \left(m \int_0^{\alpha_1} f_\pm\left(x, \frac{n'}{m}\right) dx + O(1) \right) =$$
$$= m^2 \int_0^{\alpha_1} \int_0^1 f_\pm(x,y)\,dx\,dy + O(m).$$

Применяя леммы 4.6 и 4.7, а также асимптотическое равенство (4.14), находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\Phi_v(h) = h \cdot \int_0^{\alpha_0} \int_0^1 (Q_+(x,y) + Q_-(x,y)) \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2}} + O_{c,\varepsilon}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right),$$

где

$$Q_\pm(x,y) = \sum_{mh\sqrt{1+x^2} \leqslant r_0} \frac{\varphi(m)}{m} \Theta_\pm\left(y, mh\sqrt{1+x^2}\right)$$

с

$$\Theta_+(y,r) = \chi_{[r,\infty)}\left(\frac{1}{1+v(1-2y)}\right)\left(2v + \min\left\{u_+ - v, \frac{1}{y}\left(\frac{1}{r} - (1+v)\right)\right\}\right)$$

и

$$\Theta_-(y,r) = \chi_{[r,\infty)]}\left(\frac{1}{1-v(1-2y)}\right)\left(-2v + \min\left\{v - u_-, \frac{1}{y}\left(\frac{1}{r} - (1-v)\right)\right\}\right).$$

Первые множители в формулах для $\Theta_+(y,r)$ и $\Theta_-(y,r)$ обеспечивают выполнение условий

$$s_+(x,y) \geqslant -2v, \qquad s_-(x,y) \geqslant 2v.$$

Так как

$$\frac{\varphi(m)}{m} = \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{dn=m} \frac{\mu(d)}{d},$$

то

$$Q_\pm(x,y) = \sum_{dh\sqrt{1+x^2} \leqslant r_0} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{ndh\sqrt{1+x^2} \leqslant r_0} \Theta_\pm\left(y, ndh\sqrt{1+x^2}\right).$$

Поскольку

$$ndh\sqrt{1+x^2} \leqslant r_0 \leqslant \frac{1}{1-c},$$

а функция $\Theta_\pm(y,r)$ ограничена и монотонна по r, то заменяя внутреннюю сумму по n интегралом, получим

$$Q_\pm(x,y) = \sum_{dh\sqrt{1+x^2}\leqslant r_0} \frac{\mu(d)}{d}\left(\frac{1}{dh\sqrt{1+x^2}}\int_0^{r_0}\Theta_\pm(y,r)\,dr + O_c(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\sum_{dh\sqrt{1+x^2}\leqslant r_0}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\left(\int_0^{r_0}\Theta_\pm(y,r)\,dr\right) + O_c\left(\log(h^{-1})\right).$$

Так как

$$\sum_{dh\sqrt{1+x^2}\leqslant r_0}\frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O_c(h^{-1}) = \frac{6}{\pi^2} + O_c(h^{-1}),$$

то

$$Q_\pm(x,y) = \frac{6}{\pi^2 h\sqrt{1+x^2}}\int_0^{r_0}\Theta_\pm(y,r)\,dr + O_c\left(\log(h^{-1})\right).$$

Принимая во внимание равенство

$$\int_0^{\alpha_0}\frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\varphi_0} d\varphi,$$

в итоге находим

$$\Phi_v(h) = \frac{6}{\pi^2}\left(K_+(u_+) + K_-(u_-)\right)\int_0^{\varphi_0} d\varphi + O_{c,\varepsilon}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right),$$

где

$$K_\pm(u_\pm) = \int_0^1\int_0^{r_0}\Theta_\pm(y,r)\,dy\,dr.$$

Положим

$$\tau = \frac{1}{r} - (1+v).$$

Так как

$$\chi_{[r,\infty)}\left(\frac{1}{1+v(1-2y)}\right) = \chi_{[-2v,\infty)}\left(\frac{\tau}{y}\right),$$

то

$$K_+(u_+) = \int_0^{r_0} k_+(u_+,r)\,dr,$$

где

$$k_+(u_+,r) = \int_0^1 \chi_{[-2v,\infty)}\left(\frac{\tau}{y}\right)\left(2v + \min\left\{u_+ - v, \frac{\tau}{y}\right\}\right)dy.$$

По условию $u_+ - v \geqslant -2v$. Поэтому

$$\frac{\partial k_+(u_+,r)}{\partial u_+} = \int_0^1 \chi_{[u_+-v,\infty)}\left(\frac{\tau}{y}\right)dy.$$

Отсюда в случае $u_+ - v > 0$ находим, что

$$\frac{\partial k_+(u_+,r)}{\partial u_+} = \begin{cases} 1, & \text{если}\quad \tau \geqslant u_+ - v; \\ \frac{\tau}{u_+-v}, & \text{если}\quad 0 \leqslant \tau < u_+ - v; \\ 0, & \text{если}\quad \tau < 0. \end{cases}$$

А для случая $u_+ - v < 0$

$$\frac{\partial k_+(u_+, r)}{\partial u_+} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \tau \geqslant 0; \\ 1 - \frac{\tau}{u_+ - v}, & \text{если} \quad u_+ - v \leqslant \tau < 0; \\ 0, & \text{если} \quad \tau < u_+ - v. \end{cases}$$

Поскольку $k_+(-v, r) = 0$, то

$$\frac{6}{\pi^2} K_+(u_+) = \int_0^{r_0} \int_{-v}^{u_+} \rho(r, u, v)\, dr\, du.$$

Напомним, что функция ρ определена в формулировке теоремы 7.

Точно так же доказывается еще одно равенство

$$\frac{6}{\pi^2} \cdot K_-(u_-) = \int_0^{r_0} \int_{u_-}^{-v} \rho(r, u, v)\, dr\, du.$$

Таким образом,

$$\Phi_v(h) = \int_0^{\varphi_0} \int_0^{r_0} \int_{u_-}^{u_+} \rho(r, u, v)\, d\varphi\, dr\, du + O_{c,\varepsilon}(h^{1/2-\varepsilon}).$$

Теорема 7 полностью доказана. $\square$

Приложение

5.1. Асимптотические формулы

Пусть Ω — плоская односвязная область со спрямляемой границей. Обозначим через S площадь Ω, P — ее периметр и N — число точек решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащих внутри Ω. Для выпуклой области известно неравенство Ярника (см. [**76**])

$$|S - N| < P + 1.$$

Следующее утверждение показывает, что для справедливости оценки

$$S - N = O(P + 1)$$

требование выпуклости является лишним.

Лемма 5.1. *Для произвольной плоской односвязной области со спрямляемой границей*

$$|S - N| < 4(P + 1).$$

Доказательство. Пусть N_1 — число квадратов вида $[a, a+1) \times [b, b+1)$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, лежащих внутри Ω, и N_2 — число квадратов, имеющих с Ω хотя бы одну общую точку. Тогда

$$N_1 \leqslant S, N \leqslant N_2,$$

и, значит, $|S-N| \leqslant M = N_2 - N_1$, где M — число квадратов, через которые проходит граница Ω. В каждом из таких квадратов выберем точку A_k $(0 \leqslant k < M)$ на границе Ω (нумерация точек — в порядке их следования по границе). Среди любых пяти квадратов, через которые проходит граница Ω, всегда можно выбрать два, замыкания которых не имеют общих точек. Поэтому при любом k длина отрезка границы между точками A_k и A_{k+4} удовлетворяет неравенству $l(A_k, A_{k+4}) > 1$. Отсюда

$$P \geqslant l(A_0, A_4) + l(A_4, A_8) + \ldots + l(A_{4[M/4]-4}, A_{4[M/4]}) > [M/4] > M/4 - 1.$$

Значит, $M < 4(P + 1)$ и $|S - N| < 4(P + 1)$. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть $R \geqslant 1$ и на плоскости Omn задана область $\Omega(R)$, содержащаяся внутри квадрата $0 < m, n \leqslant R$. Предположим также, что $\Omega(R)$ имеет кусочно-дифференцируемую границу, длина которой есть $O(R)$. Обозначим через $M(R)$ число целых точек в области $\Omega(R)$, а через $M^*(R)$ — число примитивных точек (то есть таких, что $(m, n) = 1$).*

Тогда справедливо равенство

$$M^*(R) = \frac{M(R)}{\zeta(2)} + O(R \log R).$$

Доказательство. Пусть $\Omega(R/d)$ — область, полученная из $\Omega(R)$ гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом $1/d$. Будем обозначать через $M(R/d)$ и $M^*(R/d)$ соответственно число целых и примитивных точек в области $\Omega(R/d)$, а через $V(R/d)$ — площадь этой области. Из равенства

$$M(R) = \sum_{d \leqslant R} M^*(R/d)$$

по формуле обращения Мёбиуса (см., например, [**46**], теорема 268)

$$M^*(R) = \sum_{d \leqslant R} \mu(d) M(R/d).$$

Далее, так как $V(R/d) = V(R)/d^2$, и по лемме 5.1

$$M(R/d) = V(R/d) + O(R/d + 1),$$

то

$$M^*(R) = \sum_{d \leqslant R} \mu(d) \left(\frac{V(R)}{d^2} + O\left(\frac{R}{d}\right)\right) = \frac{1}{\zeta(2)} M(R) + O(R \log R).$$

$\square$

Лемма 5.3. *Пусть $\alpha = p(\alpha)/q(\alpha)$ — рациональное число, β, a, b — действительные, $a \leqslant b$ и $f(x) = \alpha x + \beta$. Тогда*

$$\sum_{a < x \leqslant b} \{f(x)\} = \frac{b-a}{2} + O\biggl(\Bigl(\frac{b-a}{q(\alpha)} + 1\Bigr) s_1(\alpha)\biggr).$$

Доказательство см. в [**53**, § 2, теорема 2].

Лемма 5.4. *Для любого натурального b*

$$\sum_{a=1}^{b} s_1(a/b) \ll b \cdot \log^2(b+1).$$

Доказательство см. в [**55**].

Лемма 5.5. *Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и функции $\rho(x)$, $\sigma(x)$ определены равенствами*

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \qquad \sigma(x) = \int_0^x \rho(u) du.$$

Тогда

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) +$$

$$+\sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x)dx.$$

Доказательство см. в [**19**, теорема I,1].

Лемма 5.6 (Преобразование Абеля в интегральной форме). *Пусть P — натуральное, $a_1, \ldots, a_P$, $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_P$ — действительные, $g(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[\lambda_1, \lambda_P]$, и*

$$A(t) = \sum_{\lambda_j \leqslant t} a_j.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{P} a_j \cdot g(\lambda_j) = A(\lambda_P) \cdot g(\lambda_P) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_P} A(t)g'(t)dt. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пользуясь определением $A(t)$, находим

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_P} A(t)g'(t)dt = \sum_{j=1}^{P} a_j \int_{\lambda_1}^{\lambda_P} [t \geqslant \lambda_j] \cdot g'(t)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{P} a_j \cdot (g(\lambda_P) - g(\lambda_j)) = A(\lambda_P) \cdot g(\lambda_P) - \sum_{j=1}^{P} a_j \cdot g(\lambda_j),$$

что равносильно утверждению леммы. □

Лемма 5.7. *Пусть q — натуральное число и функция $a(n)$ задана для целых n, лежащих в пределах $1 \leqslant n \leqslant q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет неравенствам*

$$a(n) \geqslant 0 \quad (1 \leqslant n \leqslant q), \qquad \Delta a(n) \leqslant 0 \quad (1 \leqslant n \leqslant q-1).$$

Тогда

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{q} a(n) = \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{n=1}^{q} a(n) + O\left(A \cdot \sigma_0(q)\right),$$

где $A = a(1)$ — наибольшее значение функции $a(n)$.

Доказательство. Применим к данной сумме преобразование Абеля:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{q} a(n) = \sum_{n=1}^{q} a(n)[(n,q)=1] =$$

$$= \varphi(q)a(q) - \sum_{k=1}^{q-1} (a(k+1) - a(k)) \sum_{n=1}^{k} [(n,q)=1].$$

Далее, пользуясь равенством

$$\sum_{n=1}^{k}[(n,q)=1]=\frac{\varphi(q)}{q}k+O(\sigma_0(q)) \tag{5.2}$$

(см. [**13**, гл. II, зад. 19]), находим

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} a(n)=\varphi(q)a(q)-\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{k=1}^{q-1}(a(k+1)-a(k))k+O(A\cdot\sigma_0(q))=$$

$$=\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{n=1}^{q}a(n)+O\left(A\cdot\sigma_0(q)\right).$$

□

Известно, что дзета-функция Римана в окрестности точки $z=1$ раскладывается в ряд Лорана

$$\zeta(z)=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\gamma_n(z-1)^n.$$

Коэффициенты γ_n, называемые константами Стильтьеса, возникают также в следующих формулах суммирования (см. [**41**, раздел 2.21])

$$\sum_{k\leqslant T}\frac{\log^n k}{k}=\frac{\log^{n+1}T}{n+1}+\gamma_n+O\left(\frac{\log^n T}{T}\right)\qquad (T\geqslant 2). \tag{5.3}$$

В частности, $\gamma_0=\gamma$ — константа Эйлера.

Лемма 5.8. *Пусть $R\geqslant 2$. Тогда*

$$\sum_{n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}\left(\log R+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+O\left(\frac{\log R}{R}\right), \tag{5.4}$$

$$\sum_{n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}\log n=\frac{1}{2\zeta(2)}\log^2 R+C_0+O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right),$$

где

$$C_0=\gamma\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}+\gamma_1\frac{1}{\zeta(2)}-\frac{2(\zeta'(2))^2-\zeta''(2)\zeta(2)}{2\zeta^3(2)}$$

и γ_1 — первая константа Стильтьеса.

Доказательство. Для доказательства первого равенства запишем $\varphi(q)$ используя функцию Мёбиуса:

$$\sum_{n\leqslant R}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\sum_{n\leqslant R}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d\leqslant R}\frac{\mu(d)}{d^2}\sum_{n\leqslant R/d}\frac{1}{n}=$$

$$=\sum_{d\leqslant R}\frac{\mu(d)}{d^2}\left(\log R-\log d+\gamma+O\left(\frac{d}{R}\right)\right).$$

Дифференцируя равенство

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \qquad (\operatorname{Re} z > 1),$$

находим

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta^2(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \log n \qquad (\operatorname{Re} z > 1).$$

Значит,

$$\sum_{d \leqslant R} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{R}\right), \tag{5.5}$$

$$\sum_{d \leqslant R} \frac{\mu(d)}{d^2} \log d = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + O\left(\frac{\log R}{R}\right), \tag{5.6}$$

и

$$\sum_{n \leqslant R} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \left(\log R + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + O\left(\frac{\log R}{R}\right).$$

Вторую сумму преобразуем тем же способом:

$$\sum_{n \leqslant R} \frac{\varphi(n)}{n^2} \log n = \sum_{n \leqslant R} \frac{\log n}{n} \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d \leqslant R} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{n \leqslant R/d} \frac{1}{n} (\log n + \log d).$$

Пользуясь равенством (5.3) при $n = 1$, находим

$$\sum_{n \leqslant R} \frac{\varphi(n)}{n^2} \log n = \sum_{d \leqslant R} \frac{\mu(d)}{d^2} \left(\frac{\log^2 R}{2} - \frac{\log^2 d}{2} + \gamma_1 + \gamma \log d\right) + O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right). \tag{5.7}$$

Далее,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta(z)}\right)'' = \frac{2(\zeta'(z))^2 - \zeta''(z)\zeta(z)}{\zeta^3(z)} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^z} \cdot \log^2 d,$$

и поэтому

$$\sum_{d \leqslant R} \frac{\mu(d)}{d^2} \cdot \log^2 d = \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{\zeta^3(2)} + O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right)$$

Подставляя последнее равенство и соотношения (5.5), (5.6) в (5.7), получаем второе утверждение леммы. □

Лемма 5.9. *Пусть $\xi \geqslant 2$ — действительное число. Тогда для сумм*

$$Z_1(\xi) = \sum_{n\leqslant\xi} \frac{\log(n+\xi)}{n},$$

$$Z_2(\xi) = \sum_{n\leqslant\xi} \frac{\log n \cdot \log(n+\xi)}{n+\xi},$$

$$Z_3(\xi) = \sum_{n\leqslant\xi} \frac{\log^2(n+\xi)}{n},$$

справедливы асимптотические формулы

$$Z_1(\xi) = \log^2\xi + \gamma\cdot\log\xi + \frac{\zeta(2)}{2} + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right),$$

$$Z_2(\xi) = \log 2\cdot\log^2\xi + \frac{1}{2}(\log^2 2 - \zeta(2))\log\xi - \frac{\zeta(3)}{8} + O\left(\frac{\log^2\xi}{\xi}\right),$$

$$Z_3(\xi) = \log^3\xi + \gamma\cdot\log^2\xi + \zeta(2)\cdot\log\xi + \frac{\zeta(3)}{4} + O\left(\frac{\log^2\xi}{\xi}\right).$$

Доказательство. Применяя к сумме $Z_1(\xi)$ преобразование Абеля, находим

$$Z_1(\xi) = \log(2\xi)\sum_{n\leqslant\xi}\frac{1}{n} - \sum_{n<\xi}(\log(n+\xi+1) - \log(n+\xi))\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right) =$$
$$= \log(2\xi)\cdot(\log\xi+\gamma) - \sum_{n<\xi}\frac{\log n + \gamma}{n+\xi} + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right).$$

После перехода от суммы к интегралу и замены $n = \xi t$ получаем

$$Z_1(\xi) = \log\xi\cdot(\log\xi+\gamma) - \int_0^1 \frac{\log t}{t+1}\,dt + O\left(\frac{\log\xi}{\xi}\right).$$

По определению дилогарифма

$$\mathrm{Li}_2'(t) = -\frac{1}{t}\log(t+1), \quad \mathrm{Li}_2(-1) = -\frac{\zeta(2)}{2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{\log t}{t+1}\,dt = \log t\cdot\log(t+1) + \mathrm{Li}_2(-t),$$

$$\int_0^1 \frac{\log t}{t+1}\,dt = \mathrm{Li}_2(-1) = -\frac{\zeta(2)}{2}. \tag{5.8}$$

Подставляя найденный интеграл в равенство для $Z_1(\xi)$, приходим к первому утверждению леммы.

В $Z_2(\xi)$ также заменим сумму на интеграл:

$$Z_2(\xi) = \int_0^\xi \frac{\log x \cdot \log(x+\xi)}{x+\xi}\,dx + O\left(\frac{\log^2 \xi}{\xi}\right) =$$
$$= \log^2 \xi \int_0^1 \frac{dt}{t+1} + \log \xi \int_0^1 \frac{\log t + \log(t+1)}{t+1}\,dt +$$
$$+ \int_0^1 \frac{\log t \cdot \log(t+1)}{t+1}\,dt + O\left(\frac{\log^2 \xi}{\xi}\right).$$

Последний интеграл с помощью интегрирования по частям сводится к известному (см. [**35**, стр. 291–292])

$$\int_0^1 \frac{\log t \cdot \log(t+1)}{t+1}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2(t+1)}{t}\,dt = -\frac{\zeta(3)}{8}.$$

Подставляя его в равенство для $Z_2(\xi)$ и пользуясь (5.8), приходим к нужной формуле для $Z_2(\xi)$.

Для вычисления $Z_3(\xi)$ снова воспользуемся преобразованием Абеля:

$$Z_3(\xi) = \log^2(2\xi)\sum_{n\leqslant\xi}\frac{1}{n} - \sum_{n<\xi}(\log^2(n+\xi+1) - \log^2(n+\xi))\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} + O\left(\frac{\log^2 \xi}{\xi}\right) =$$
$$= \log^2(2\xi)\cdot(\log\xi + \gamma) - 2\sum_{n\leqslant\xi}\frac{\log(n+\xi)}{n+\xi}(\log n + \gamma) + O\left(\frac{\log^2 \xi}{\xi}\right).$$

Пользуясь определением $Z_2(\xi)$ перепишем сумму $Z_3(\xi)$ в виде

$$Z_3(\xi) = \log^2(2\xi)\log\xi + \log^2\xi\cdot\gamma - 2Z_2(\xi) + O\left(\frac{\log^2 \xi}{\xi}\right).$$

Подставляя сюда асимптотическую формулу для $Z_2(\xi)$, получаем последнее утверждение леммы. □

5.2. Оценки сумм Клостермана

Пусть q — натуральное число, l, m, n — целые. Определим суммы

$$K_q(l,m,n) = \sum_{x,y=1}^{q}\delta_q(xy-l)e^{2\pi i\frac{mx+ny}{q}}, \tag{5.9}$$

которые в частном случае совпадают с классическими суммами Клостермана

$$K_q(m,n) = K_q(1,m,n) = \sum_{x,y=1}^{q}\delta_q(xy-1)e^{2\pi i\frac{mx+ny}{q}}.$$

Отметим простейшие свойства сумм $K_q(l,m,n)$.

1°. Если $(l,q)=1$, то $K_q(l,m,n) = K_q(lm,n)$.

2°. Если $q = q_1q_2$ и $(q_1,q_2)=1$, то

$$K_q(l,m,n) = K_{q_1}(\bar{q}_2^2 l,m,n)K_{q_2}(\bar{q}_1^2 l,m,n),$$

где $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ — решения сравнений $q_1\bar{q}_1 \equiv 1 \pmod{q_2}$, $q_2\bar{q}_2 \equiv 1 \pmod{q_1}$.

3°. Для любой перестановки $\sigma \in S_3$

$$K_q(n_1, n_2, n_3) = K_q(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, n_{\sigma(3)}).$$

4°. $K_q(l, m, n) = K_q(l, -m, -n)$.

Первое свойство получается, если в определении (5.9) положить $x = lx_1$. Для доказательства второго достаточно сделать замены

$$x = x_1 q_2 + x_2 q_1, \quad y = y_1 q_2 + y_2 q_1, \quad (1 \leqslant x_1, y_1 \leqslant q_1, 1 \leqslant x_2, y_2 \leqslant q_2).$$

Третье свойство следует из равенства

$$K_q(l, m, n) = \frac{1}{q} \sum_{x,y,z=1}^{q} e^{2\pi i \frac{mx+ny+lz-xyz}{q}}.$$

Четвертое получается с помощью замен $x \to -x$, $y \to -y$.

Для классических сумм Клостермана в работе **[40]** Эстерманом доказана оценка

$$|K_q(m, n)| \leqslant \sigma_0(q) \cdot (m, n, q)^{1/2} \cdot q^{1/2}. \tag{5.10}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для сумм $K_q(l, m, n)$.

Лемма 5.10. *Пусть q — натуральное, l, m, n — целые, $a = (l, q)$. Тогда*

$$|K_q(l, m, n)| \leqslant f_q(l, m, n) \cdot q^{1/2}, \tag{5.11}$$

где

$$f_q(l, m, n) = \sigma_0(q) \cdot \sigma_0((l, m, n, q)) \cdot (lm, ln, mn, q)^{1/2}.$$

Доказательство. Из свойства 2° сумм $K_q(l, m, n)$ и мультипликативности $f_q(l, m, n)$ как функции q следует, что оценку (5.11) достаточно доказать для случая, когда q есть степень простого числа.

Пусть p — простое, $\alpha \geqslant 1$, $q = p^\alpha$ и $(l, m, n, p^\alpha) = p^\lambda$. Если $\lambda = \alpha$, то

$$K_q(l, m, n) = \sum_{x,y=1}^{p^\alpha} \delta_{p^\alpha}(xy) = (\alpha+1)p^\alpha - \alpha p^{\alpha-1} \leqslant \sigma_0(q) \cdot q$$

и оценка (5.11) выполняется. Предположим теперь, что $\lambda \leqslant \alpha - 1$, $l = p^\lambda l_1$, $m = p^\lambda m_1$, $n = p^\lambda n_1$. Согласно свойству симметричности 3° сумм Клостермана можно считать, что $(l_1, p) = 1$. Каждому решению (x, y) сравнения

$$xy \equiv l_1 p^\lambda \pmod{p^\alpha}$$

однозначно ставится в соответствие число β ($0 \leqslant \beta \leqslant \lambda$), для которого

$$(x, p^\alpha) = p^\beta, \quad (y, p^\alpha) = p^{\lambda-\beta}.$$

Поэтому после замен $x = p^\beta x_1$, $y = p^{\lambda-\beta} y_1$ $(0 \leqslant \beta \leqslant \lambda)$ получаем

$$K_{p^\alpha}(l,m,n) = \sum_{\beta=0}^{\lambda} \sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\beta}} \sum_{y_1=1}^{p^{\alpha-\lambda+\beta}} \delta_{p^{\alpha-\lambda}}(x_1y_1 - l_1) e^{2\pi i \frac{m_1p^\beta x_1 + n_1 p^{\lambda-\beta} y_1}{p^{\alpha-\lambda}}} =$$

$$= p^\lambda \sum_{\beta=0}^{\lambda} \sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\lambda}} \sum_{y_1=1}^{p^{\alpha-\lambda}} \delta_{p^{\alpha-\lambda}}(x_1y_1 - l_1) e^{2\pi i \frac{m_1p^\beta x_1 + n_1 p^{\lambda-\beta} y_1}{p^{\alpha-\lambda}}} =$$

$$= p^\lambda \sum_{\beta=0}^{\lambda} K_{p^{\alpha-\lambda}}(m_1p^\beta, n_1p^{\lambda-\beta}, l_1).$$

Пользуясь свойством 1° сумм $K_q(l,m,n)$ и оценкой Эстермана (5.10), находим

$$\left|K_{p^{\alpha-\lambda}}(m_1p^\beta, n_1p^{\lambda-\beta}, l_1)\right| = \left|K_{p^{\alpha-\lambda}}(l_1m_1p^\beta, n_1p^{\lambda-\beta}, 1)\right| =$$
$$= \left|K_{p^{\alpha-\lambda}}(l_1m_1p^\beta, n_1p^{\lambda-\beta})\right| \leqslant \sigma_0(p^\alpha)(m_1p^\beta, n_1p^{\lambda-\beta}, p^{\alpha-\lambda})^{1/2} p^{(\alpha-\lambda)/2}$$

Учитывая, что $\lambda + 1 = \sigma_0((l,m,n,p^\alpha))$, получаем неравенство

$$|K_{p^\alpha}(l,m,n)| \leqslant \sigma_0(p^\alpha)\sigma_0((l,m,n,p^\alpha))p^{\alpha/2} \max_{0\leqslant\beta\leqslant\lambda}(mp^\beta, np^{\lambda-\beta}, p^\alpha)^{1/2}.$$

Замечая, что

$$(mp^\beta, np^{\lambda-\beta}, p^\alpha) \leqslant (lm, ln, mn, p^\alpha),$$

приходим к утверждению леммы. □

Замечание 5.1. Более точная оценка

$$(mp^\beta, np^{\lambda-\beta}, p^\alpha)^2 = (m^2p^{2\beta}, n^2p^{2\alpha-2\beta}, p^{2\alpha}) \leqslant (l^2m^2, l^2n^2, m^2n^2, lmn, p^{2\alpha}),$$

показывает, что неравенство леммы 5.10 справедливо с коэффициентом

$$f_q(l,m,n) = \sigma_0(q)\sigma_0((l,m,n,q))(l^2m^2, l^2n^2, m^2n^2, lmn, q^2)^{1/4}.$$

Следствие 5.1. *Пусть q — натуральное, l — целое и $a = (l,q)$. Тогда*

$$\sum_{m,n=1}^{q} \frac{|K_q(l,m,n)|}{m\cdot n} \ll \sigma_0(q)\sigma_0^2(a)\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2(q+1)q^{1/2}.$$

Доказательство. По лемме 5.10

$$|K_q(l,m,n)| \leqslant \sigma_0(q)\cdot\sigma_0(a)\cdot(lm, ln, mn, q)^{1/2}\cdot q^{1/2}.$$

Поэтому для доказательства следствия достаточно проверить, что сумма

$$S = \sum_{m,n=1}^{q} \frac{(lm, ln, mn, q)^{1/2}}{mn}$$

удовлетворяет оценке

$$S \ll \sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2(q+1). \tag{5.12}$$

Преобразуем сумму S:

$$S = \sum_{\delta|q} \delta^{1/2} \sum_{m,n=1}^{q} \frac{[(lm, ln, mn) = \delta]}{mn} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\delta|q} \delta^{1/2} \sum_{m,n=1}^{q} \frac{1}{mn} \left[\frac{\delta}{(l,\delta)} \mid m, \frac{\delta}{(l,\delta)} \mid n, \delta \mid mn \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\delta|q} \delta^{1/2} \sum_{m_1,n_1=1}^{q} \frac{1}{m_1 n_1} \cdot \frac{(l,\delta)^2}{\delta^2} [(l,\delta)^2 \mid m_1 n_1 \delta].$$

Вводя параметры $\delta_1 = (\delta, l)$ и $\delta_2 = (\delta, \delta_1^2)$, находим

$$S \leqslant \sum_{\delta_1|(l,q)} \delta_1^2 \sum_{\substack{\delta|q \\ (\delta,l)=\delta_1}} \frac{1}{\delta^{3/2}} \sum_{m_1,n_1=1}^{q} \frac{[\delta_1^2 \mid m_1 n_1 \delta]}{m_1 n_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\delta_1|(l,q)} \delta_1^2 \sum_{\substack{\delta|q \\ (\delta,l)=\delta_1}} \frac{1}{\delta^{3/2}} \sum_{m_1,n_1=1}^{q} \frac{1}{m_1 n_1} \left[\frac{\delta_1^2}{\delta_2} \mid m_1 n_1 \right].$$

Заметим, что $\delta_1 \mid \delta_2$, и $\delta_1^2/\delta_2 \mid \delta_1$. Поэтому из оценки

$$\sum_{m_1,n_1=1}^{q} \frac{1}{m_1 n_1} [d \mid m_1 n_1] \leqslant \sum_{k=1}^{q^2} \frac{\sigma_0(dk)}{dk} \ll \frac{\sigma_0(d)}{d} \cdot \log^2(q+1),$$

следует, что

$$S \ll \sigma_0(a) \log^2(q+1) \sum_{\delta_1|(l,q)} \sum_{\substack{\delta|q \\ (\delta,l)=\delta_1}} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} = \sigma_0(a) \log^2(q+1) \sum_{\delta|q} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}}$$

После замен $\delta = \delta_1 \cdot \delta_0$, $(\delta_1, \delta_0) = \delta'$ находим

$$\sum_{\delta|q} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} = \sum_{\delta_1|(l,q)} \sum_{\substack{\delta|q \\ (\delta,l)=\delta_1}} \frac{(\delta_1^2, \delta)}{\delta^{3/2}} \leqslant \sum_{\delta_1|(l,q)} \delta_1^{-1/2} \sum_{\delta_0|q} \frac{(\delta_1, \delta_0)}{\delta_0^{3/2}} =$$

$$= \sum_{\delta_1|(l,q)} \delta_1^{-1/2} \sum_{\delta'|\delta_1} \delta' \sum_{\substack{\delta_0|q \\ (\delta_0,\delta_1)=\delta'}} \frac{1}{\delta_0^{3/2}} \ll \sum_{\delta_1|a} \delta_1^{-1/2} \sum_{\delta'|a} (\delta')^{-1/2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\delta|q} \frac{\delta_2}{\delta^{3/2}} \ll \sigma_{-1/2}^2(a). \tag{5.13}$$

Значит, оценка (5.12) действительно верна, и следствие доказано. □

Отдельно оценим суммы $K_q(l,m,n)$, когда один из аргументов равен нулю. Пусть

$$c_q(m,n) = K_q(0,m,n) = \sum_{x,y=1}^{q} \delta_q(xy) e^{2\pi i \frac{mx+ny}{q}}$$

Такие суммы являются обобщениями сумм Рамануджана

$$c_q(n) = \sum_{x=1}^{q}{}^{*} e^{2\pi i \frac{nx}{q}}$$

(здесь и далее знак звездочки означает, что суммирование проходит по приведенной системе вычетов), поскольку

$$c_q(n) = K_q(0,1,n) = c_q(1,n).$$

Для суммы $c_q(n)$ известно точное значение:

$$c_q(n) = \mu(q/d)\cdot\frac{\varphi(q)}{\varphi(q/d)}, \quad \text{где } d=(n,q) \tag{5.14}$$

(см. [**46**, теорема 272]). В частности,

$$c_q(0) = K_q(0,0) = \varphi(q). \tag{5.15}$$

Покажем, что для сумм $c_q(m,n)$ также можно найти явное представление.

Согласно свойству мультипликативности сумм Клостермана $K_q(l,m,n)$ (свойство 2°) при $q=q_1q_2$ и $(q_1,q_2)=1$

$$c_q(m,n) = c_{q_1}(m,n)\cdot c_{q_2}(m,n).$$

Поэтому для вычисления суммы $c_q(m,n)$ достаточно ограничиться случаем, когда q есть степень простого числа.

Лемма 5.11. *Пусть p — простое, $\alpha \geqslant 1$ и $q=p^\alpha$. Тогда*

$$c_q(m,n) = g_{p^\alpha}(m,n) - g_{p^{\alpha-1}}(m,n),$$

где

$$g_q(m,n) = q\cdot\delta_q((m,q)(n,q))\cdot\sigma_0((m,q)(n,q)q^{-1}). \tag{5.16}$$

Доказательство. Если $xy\equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, то для некоторого β $(0\leqslant \beta\leqslant\alpha)$, будут выполнятся равенства

$$x=p^\beta x_1, \quad (x_1,p)=1, \quad y=p^{\alpha-\beta}y_1.$$

Поэтому

$$c_q(m,n) = \sum_{\beta=0}^{\alpha}\sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\beta}}{}^{*}\sum_{y_1=1}^{p^\beta} e^{2\pi i\frac{mp^\beta x_1+np^{\alpha-\beta}y_1}{p^\alpha}} =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\alpha}\sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\beta}}\sum_{y_1=1}^{p^\beta} e^{2\pi i\left(\frac{mx_1}{p^{\alpha-\beta}}+\frac{ny_1}{p^\beta}\right)} - \sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\sum_{x_1=1}^{p^{\alpha-\beta-1}}\sum_{y_1=1}^{p^\beta} e^{2\pi i\left(\frac{mx_1}{p^{\alpha-\beta-1}}+\frac{ny_1}{p^\beta}\right)} =$$

$$= g_{p^\alpha}(m,n) - g_{p^{\alpha-1}}(m,n),$$

где
$$g_{p^\alpha}(m,n)=p^\alpha\sum_{\beta=0}^{\alpha}\delta_{p^{\alpha-\beta}}(m)\delta_{p^\beta}(n).$$
Для проверки равенства (5.16) заметим, что если $p^\alpha\nmid(m,p^\alpha)(n,p^\alpha)$, то $g_{p^\alpha}(m,n)=0$. Если же $(m,p^\alpha)=p^{\nu_1}$, $(n,p^\alpha)=p^{\nu_2}$ и $\nu_1+\nu_2\geqslant\alpha$, то
$$g_{p^\alpha}(m,n)=p^\alpha\sum_{\beta=0}^{\alpha}[\alpha-\nu_1\leqslant\beta\leqslant\nu_2]=p^\alpha(\nu_1+\nu_2-\alpha+1)=$$
$$=p^\alpha\cdot\sigma_0((m,p^\alpha)(n,p^\alpha)p^{-\alpha}).$$
□

Следствие 5.2. *Для любого натурального q и целых m, n*
$$|c_q(m,n)|\leqslant\sigma_0((m,q))(q,mn),\tag{5.17}$$
и, в частности,
$$K_q(m,0,0)=|c_q(m,0)|\leqslant\sigma_0((m,q))\cdot q.\tag{5.18}$$

Доказательство. Поскольку величина, стоящая в правой части неравенства (5.17) (как и $c_q(m,n)$), является мультипликативной функцией параметра q, то оценку (5.17) достаточно доказать для степеней простых чисел. Предположим, что p — простое, $\alpha\geqslant1$, и $q=p^\alpha$. Рассмотрим три случая:

1) $p^\alpha\mid(m,p^\alpha)(n,p^\alpha)$, а, следовательно, и $p^{\alpha-1}\mid(m,p^{\alpha-1})(n,p^{\alpha-1})$;
2) $p^\alpha\nmid(m,p^\alpha)(n,p^\alpha)$, но $p^{\alpha-1}\mid(m,p^{\alpha-1})(n,p^{\alpha-1})$;
3) $p^{\alpha-1}\nmid(m,p^{\alpha-1})(n,p^{\alpha-1})$.

В первом случае $g_{p^\alpha}(m,n)>0$, $g_{p^{\alpha-1}}(m,n)>0$ и для $(m,p^\alpha)=p^{\nu_1}$, $(n,p^\alpha)=p^{\nu_2}$
$$g_{p^{\alpha-1}}(m,n)=p^{\alpha-1}(\min\{\nu_1,\alpha-1\}+\min\{\nu_2,\alpha-1\}-\alpha+2)\leqslant$$
$$\leqslant p^{\alpha-1}(\nu_1+\nu_2-\alpha+2)\leqslant p^\alpha(\nu_1+\nu_2-\alpha+1)=g_{p^\alpha}(m,n).$$
Значит, по лемме 5.11,
$$0\leqslant c_{p^\alpha}(m,n)=g_{p^\alpha}(m,n)-g_{p^{\alpha-1}}(m,n)\leqslant g_{p^\alpha}(m,n),$$
$$|c_{p^\alpha}(m,n)|\leqslant g_{p^\alpha}(m,n)\leqslant p^\alpha\sigma_0((m,p^\alpha))\delta_{p^\alpha}((m,p^\alpha)(n,p^\alpha))=\sigma_0((m,q))(q,mn).$$

Во втором случае аналогично находим
$$|c_q(m,n)|=g_{p^{\alpha-1}}(m,n)\leqslant p^{\alpha-1}\sigma_0((m,p^\alpha))\delta_{p^{\alpha-1}}((m,p^{\alpha-1})(n,p^{\alpha-1}))=$$
$$=\sigma_0((m,q))(q,mn).$$
В третьем случае $|c_q(m,n)|=0$. □

Следствие 5.3. *Пусть q — натуральное, l — целое и $a=(l,q)$. Тогда справедлива оценка*
$$\sum_{n=1}^{q}\frac{|c_q(l,n)|}{n}\ll\sigma_0(q)\,\sigma_0(a)\log(q+1)\cdot a.$$

Доказательство. Пользуясь следствием 5.2, находим

$$\sum_{n=1}^{q}\frac{|c_q(l,n)|}{n} \leqslant \sigma_0(a)\sum_{n=1}^{q}\frac{1}{n}(q,ln) = a\cdot\sigma_0(a)\sum_{n=1}^{q}\frac{1}{n}\,(q/a,n) \leqslant$$

$$\leqslant a\cdot\sigma_0(a)\sum_{\delta|q/a}\delta\sum_{\substack{n=1\\ \delta|n}}^{q}\frac{1}{n} \ll a\cdot\sigma_0(a)\sigma_0(q)\log(q+1).$$

□

5.3. Следствия оценок сумм Клостермана

Следующее утверждение доказывается путем стандартного перехода от суммирования по неполной системе вычетов к полной (см. [**13**, гл. V, зад. 12]), и применения оценок сумм $K_q(l,m,n)$.

Лемма 5.12. *Пусть $q \geqslant 1$ — натуральное, l — целое, Q_1, Q_2, P_1, P_2 — вещественные $0 \leqslant P_1, P_2 \leqslant q$ и $a = (l,q)$. Тогда для суммы*

$$\Phi_q(Q_1,Q_2;P_1,P_2) = \sum_{\substack{Q_1<u\leqslant Q_1+P_1\\ Q_2<v\leqslant Q_2+P_2}}\delta_q(uv-l)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_q(Q_1,Q_2;P_1,P_2) = \frac{K_q(l,0,0)}{q^2}\cdot P_1P_2 + O\left(\psi_l(q)\right),$$

где

$$\psi_l(q) = \sigma_0(q)\,\sigma_0^2(a)\,\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2(q+1)\cdot q^{1/2} + \sigma_0(q)\,\sigma_0(a)\log(q+1)\cdot a. \quad (5.19)$$

Доказательство. Определим целые

$$M_1 = [Q_1], \qquad M_2 = [Q_2],$$
$$N_1 = [Q_1+P_1]-[Q_1], \qquad N_2 = [Q_2+P_2]-[Q_2].$$

При этом

$$\Phi_q(Q_1,Q_2;P_1,P_2) = \Phi_q(M_1,M_2;N_1,N_2) \quad (5.20)$$

и

$$0 \leqslant N_1, N_2 \leqslant q, \quad (5.21)$$

поскольку

$$0 \leqslant N_j = [Q_j+P_j]-[Q_j] = P_j + \{Q_j\} - \{Q_j+P_j\} \leqslant q \qquad (j=1,2).$$

Докажем сначала лемму с M_1, M_2, N_1, N_2 вместо Q_1, Q_2, P_1, P_2. Если одно из чисел N_1, N_2 равно нулю, то утверждение леммы тривиально. Поэтому в дальнейшем будем считать, что N_1 и N_2 — натуральные числа. Определим две функции

$$F_1 : \{M_1+1,\ldots,M_1+q\} \to \{0,1\}, \qquad F_2 : \{M_2+1,\ldots,M_2+q\} \to \{0,1\},$$

положив

$$F_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad M_j < x \leqslant M_j + N_j \\ 0, & \text{если} \quad M_j + N_j < x \leqslant M_j + q. \end{cases}$$

Для них справедливы следующие разложения в конечные ряды Фурье

$$F_j(x) = \sum_{-q/2<k\leqslant q/2} \widehat{F}_j(k) e^{2\pi i \frac{kx}{q}},$$

с коэффициентами

$$\widehat{F}_j(k) = \frac{1}{q} \sum_{y=M_j+1}^{M_j+N_j} e^{-2\pi i \frac{ky}{q}}.$$

Для $k = 0$

$$\widehat{F}_j(0) = \frac{1}{q} N_j,$$

а для остальных $k \in (-q/2, q/2]$, суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$\widehat{F}_j(k) = \frac{1}{q} \cdot \frac{1 - e^{-2\pi i k N_j/q}}{1 - e^{-2\pi i k/q}} \cdot e^{-2\pi i k(M_j+1)/q}.$$

Поэтому

$$\bigl|\widehat{F}_j(k)\bigr| = \frac{|\sin(\pi k N_j/q)|}{q|\sin(\pi k/q)|} \leqslant \frac{1}{q|\sin(\pi k/q)|} \leqslant \frac{1}{2|k|} \quad (-q/2 < k \leqslant q/2;\ k \neq 0). \tag{5.22}$$

В соответствии с вышесказанным,

$$\Phi_q(M_1, M_2; N_1, N_2) = \sum_{u=M_1+1}^{M_1+q} \sum_{v=M_2+1}^{M_2+q} \delta_q(uv - l)\, F_1(u)\, F_2(v) =$$
$$= \sum_{u=M_1+1}^{M_1+q} \sum_{v=M_2+1}^{M_2+q} \delta_q(uv - l) \sum_{-q/2<m,n\leqslant q/2} \widehat{F}_1(m)\, \widehat{F}_2(n)\, e^{2\pi i \frac{mu+nv}{q}} =$$
$$= \sum_{-q/2<m,n\leqslant q/2} \widehat{F}_1(m)\, \widehat{F}_2(n)\, K_q(l, m, n).$$

Выделяя слагаемое с $m = n = 0$, получаем равенство

$$\Phi_q(M_1, M_2; N_1, N_2) = \frac{N_1 N_2}{q^2} \cdot K_q(l, 0, 0) + R_1 + R_2 + R_3,$$

где

$$\begin{aligned}
R_1 &= \widehat{F}_1(0) \sideset{}{'}\sum_{-q/2<n\leqslant q/2} \widehat{F}_2(n)\, K_q(l,0,n),\\
R_2 &= \widehat{F}_2(0) \sideset{}{'}\sum_{-q/2<m\leqslant q/2} \widehat{F}_1(m)\, K_q(l,m,0),\\
R_3 &= \sideset{}{'}\sum_{-q/2<m\leqslant q/2} \widehat{F}_1(m) \sideset{}{'}\sum_{-q/2<n\leqslant q/2} \widehat{F}_2(n)\, K_q(l,m,n).
\end{aligned}$$

Здесь и далее штрих в суммах означает, что переменная суммирования не принимает нулевое значение. Пользуясь неравенствами на коэффициенты Фурье (5.22) и свойствами 3°–4° сумм $K_q(l,m,n)$, приходим к оценкам

$$\begin{aligned}
R_{1,2} &\ll \sum_{n=1}^{q} \frac{|K_q(l,0,n)|}{n},\\
R_3 &\ll \sum_{m,n=1}^{q} \frac{|K_q(l,m,n)|+|K_q(-l,m,n)|}{mn}.
\end{aligned}$$

Применяя следствия 5.1 и 5.3, получаем асимптотическую формулу

$$\Phi_q(M_1,M_2;N_1,N_2) = \frac{N_1N_2}{q^2}\cdot K_q(l,0,0) + O(\psi_l(q)),$$

где функция $\psi_l(q)$ определена равенством (5.19).

Из определения M_1, M_2, N_1, N_2 и (5.21) следует, что

$$|P_1P_2 - N_1N_2| = |P_1(P_2-N_2)+N_2(P_1-N_1)| \leqslant 2q.$$

Отсюда, с учетом (5.18) и (5.20), окончательно находим

$$\begin{aligned}
&\left|\Phi_q(Q_1,Q_2;P_1,P_2) - \frac{P_1P_2}{q^2}\,K_q(l,0,0)\right| \ll\\
&\qquad \ll \psi_l(q) + \left|\frac{N_1N_2}{q^2}\,K_q(l,0,0) - \frac{P_1P_2}{q^2}\,K_q(l,0,0)\right| \ll\\
&\qquad\qquad \ll \psi_l(q) + \frac{K_q(l,0,0)}{q^2}\,q \ll \psi_l(q).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Следствие 5.4. *При* $l=1$

$$\Phi_q(Q_1,Q_2;P_1,P_2) = \frac{\varphi(q)}{q^2}\cdot P_1P_2 + O\left(\psi(q)\right),$$

где

$$\psi(q) = \psi_1(q) = \sigma_0(q)\log^2(q+1)\,q^{1/2}.$$

Замечание 5.2. При любом P_1 и $P_2 = q$ рассуждения, проведенные в лемме 5.12, приводят к формуле

$$\Phi_q(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \frac{P_1}{q} K_q(l, 0, 0) + O(\sigma_0(q)\,\sigma_0(a)\,a).$$

Лемма 5.13. *Пусть $q \geqslant 1$ и $f(u)$ — неотрицательная, невозрастающая функция на отрезке $[0; q]$, причем $f(0) \leqslant q$. Тогда*

$$\sum_{u=1}^{q} \sum_{1 \leqslant v \leqslant f(u)} \delta_q(uv \pm 1) = \frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot V(\Omega) + O\left(q^{3/4} \sigma_0^{1/2}(q) \log(q+1)\right),$$

где Ω — область на плоскости Ouv, задаваемая условиями

$$0 \leqslant u \leqslant q, \quad 0 \leqslant v \leqslant f(u).$$

Доказательство. Разобьём отрезок суммирования по переменной u на k частей $(1 \leqslant k \leqslant q)$:

$$0 = u_0 < u \leqslant u_1, \ldots, u_{k-1} < u \leqslant u_k = q,$$

где $u_j = jq/k$. Положим

$$S = \sum_{j=1}^{k} S_j, \qquad S_j = \sum_{u_{j-1} < u \leqslant u_j} \sum_{1 \leqslant v \leqslant f(u)} \delta_q(uv \pm 1).$$

Тогда, в силу монотонности функции $f(u)$,

$$\sum_{u_{j-1} < u \leqslant u_j} \sum_{1 \leqslant v \leqslant f(u_j)} \delta_q(uv \pm 1) \leqslant S_j \leqslant \sum_{u_{j-1} < u \leqslant u_j} \sum_{1 \leqslant v \leqslant f(u_{j-1})} \delta_q(uv \pm 1).$$

Применяя к суммам, стоящим в последней формуле следствие 5.4, получаем неравенства

$$\frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot \frac{q}{k} f(u_j) + O\left(\sqrt{q} \cdot \psi_1(q)\right) \leqslant S_j \leqslant \frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot \frac{q}{k} f(u_{j-1}) + O\left(\sqrt{q} \cdot \psi_1(q)\right). \quad (5.23)$$

Так как

$$\frac{q}{k} \sum_{j=1}^{k} f(u_j) = \int_0^q f(u)\,du + O\left(\frac{q}{k} f(0)\right),$$

$$\frac{q}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f(u_j) = \int_0^q f(u)\,du + O\left(\frac{q}{k} f(0)\right),$$

и $f(0) \leqslant q$, то после суммирования по j оценок (5.23), получим асимптотическую формулу

$$S = \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_0^q f(u)\,du + O\left(\frac{q}{k}\right) + O\left(k\sqrt{q} \cdot \psi_1(q)\right).$$

Полагая

$$k = [q^{1/4} (\sigma_0^{1/2}(q) \log(q+1))^{-1}] + 1,$$

приходим к утверждению леммы. □

Лемма 5.14. *Пусть $q \geqslant 1$ — целое и функция $a(u,v)$ задана в целых точках (u,v), где $1 \leqslant u,v \leqslant q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет неравенствам*

$$a(u,v) \geqslant 0, \quad \Delta_{1,0}a(u,v) \leqslant 0, \quad \Delta_{0,1}a(u,v) \leqslant 0, \quad \Delta_{1,1}a(u,v) \geqslant 0 \qquad (5.24)$$

во всех точках, где эти условия определены. Тогда для суммы

$$W = \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv-1)\cdot a(u,v)$$

справедлива асимптотическая формула

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{u,v=1}^{q} a(u,v) + O\left(A\cdot\psi(q)\sqrt{q}\right),$$

где

$$\psi(q) = \psi_1(q) = \sigma_0(q)\log^2(q+1),$$

и $A = a(1,1)$ — наибольшее значение функции $a(u,v)$.

Доказательство. Доопределим функцию $a(u,v)$ с помощью условий

$$a(u,q+1) = a(q+1,v) = 0 \qquad (1 \leqslant u,v \leqslant q+1).$$

Тогда из неравенств (5.24) следует, что $\Delta_{1,1}a(u,v) \geqslant 0$ для всех целых u и v в пределах $1 \leqslant u,v \leqslant q$.

Применим к сумме W преобразование Абеля

$$\sum_{n=1}^{q} f(n)g(n) = g(q+1)\sum_{n=1}^{q} f(n) - \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{n=1}^{k} f(n)\right)(g(k+1)-g(k))$$

последовательно по переменным u и v. Полагая сначала

$$f(u) = \delta_q(uv-1), \qquad g(u) = a(u,v),$$

а затем

$$f(v) = \sum_{u=1}^{k}\delta_q(uv-1), \qquad g(v) = \Delta_{1,0}a(u,v),$$

находим

$$W = \sum_{k,l=1}^{q}\Delta_{1,1}a(k,l)\sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{l}\delta_q(uv-1).$$

Согласно следствию 5.4, для внутренней двойной суммы справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{l}\delta_q(uv-1) = \frac{\varphi(q)}{q^2}\,kl + O\left(\psi_1(q)\sqrt{q}\right).$$

Следовательно,

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{k,l=1}^{q}\Delta_{1,1}a(k,l)\,kl + O\left(\psi_1(q)\sqrt{q}\sum_{k,l=1}^{q}|\Delta_{1,1}a(k,l)|\right).$$

Так как всегда $|\Delta_{1,1}a(k,l)| = \Delta_{1,1}a(k,l)$, то

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{k,l=1}^{q} \Delta_{1,1}a(k,l) \sum_{u=1}^{k} \sum_{v=1}^{l} 1 + O\left(A \cdot \psi_1(q)\sqrt{q}\right).$$

Делая суммирование по u и v внешним и суммируя по k и l, приходим к утверждению леммы. □

5.4. Применение метода ван дер Корпута

Основным результатом этого раздела является лемма 5.17. Ее доказательство основано на следующих двух оценках тригонометрических сумм, полученных методом ван дер Корпута.

Лемма 5.15. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 1$, и на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, $f'(x)$ монотонна и $\|f'(x)\| \geqslant \lambda > 0$. Тогда*

$$\sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i f(x)} \ll \lambda^{-1}.$$

Доказательство см. в [**45**, теорема 2.1].

Лемма 5.16. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 1$, на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, и для некоторых $A > 0$, $w \geqslant 1$*

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{A}.$$

Тогда

$$\sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i f(x)} \ll_w \frac{P}{\sqrt{A}} + \sqrt{A}.$$

Доказательство см. в [**45**, теорема 2.2].

Лемма 5.17. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 2$, и на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, и для некоторых $A \geqslant P$, $w \geqslant 1$*

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{A}.$$

Тогда при любом натуральном q

$$\sum_{m=1}^{q} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i \left(\frac{mx}{q} + f(x)\right)} \right| \ll_w q\left(\frac{P}{\sqrt{A}} + \log A\right) + \sqrt{A}.$$

Доказательство. Заметим, что утверждение леммы достаточно доказать для суммы

$$S = \sum_{1 \leqslant m \leqslant q/8} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i \left(\frac{mx}{q} + f(x)\right)} \right|.$$

Не ограничивая общности можно считать, что $f'' > 0$ и при $x \in [P_1, P_2]$ значения производной функции $f(x)$ лежат внутри отрезка, длина которого не превосходит $1/8$. В противном случае отрезок $[P_1, P_2]$ можно разбить на $O(\frac{P}{A} + 1) = O(1)$ более коротких отрезков, на каждом из которых это условие выполняется. Таким образом, значения производной функции $\frac{mx}{q} + f(x)$ изменяются внутри отрезка, длина которого не превосходит $1/4$. Если этот отрезок содержит полуцелое число, то

$$\left\| \frac{m}{q} + f'(x) \right\| \geqslant \frac{1}{4}$$

и, по лемме 5.15,

$$S \ll q \ll q\left(\frac{P}{\sqrt{A}} + \log A\right) + \sqrt{A}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда некоторого целого k при $1 \leqslant m \leqslant q/2$ и $x \in [P_1, P_2]$ значения производной функции $\frac{mx}{q} + f(x)$ лежат внутри отрезка $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$, то есть

$$k - \frac{1}{2} \leqslant \frac{m}{q} + f'(x) \leqslant k + \frac{1}{2} \qquad (1 \leqslant m \leqslant q/8, P_1 < x \leqslant P_2).$$

Определим целые числа m_1 и m_2 с помощью условий

$$\frac{m_1}{q} + f'(P_2) \leqslant k - \frac{1}{\sqrt{A}}, \qquad \frac{m_1 + 1}{q} + f'(P_2) > k - \frac{1}{\sqrt{A}};$$
$$\frac{m_2}{q} + f'(P_1) \geqslant k + \frac{1}{\sqrt{A}}, \qquad \frac{m_2 - 1}{q} + f'(P_1) < k + \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Сумму S запишем в виде

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant m < m_1} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i(\frac{mx}{q} + f(x))} \right|,$$

$$S_2 = \sum_{m_1 < m < m_2} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i(\frac{mx}{q} + f(x))} \right|,$$

$$S_3 = \sum_{m_2 \leqslant m \leqslant q/8} \left| \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} e^{2\pi i(\frac{mx}{q} + f(x))} \right|.$$

По лемме 5.15

$$S_1 \ll \sum_{1 \leqslant m < m_1} \frac{1}{k - \left(\frac{m}{q} + f'(P_2)\right)} < \int_0^{m_1} \frac{dm}{k - \left(\frac{m}{q} + f'(P_2)\right)} \ll q \cdot \log A.$$

Аналогично

$$S_3 \ll \sum_{m_2 < m \leqslant q/8} \frac{1}{\frac{m}{q} + f'(P_1) - k} < \int_{m_2}^{q/8} \frac{dx}{\frac{x}{q} + f'(P_1) - k} \ll q \cdot \log A.$$

К сумме S_2 применим лемму 5.16:

$$S_2 \ll (m_2 - m_1 + 1)\left(\frac{P}{\sqrt{A}} + \sqrt{A}\right) \ll (m_2 - m_1 + 1)\sqrt{A} \ll$$
$$\ll \left(q\left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{P}{A}\right) + 1\right)\sqrt{A} = q\left(1 + \frac{P}{\sqrt{A}}\right) + \sqrt{A}.$$

Складывая оценки для сумм S_1, S_2 и S_3, приходим к требуемой оценке суммы S. □

5.5. О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции

Лемма 5.18 (Формула суммирования Пуассона). *Пусть h — вещественная неотрицательная функция такая, что интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$$

существует как несобственный интеграл Римана. Предположим также, что h не убывает на интервале $(-\infty, 0]$ и не возрастает на $[0, \infty)$ Тогда

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{h(m+0) + h(m-0)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(n),$$

где оба ряда сходятся абсолютно и

$$\widehat{h}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi i n t}dt$$

— преобразование Фурье функции h.

Доказательство см. в [**33**, 11.24].

Доказательство теоремы 8 . Будем считать, что выполняются условия $A \gg 1$, $\max\{A, q\} \leqslant P^2$ и $\log(Aq) \ll \log P$, поскольку иначе доказываемая оценка хуже тривиальной.

Заметим, что утверждение теоремы достаточно доказать в предположении, что график функции $f(x)$ при $x \in [P_1, P_2]$ не проходит через точки целочисленной решетки. Действительно, если это условие не выполнено, то можно выбрать ε в пределах $0 < \varepsilon \leqslant A^{-1/3}$, так что для целых $x \in [P_1, P_2]$ числа $f(x) \pm \varepsilon$ не будут целыми. Если считать, что для функций $f \pm \varepsilon$ равенство (0.23) выполняется с остаточным членом (0.24), то, учитывая соотношения

$$T[f - \varepsilon] < T[f] \leqslant T[f + \varepsilon], \qquad S[f \pm \varepsilon] = S[f] + O(PA^{-1/3}),$$

получаем нужную оценку остаточного члена и для функции f.

Можно также предполагать, что $f \geqslant 2q$, поскольку в противном случае от функции f можно перейти к $f + 2q$.

Для $\Delta < 1/4$ и действительных α, β $(\beta - \alpha > \Delta)$ определим функции

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \beta; x) =& [\alpha < x \leqslant \beta], \\ \psi_{\mp}(\alpha, \beta; x) =& \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \psi\left(\alpha \pm \frac{\Delta}{2}, \beta \mp \frac{\Delta}{2}; x + t\right) dt, \end{aligned}$$

которые, очевидно, связаны неравенствами

$$\psi_-(\alpha, \beta; x) \leqslant \psi(\alpha, \beta; x) \leqslant \psi_+(\alpha, \beta; x).$$

Обозначим через $N(x)$ число решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ относительно неизвестной y, лежащей в пределах $1 \leqslant y \leqslant f(x)$. Тогда

$$N_-(x) \leqslant N(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \delta_q(xy - l) \cdot \psi\left(\frac{1}{2}, f(x); y\right) \leqslant N_+(x),$$

где

$$\begin{aligned} N_{\mp}(x) =& \sum_{y=-\infty}^{\infty} \delta_q(xy - l) \cdot \psi_{\mp}\left(\frac{1}{2}, f(x); y\right) = \\ =& \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_{\mp}\left(\frac{1}{2}, f(x); mq + k\right). \end{aligned}$$

При любом значении k функции

$$h_{\mp}(m) = \psi_{\mp}\left(\frac{1}{2}, f(x); mq + k\right)$$

удовлетворяют условиям леммы 5.18 (напомним, что по предположению, $f \geqslant 2q$). Поэтому к ним применима формула суммирования Пуассона и

$$\begin{aligned} N_{\mp}(x) =& \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\mp}\left(\frac{1}{2}, f(x); qv + k\right) e^{-2\pi i n v} dv\right) = \\ =& \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\mp}\left(\frac{1}{2}, f(x); u\right) e^{-2\pi i n \frac{u-k}{q}} du\right) = \\ =& \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \frac{nk}{q}} \cdot \widehat{\psi}_{\mp}\left(\frac{1}{2}, f(x); \frac{n}{q}\right). \end{aligned}$$

При $n = 0$

$$\widehat{\psi}_{\mp}\left(\frac{1}{2}, f(x); \frac{n}{q}\right) = f(x) - \frac{1}{2} \mp \Delta.$$

Если же $n \neq 0$, то

$$\widehat{\psi}_{\mp}\left(\frac{1}{2}, f(x); \frac{n}{q}\right) = q \cdot t_{\Delta}(N) \frac{e^{-2\pi i \frac{n}{q}(\frac{1}{2} \pm \frac{\Delta}{2})} - e^{-2\pi i \frac{n}{q}(f(x) \mp \frac{\Delta}{2})}}{2\pi i n},$$

где

$$t_\Delta(n) = \frac{\sin\frac{\pi n\Delta}{q}}{\frac{\pi n\Delta}{q}}, \quad |t_\Delta(n)| \leqslant T_\Delta(n) = \min\left\{1, \frac{q}{|n|\Delta}\right\}.$$

Следовательно,

$$N_\mp(x) = \frac{\mu_{q,l}(x)}{q}\left(f(x) - \frac{1}{2} \mp \Delta\right) + N_\mp^{(1)}(x) + N_\mp^{(2)}(x), \tag{5.25}$$

где

$$N_\mp^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{q}\delta_q(xk-l)\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' t_\Delta(n)\frac{e^{2\pi i\frac{n}{q}(k-\frac{1}{2}\mp\frac{\Delta}{2})}}{2\pi i n},$$

$$N_\mp^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{q}\delta_q(xk-l)\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' t_\Delta(n)\frac{e^{-2\pi i\frac{n}{q}(f(x)\mp\frac{\Delta}{2}-k)}}{2\pi i n}.$$

Далее,

$$T_-[f] \leqslant T[f] = \sum_{P_1<x\leqslant P_2} N(x) \leqslant T_+[f],$$

где

$$T_\mp[f] = \sum_{P_1<x\leqslant P_2} N_\mp(x).$$

Согласно замечанию 5.2

$$\sum_{P_1<x\leqslant P_2}\mu_{q,l}(x) = \frac{P}{q}\,K_q(l,0,0) + O(\sigma_0(q)\,\sigma_0(a)\,a).$$

Поэтому суммирование равенства (5.25) дает

$$T_\mp[f] = S[f] - \frac{P}{2q^2}\,K_q(l,0,0) + T_\mp^{(1)}[f] + T_\mp^{(2)}[f] + \tag{5.26}$$

$$+O\left(\frac{\Delta P}{q^2}\,K_q(l,0,0)\right) + O\left(\sigma_0(q)\,\sigma_0(a)\,a\right),$$

где

$$T_\mp^{(1,2)}[f] = \sum_{P_1<x\leqslant P_2} N_\mp^{(1,2)}(x).$$

Хорошо известно, что функция

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \{x\}, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

имеет следующее разложение в ряд Фурье

$$r(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i n x}}{n}.$$

Отсюда вытекает, что сглаженная функция

$$g(x) = \frac{q}{\Delta}\int_{-\Delta/(2q)}^{\Delta/(2q)}\left(\frac{1}{2} - \{x+t\}\right)dt$$

представима в виде

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{t_\Delta(n)}{n} \cdot e^{2\pi i n x}.$$

Для $x \in \left(\frac{\Delta}{2q}, 1 - \frac{\Delta}{2q}\right)$

$$g(x) = \frac{1}{2} - x + O\left(\frac{\Delta}{q}\right).$$

Следовательно,

$$N_{\mp}^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l) \cdot g\left(\frac{k}{q} - \frac{1}{2q} \mp \frac{\Delta}{2q}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{q} + \frac{1}{2q}\right) + O\left(\frac{\Delta \cdot \mu_{q,l}(x)}{q}\right).$$

Для нахождения $T_{\mp}^{(1)}[f]$ разобьем сумму по переменной x на отрезки, длина которых не превосходит q. Суммы

$$S' = \sum_{x,k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\frac{k}{q} \quad \text{и} \quad S'' = \sum_{x,k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\frac{q-k}{q}$$

связаны соотношениями

$$S' + S'' = K_q(l,0,0), \qquad S'' = S' - q\delta_q(l).$$

Значит,

$$S' = \frac{1}{2}\left(K_q(l,0,0) + q\,\delta_q(l)\right),$$

$$\sum_{x=1}^{q} N_{\mp}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{K_q(l,0,0)}{q} - q\delta_q(l)\right) + O\left(\frac{\Delta \cdot K_q(l,0,0)}{q}\right). \tag{5.27}$$

Кроме того, применяя к двойным суммам в тождестве

$$\sum_{x=1}^{P'}\sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\frac{k}{q} = \sum_{x=1}^{P'}\sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l) - \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q}\sum_{x=1}^{P'}\sum_{k=1}^{b-1} \delta_q(xk - l)$$

лемму 5.12, при $1 \leqslant P' \leqslant q$ получаем

$$\sum_{x=1}^{P'}\sum_{k=1}^{q} \delta_q(xk - l)\frac{k}{q} = \frac{P'}{2q}\,K_q(l,0,0) + O(\psi_l(q)).$$

Отсюда

$$\sum_{x=1}^{P'} N_{\mp}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{q^2}\,K_q(l,0,0) - P'\,\delta_q(l)\right) + O(\psi_l(q)) + O\left(\frac{\Delta \cdot P' \cdot K_q(l,0,0)}{q^2}\right). \tag{5.28}$$

Таким образом из (5.27) и (5.28) получаем, что

$$T_{\mp}^{(1)}[f] = \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} N_{\mp}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{q^2}\,K_q(l,0,0) - P\,\delta_q(l)\right) + \\ + O(\psi_l(q)) + O\left(\frac{\Delta\cdot P\cdot K_q(l,0,0)}{q^2}\right).$$

Подставляя последнюю формулу в (5.26), приходим к равенству

$$T_{\mp}[f] = S[f] - \frac{P}{2}\,\delta_q(l) + T_{\mp}^{(2)}[f] + O(\psi_l(q)) + O\left(\frac{\Delta\cdot P\cdot K_q(l,0,0)}{q^2}\right). \quad (5.29)$$

Оценим теперь слагаемое $T_{\mp}^{(2)}[f]$. Пользуясь соотношением

$$\sum_{k=0}^{q-1} \delta_q(xk-l)\,e^{-2\pi i\frac{nk}{q}} = \frac{1}{q}\sum_{m=1}^{q} K_q(l,m,n)\,e^{2\pi i\frac{mx}{q}},$$

запишем величину $N_{\mp}^{(2)}(x)$ в виде

$$N_{\mp}^{(2)}(x) = \frac{1}{q}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' t_{\Delta}(n)\sum_{m=1}^{q} K_q(l,m,n)\frac{e^{2\pi i(\frac{n}{q}(f(x)\mp\frac{\Delta}{2})-\frac{mx}{q})}}{2\pi i n}.$$

Отсюда

$$|T_{\mp}^{(2)}[f]| \ll \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{\Delta}(n)}{n}\sum_{m=1}^{q}|K_q(l,m,n)|\cdot\left|\sum_{P_1<x\leqslant P_2} e^{2\pi i\frac{mx-nf(x)}{q}}\right|.$$

По лемме 5.10

$$|T_{\mp}^{(2)}[f]| \ll \frac{\sigma_0(q)\,\sigma_0(a)}{q^{1/2}}\cdot S,$$

где $a = (l,q)$,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{\Delta}(n)}{n}\sum_{m=1}^{q}(lm,ln,mn,q)^{1/2}\cdot|S_q(m,n)|,$$

$$S_q(m,n) = \sum_{P_1<x\leqslant P_2} e^{2\pi i\frac{mx-nf(x)}{q}}.$$

Положим $\delta = (lm,ln,mn,q)$, $\delta_1 = (l,\delta)$ и преобразуем сумму S:

$$S = \sum_{\delta|q}\delta^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{\Delta}(n)}{n}\sum_{m=1}^{q}[(lm,ln,mn)=\delta]\cdot|S_q(m,n)| \leqslant \\ \leqslant \sum_{\delta|q}\delta^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{\Delta}(n)}{n}\left[\frac{\delta}{\delta_1}\mid n\right]\sum_{m=1}^{q}\left[\frac{\delta}{\delta_1}\mid m, \delta\mid mn\right]\cdot|S_q(m,n)|.$$

После замены переменных суммирования $m = \delta m_1/\delta_1$, $n = \delta n_1/\delta_1$ приходим к следующей оценке на сумму S :

$$S \leqslant \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta n_1/\delta_1)}{n_1} \sum_{m_1=1}^{\delta_1 q/\delta} \left[\delta_1^2 \mid \delta m_1 n_1\right] \cdot |S_q(\delta m_1/\delta_1, \delta n_1/\delta_1)| =$$

$$= \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta n_1/\delta_1)}{n_1} \sum_{m_1=1}^{\delta_1 q/\delta} \left[\frac{\delta_1^2}{\delta_2} \mid m_1 n_1\right] \cdot \left|S_{\delta_1 q/\delta}(m_1, n_1)\right|,$$

где $\delta_2 = (\delta_1^2, \delta)$. Далее положим $\delta_3 = (n_1, \delta_1^2/\delta_2)$. Тогда

$$S \leqslant \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta n_1/\delta_1)}{n_1} [(n_1, \delta_1^2/\delta_2) = \delta_3] \times$$

$$\times \sum_{m_1=1}^{\delta_1 q/\delta} \left[\frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} \mid m_1\right] \cdot \left|S_{\delta_1 q/\delta}(m_1, n_1)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n_2/\delta_1)}{\delta_3 n_2} \sum_{m_2=1}^{\frac{\delta_2\delta_3 q}{\delta\delta_1}} \left|S_{\delta_1 q/\delta}\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} m_2, \delta_3 n_2\right)\right|,$$

где $n_1 = \delta_3 n_2$, $m_1 = \frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} m_2$. Оценим сумму $S_{\delta_1 q/\delta}\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} m_2, \delta_3 n_2\right)$. Она зависит от функции

$$F(x) = \left(\frac{\delta_1^2}{\delta_2\delta_3} m_2 x - \delta_3 n_2 f(x)\right) \frac{\delta}{\delta_1 q},$$

для которой

$$F''(x) = \frac{\delta\delta_3 n_2}{\delta_1 q} f''(x) \asymp \frac{\delta\delta_3 n_2}{\delta_1 q A} = \frac{1}{A_1}, \qquad A_1 = \frac{\delta_1 q A}{\delta\delta_3 n_2}.$$

При $A_1 \geqslant P$ применим лемму 5.17, а при $A_1 < P$ — лемму 5.16. Тогда получим, что

$$S \ll S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n/\delta_1)}{\delta_3 n} \left(\frac{\delta_2\delta_3 q}{\delta\delta_1}\left(\frac{P}{A_1^{1/2}} + \log P\right) + A_1^{1/2}\right) [A_1 \geqslant P],$$

$$S_2 = \sum_{\delta|q} \frac{\delta_1}{\delta^{1/2}} \sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n/\delta_1)}{\delta_3 n} \cdot \frac{\delta_2\delta_3 q}{\delta\delta_1} \left(\frac{P}{A_1^{1/2}} + A_1^{1/2}\right) [A_1 < P].$$

Объединяя вместе слагаемые одного вида в суммах S_1, S_2 и пользуясь монотонностью $T_\Delta(n)$, приходим к оценке

$$S \ll S_3 + S_4 + S_5 + S_6, \tag{5.30}$$

где

$$
\begin{aligned}
S_3 =& PA^{-1/2}q^{1/2}\sum_{\delta|q}\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}\frac{\delta_2\delta_3^{1/2}}{\delta\delta_1^{1/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n/\delta_1)}{n^{1/2}},\\
S_4 =& q\log P\sum_{\delta|q}\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}\frac{\delta_2}{\delta^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(n)}{n},\\
S_5 =& A^{1/2}q^{1/2}\sum_{\delta|q}\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}\frac{\delta_1^{3/2}}{\delta\delta_3^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(n)}{n^{3/2}},\\
S_6 =& A^{1/2}q^{3/2}\sum_{\delta|q}\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}\frac{\delta_2\delta_1^{1/2}}{\delta^2\delta_3^{1/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(\delta\delta_3 n/\delta_1)}{n^{3/2}}\left[n>\frac{\delta_1 qA}{\delta\delta_3 P}\right].
\end{aligned}
$$

Пользуясь неравенством $T_\Delta(n)\leqslant\min\{1,q(\Delta|n|)^{-1}\}$ и рассматривая случаи $b\Delta>q$, $b\Delta\leqslant q$ получаем оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(bn)}{n^{1/2}}\ll\Big(\frac{q}{b\Delta}\Big)^{1/2}.$$

Отсюда

$$S_3\ll PA^{-1/2}\Delta^{-1/2}q\sum_{\delta|q}\frac{\delta_2}{\delta^{3/2}}\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}1.$$

Так как $\delta_1=(l,\delta)\mid\delta$, то $\delta_1\mid\delta_2=(\delta_1^2,\delta)$, $\delta_1^2/\delta_2\mid\delta_1$ и

$$\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}1\leqslant\sum_{\delta_3|\delta_1}1\leqslant\sigma_0(a).$$

Значит, согласно неравенству (5.13),

$$\sum_{\delta|q}\frac{\delta_2}{\delta^{3/2}}\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}1\ll\sigma_0(a)\,\sigma_{-1/2}^2(a). \tag{5.31}$$

и

$$S_3\ll\sigma_0(a)\,\sigma_{-1/2}^2(a)\,PA^{-1/2}\Delta^{-1/2}q. \tag{5.32}$$

Далее, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(n)}{n}\ll\log P,$$

то согласно (5.31)

$$S_4\ll q\log^2 P\sum_{\delta|q}\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}\frac{\delta_2}{\delta^{3/2}}\ll q\,\sigma_0(a)\,\sigma_{-1/2}^2(a)\log^2 P. \tag{5.33}$$

Для оценки суммы S_5 заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_\Delta(n)}{n^{3/2}}\ll 1.$$

Поэтому

$$S_5 \ll A^{1/2}q^{1/2}\sum_{\delta|q}\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}\frac{\delta_1^{3/2}}{\delta\delta_3^{3/2}} \ll A^{1/2}q^{1/2}\sum_{\delta|q}\frac{\delta_1^{3/2}}{\delta} \ll$$

$$\ll A^{1/2}q^{1/2}\sum_{\delta_1|(q,l)}\delta_1^{3/2}\sum_{\substack{\delta|q\\(\delta,l)=\delta_1}}\frac{1}{\delta} \ll A^{1/2}q^{1/2}\sigma_{-1}(q)\,\sigma_{1/2}(a).$$

Следовательно,

$$S_5 \ll A^{1/2}q^{1/2}a^{1/2}\sigma_{-1}(q)\,\sigma_{-1/2}(a). \tag{5.34}$$

При любых $N, k > 0$

$$\sum_{n>N}\frac{T_\Delta(kn)}{n^{3/2}} \leqslant \sum_{n>N}\frac{T_\Delta(kN)}{n^{3/2}} \ll \frac{T_\Delta(kN)}{N^{1/2}}.$$

Значит,

$$S_6 \ll P^{1/2}q\cdot T_\Delta\left(\frac{Aq}{P}\right)\sum_{\delta|q}\sum_{\delta_3|\delta_1^2/\delta_2}\frac{\delta_2}{\delta^{3/2}},$$

и, согласно (5.31),

$$S_6 \ll \sigma_0(a)\,\sigma_{-1/2}^2(a)\,P^{1/2}q\cdot T_\Delta\left(\frac{Aq}{P}\right).$$

Теперь, применяя неравенство

$$T_\Delta\left(\frac{Aq}{P}\right) = \min\left\{1, \frac{P}{\Delta A}\right\} \leqslant \left(\frac{P}{\Delta A}\right)^{1/2},$$

для суммы S_6 получаем оценку аналогичную (5.32)

$$S_6 \ll \sigma_0(a)\,\sigma_{-1/2}^2(a)\,PA^{-1/2}\Delta^{-1/2}q. \tag{5.35}$$

Подставляя оценки (5.32)–(5.35) в (5.30), приходим к оценке суммы S и остатка $T_{\mp}^{(2)}[f]$:

$$S \ll \sigma_0(a)\sigma_{-1/2}^2(a)(PA^{-1/2}\Delta^{-1/2}q + q\log^2 P) + \sigma_{-1}(q)\sigma_{-1/2}(a)A^{1/2}q^{1/2}a^{1/2},$$

$$T_{\mp}^{(2)}[f] \ll \sigma_0(q)\sigma_{-1/2}^2(a)\sigma_0^2(a)(PA^{-1/2}q^{1/2}\Delta^{-1/2} + q^{1/2}\log^2 P) +$$
$$+\sigma_0(q)\sigma_{-1}(q)\sigma_0(a)\sigma_{-1/2}(a)A^{1/2}a^{1/2}.$$

Подставляя последнюю оценку в (5.29) и пользуясь (5.18), приходим к утверждению теоремы с остаточным членом

$$R[f] \ll \Delta\cdot P\cdot q^{-1}\sigma_0(a) + a\cdot\sigma_0(q)\sigma_0(a)\log(q+1) +$$
$$+\sigma_0(q)\sigma_{-1/2}^2(a)\sigma_0^2(a)(PA^{-1/2}q^{1/2}\Delta^{-1/2} + q^{1/2}\log^2 P) +$$
$$+\sigma_0(q)\sigma_{-1}(q)\sigma_0(a)\sigma_{-1/2}(a)A^{1/2}a^{1/2}.$$

Выбор

$$\Delta = qA^{-1/3}\sigma_0^{2/3}(q)\sigma_0^{2/3}(a)\sigma_{-1/2}^{4/3}(a)$$

завершает доказательство теоремы. □

Замечание 5.3. В работе [**10**] теорема 8 доказана с остаточным членом

$$R[f] \ll a^{1/2}q^{\varepsilon}((PA^{-1/3} + A^{2/3})\log^{4/3} P + q^{1/2}\log^2 P).$$

Замечание 5.4. При использовании доказанной теоремы, как правило, наибольший вклад дает первое слагаемое из остаточного члена. Поэтому обычно можно использовать упрощенную оценку остаточного члена

$$R[f] \ll \sigma_0^{2/3}(q)\,\sigma_0^2(a)\,PA^{-1/3} + \left(A^{1/2}a^{1/2} + q^{1/2} + a\right)P^{\varepsilon}. \tag{5.36}$$

Замечание 5.5. При $q = 1$ доказанная теорема 8 превращается в известный результат о числе точек под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции, см. [**14**, лемма 4], а также [**70**, задача I.6.4].

Следствие 5.5. *В условиях теоремы 8 при* $l = 1$

$$T[f] = S[f] - \frac{P}{2}\cdot\delta_q(1) + R[f],$$

где при любом $\varepsilon > 0$

$$R[f] \ll \sigma_0^{2/3}(q)\left(PA^{-1/3} + A^{1/2}\sigma_{-1}(q) + q^{1/2}\log^2 P\right) \ll_{\varepsilon}$$
$$\ll_{\varepsilon} \sigma_0^{2/3}(q)\cdot PA^{-1/3} + P^{\varepsilon}\cdot\left(A^{1/2} + q^{1/2}\right).$$

Список литературы

[1] Авдеева М. О. Распределение неполных частных в конечных цепных дробях. — Владивосток: Дальнаука, 2000, препринт ДВО РАН, ХО ИПМ № 4.

[2] Авдеева М. О. О статистиках неполных частных конечных цепных дробей. — *Функц. анализ и его прил.* **38**: 2 (2004), 1–11.

[3] Авдеева М. О., Быковский В. А. *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса-Кузьмина.* — Владивосток, Дальнаука, 2002 (препринт).

[4] Арнольд И. В. *Теория чисел.* — Госуд. учебно-педагогическое изд-во Наркомпроса РСФСР, 1939.

[5] Арнольд В. И. *Задачи Арнольда.* — М.: Фазис, 2000.

[6] Арнольд В. И. *Цепные дроби.* — М.: МЦНМО, 2001.

[7] Бабенко К. И., Юрьев С. П. *Об одной задаче Гаусса.* — М., 1977. (Препринт ИПМ АН СССР, № 63.)

[8] Бабенко К. И. Об одной задаче Гаусса. — *ДАН СССР*, **238**:5 (1978), 1021–1024.

[9] Бабенко К. И. *Основы численного анализа.* — Москва-Ижевск: НИЦ "РХД", 2002.

[10] Быковский В. А. Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2), удовлетворяющих сравнению $a_1a_2 \equiv l \pmod q$. — *Записки научных семинаров ЛОМИ* **112** (1981), 5–25.

[11] Быковский В. А. Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей. — *ФПМ*, **11**: 6 (2005), 15–26.

[12] Быковский В. А., Устинов А. В Статистика траекторий частиц для однородной двумерной модели "Периодический газ Лоренца". — *Функц. анализ и приложения*, **42**: 3 (2008), 10–22.

[13] Виноградов И. М. *Основы теории чисел.* — М.: Наука, 1972.

[14] Виноградов И. М. *Особые варианты метода тригонометрических сумм.* — М.: Наука, 1976.

[15] Гнеденко Б. В. *Курс теории вероятностей.* (Дополнение.) — М.: Наука, 1988.

[16] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* — М.: Мир, 1998.

[17] Ибрагимов И. А. Одна теорема из метрической теории цепных дробей. — *Вестник Ленингр. Унив.*, **16**: 1 (1961), 13–24.

[18] Кадменский А. Г., Самарин В. В., Тулинов А. Ф. Регулярное и стохастическое движение в кристалле при каналировании. Эволюция потока частиц в толстом кристалле. — *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, т. 34 (2003), вып. 4, 822–868.

[19] Карацуба А. А. *Основы аналитической теории чисел.* — М.: Наука, 1983.

[20] Кнут Д. Э. *Искусство программирования, т. 2. Получисленные алгоритмы.* — М., Санкт-Петербург, Киев: Вильямс, 2000.

[21] Коробов Н. М. *Тригонометрические суммы и их приложения.* — М.: Наука, 1989.

[22] Кумахов М. А., Ширмер Г. *Атомные столкновения в кристаллах.* — М.: Атомиздат, 1980.

[23] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа, т. 2.* — М.: Наука, 1978.

[24] Синай Я. Г. Эргодические свойства газа Лоренца. — *Функциональный анализ и его приложения*, **13**: 3 (1979), 46–59.
[25] Устинов А. В. О статистических свойствах конечных цепных дробей. — *Записки научн. семин. ПОМИ*, **322** (2005), 186–211.
[26] Устинов А. В. О статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей. — *Фунд. и прикл. математика* **11** (2005), 195–208.
[27] Устинов А. В. Вычисление дисперсии в одной задаче из теории цепных дробей. — *Мат. сборник*, **198**: 6 (2007), 139–158.
[28] Устинов А. В. Короткое доказательство тождества Эйлера для континуантов. — *Мат. заметки*, **79**: 1 (2006), 155–156.
[29] Устинов А. В. О среднем числе шагов в алгоритме Евклида. — *Материалы IX краевого конкурса молодых ученых*, Хабаровск, ТОГУ (2007), 149–157.
[30] Устинов А. В. Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида. — *Известия РАН*, **72**: 5 (2008), 189–224.
[31] Устинов А. В. О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции. — *Алгебра и анализ*, **20**: 5 (2008), 186–216.
[32] Хинчин А. Я. *Цепные дроби.* — М.: Наука, 1978.
[33] Apostol T. M. *Mathematical analysis* — Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1974.
[34] Baladi V., Vallée B. Euclidean algorithms are Gaussian. — *J. Number Theory*, **110** (2005), 331–386.
[35] Berndt B. C. *Ramanujan's notebooks. Part I* — Springer-Verlag, 1985.
[36] Boca F. P., Gologan R. N., Zaharescu A. The statistics of the trajectory of a certain billiard in a flat two-torus, *Comm. Math. Phys.*, **240**: 1–2 (2003), 53–73.
[37] Daudé H., Flajolet P., Vallée B. An average-case analysis of the Gaussian algorithm for lattice reduction. — *Combin. Probab. Comput.*, **6** (1997), 397–433.
[38] Dixon J. D. The Number of Steps in the Euclidean Algorithm. — *J. of Number Theory*, **2** (1970), 414–422.
[39] Dixon J. D. A simple estimate for the number of steps in the Euclidean algorithm. — *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971), 374–376.
[40] Estermann T. On Kloosterman's sum. — *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.
[41] Finch S. R. *Mathematical constants*, (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **94**.) — Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
[42] Finch S. R. Continued fraction transformation. — unpublished note (2007), `http://algo.inria.fr/csolve/kz.pdf` .
[43] Flajolet Ph., Vallée B. Continued fraction algorithms, functional operators, and structure constants. — *Theoret. Comput. Sci.*, **194**: 1-2 (1998), 1–34.
[44] Flajolet Ph., Vallée B. Continued fractions, comparison algorithms, and fine structure constants. — *Constructive, Experimental et Non-Linear Analysis*, Proceedings of Canadian Mathematical Society, **27** (2000), 53–82.
[45] Graham S. W., Kolesnik G. *van der Corput's method of exponential sums.* — Cambridge University Press, 1991.
[46] Hardy G. H., Write E. M. *An Introduction to the Number Theory.* — Clarendon Press, Oxford, 1979.
[47] Heath-Brown D. R. The fourth power moment of the Riemann zeta function Proc. — *London Math. Soc.* (3), 1979, 38, 385–422.
[48] Heath-Brown D. Arithmetic applications of Kloosterman sums. — Nieuw Arch. Wiskd., **5/1** (2000), 380–384.
[49] Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions. — *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis*, Berlin, VEB (1968), 89–96.

[50] Hensley D. The Number of Steps in the Euclidean Algorithm. — *J. of Number Theory*, **49** (1994), 142–182.

[51] Hooley C. On the number of divisors of a quadratic polynomial. *Acta Math.*, **110** (1963), 97–114.

[52] Jutila M. The fourth moment of Riemann's zeta-function and the additive divisor problem. — *Analytic number theory, Vol. 2*, Birkhäuser Boston, **139** (1996), 517–536.

[53] Khintchine A. Ya. Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen. — *Mathematische Zeitschrift*, **18**: 1 (1923), 289–306. (Имеется перевод: Хинчин А. Я. *Избранные труды по теории чисел.* Одна теорема о непрерывных дробях и ее арифметические приложения. — М., МЦНМО, 2006.)

[54] Kloosterman H. D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ — *Acta Math.*, **49** (1927), 407–464.

[55] Knuth D. E., Yao, A. C. Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors. — *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **72**: 12 (1975), 4720–4722.

[56] Knuth D. E. Evaluation of Porter's Constant. — *Comp. and Maths. with Appls.*, **2** (1976), 137–139.

[57] Kuz'min R. O. Sur un problème de Gauss — *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologna, **6** (1928), 83–89.

[58] Lévy P. Sur les lois de probabilité dont dependent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue. — *Bull. Soc. Math. France*, **57** (1929), 178–194.

[59] Lewin L. *Polylogarithms and associated functions.* — New York: Elsevier North Holland, 1981.

[60] Lhote L. *Modélisation et approximation de sources complexes.* — Masters thesis, University of Caen (2002).

[61] Lhote L. Computation of a class of continued fraction constants. — *Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO)*, Proc. 2004 New Orleans workshop.

[62] Marklof J., Strömbergsson A. The distribution of free path lengths in the periodic Lorentz gas and related lattice point problems. — arXiv:math/0706.4395v1.

[63] Norton G. H. On the asymptotic analysis of the Euclidean algorithm. — *J. Symbolic Comput.* **10**:1 (1990), 53–58.

[64] Perron O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen (Band 1).* — Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1954.

[65] Philipp W. Ein zentraler Grenzwertsatz mit Anwendungen auf die Zahlentheorie. — *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **8** (1967), 185–203.

[66] Philipp W., Stackelberg O. P. Zwei Grenzwertsätze für Kettenbrüche. — *Math. Annalen*, **181** (1969), 152–156.

[67] Philipp W. Some metrical theorems in number theory. II. — *Duke Math. J.* **37** (1970), 447–458; errata **37** (1970), 788.

[68] Porter J. W. On a theorem of Heilbronn. — *Mathematika*, **22**: 1 (1975), 20–28.

[69] Spitzer F. *Principles of Random Walks.* — New York: Van Nostrand, 1964.

[70] Tenenbaum G. *Introduction to analytic and probabilistic number theoryh.* — Cambridge University Press, 1995.

[71] Tonkov T. The mean length of finite continued fractions. — *Math. Balkanica*, **4** (1974), 617–629.

[72] Tonkov T. On the average length of finite continued fractions. — *Acta Arith.*, **26** (1974/75), 47–57.

[73] Vallée B. Opérateurs de Ruelle-Mayer généralisés et analyse en moyenne des algorithmes d'Euclide et de Gauss. — *Acta Arith.* **81** (1997), 101–144.

[74] Vallée B. Dynamique des fractions continues contraintes priodiques. — *Journal of Number Theory*, **72**: 2 (1998), 183–235.

[75] Vallée B. A Unifying Framework for the Analysis of a Class of Euclidean Algorithms. — *Proceedings of LATIN'2000*, Lecture Notes in Computer Science 1776, Springer, 343–354.

[76] Weisstein E. W. *CRC concise encyclopedia of mathematics.* — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.

[77] Wirsing E. On the theorem of Gauss-Kusmin-Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces. — *Acta Arith.* **24** (1974), 507–528.