О статистических свойствах элементов цепных дробей

А. В. Устинов*

УДК 511.2+517.524+517.987.5

Для действительного α в квадратных скобках будет записываться каноническое разложение в цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_s, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_s + \dots}}},$$

где $a_0 = [\alpha]$ (целая часть α), $a_1, \dots, a_s, \dots$ — неполные частные (натуральные числа). Через $p_n/q_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ будем обозначать подходящие дроби к α.

Предположим, что $R > 1$ — растущий параметр, и целое $s \geqslant 1$ определено неравенствами $q_{s-1} \leqslant R < q_s$. В различных задачах теории динамических систем и теории чисел возникает необходимость в знании совместного предельного распределения величин q_{s-1}/R, R/q_s, $a_{s-K}, \dots, a_{s+K}$ (K — константа), когда α есть случайное число из интервала $(0, 1)$ (см. [1, 4, 5]). В статье [4] методами эргодической теории доказано существование такого распределения. Важно также знать, что оно же получается и в случае, когда α — случайное рациональное число вида a/b, где $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant R^2$, $(a, b) = 1$ (см. [1]).

В настоящей работе это распределение выписано явно, и доказано, что оно одинаково в непрерывном и дискретном случаях.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц $S = \left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right)$ с определителем $\det S = \pm 1$, у которых $1 \leqslant Q \leqslant Q'$, $0 \leqslant P \leqslant Q$, $1 \leqslant P' \leqslant Q'$. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ — действительное число. Тогда рациональные числа P/Q и P'/Q', для которых $S = \left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$, будут последовательными подходящими дробями к α (отличными от α) тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = S^{-1}(\alpha) < 1$$

*Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 07-01-00306, проекта ДВО РАН 06-III-A-01-017 и Фонда содействия отечественной науке

(см. [3, лемма 1]). При этом если $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$, то для некоторого $s \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{P}{Q} &= [0; a_1, \ldots, a_{s-1}], \quad \frac{P'}{Q'} = [0; a_1, \ldots, a_s], \\
\frac{Q}{Q'} &= [0; a_s, \ldots, a_1], \quad \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = [0; a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots].
\end{aligned} \tag{1}
$$

Поэтому за распределение неполных частных $a_{s-K}, \ldots, a_{s+K}$ отвечают статистики Гаусса-Кузьмина дробей Q/Q' и $(Q'\alpha - P')/(-Q\alpha + P)$.

Для действительных $\alpha, x_1, x_2, y_1, y_2 \in (0,1)$ обозначим через $N_{x_1,x_2,y_1,y_2}(\alpha, R)$ число решений системы неравенств

$$
0 < S^{-1}(\alpha) \leqslant x_1, \quad Q \leqslant x_2 Q', \quad Q \leqslant y_1 R, \quad R \leqslant y_2 Q', \tag{2}
$$

в которой неизвестными являются коэффициенты матрицы $S = \left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$. Положим

$$
N(R) = N_{x_1,x_2,y_1,y_2}(R) = \int_0^1 N_{x_1,x_2,y_1,y_2}(\alpha, R)\, d\alpha
$$

и введем функцию

$$
F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{2}{\zeta(2)} \left(\log(1 + x_1 x_2) \log \frac{y_1 y_2}{x_2} - \mathrm{Li}_2(-x_1 x_2) \right), & \text{если } x_2 \leqslant y_1 y_2; \\ -\frac{2}{\zeta(2)} \mathrm{Li}_2(-x_1 y_1 y_2), & \text{если } x_2 > y_1 y_2, \end{cases}
$$

где $\mathrm{Li}_2(\cdot)$ — дилогарифм Эйлера

$$
\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt.
$$

Теорема 1. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда*

$$
N(R) = F(x_1, x_2, y_1, y_2) + O\left(\frac{x_1 y_2 \log R}{R} \right).
$$

Доказательство. Каждому числу $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$ с помощью равенств (1) поставим в соответствие матрицу $S \in \mathcal{M}$, для которой $Q \leqslant R < Q'$. При этом неравенства $0 < S^{-1}(\alpha) \leqslant x_1$ будут задавать интервал $I_{x_1}(S)$ внутри $(0,1)$ длины

$$
|I_{x_1}(S)| = \left| \frac{P' + x_1 P}{Q' + x_1 Q} - \frac{P'}{Q'} \right| = \frac{x_1}{Q'(Q' + x_1 Q)}.
$$

Значит,

$$
N(R) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}} \chi_{[0, x_2 Q']}(Q) \chi_{[0, y_1 R]}(Q) \chi_{[0, y_2 Q']}(R) \frac{x_1}{Q'(Q' + x_1 Q)},
$$

где $\chi_I(\cdot)$ — характеристическая функция интервала I. Строку (вторую) (Q, Q') можно дополнить до матрицы из $\mathcal{M}$ ровно двумя способами. Поэтому

$$N(R) = 2 \sum_{Q' \geqslant R/y_2} \sum_{(Q,Q')=1} \chi_{[0,x_2Q']}(Q)\chi_{[0,y_1R]}(Q) \frac{x_1}{Q'(Q' + x_1Q)}. \tag{3}$$

Рассмотри случай, когда $x_2 \leqslant y_1y_2$. По формуле обращения Мёбиуса получаем

$$\begin{aligned} N(R) =& 2\sum_{d\leqslant R} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{R/(y_2d)\leqslant Q'<y_1R/(x_2d)} \sum_{Q\leqslant x_2Q'} \frac{x_1}{Q'(Q' + x_1Q)} + \\ &+2\sum_{d\leqslant R} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{Q'\geqslant y_1R/(x_2d)} \sum_{Q\leqslant y_1R/d} \frac{x_1}{Q'(Q' + x_1Q)} = \\ =& \frac{2}{\zeta(2)} \left(\log(1 + x_1x_2) \log \frac{y_1y_2}{x_2} + \int_{1/(x_1x_2)}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t} \right) + O\left(\frac{x_1y_2 \log R}{R}\right), \end{aligned}$$

что приводит к нужному равенству. Случай $x_2 > y_1y_2$ рассматривается аналогично. $\square$

Рассмотрим теперь сумму

$$L(R) = L_{x_1,x_2,y_1,y_2}(R) = \sum_{b\leqslant R^2} \sum_{\substack{a\leqslant b \\ (a,b)=1}} N_{x_1,x_2,y_1,y_2}\left(\frac{a}{b}, R\right).$$

Теорема 2. *Пусть $R \geqslant 2$. Тогда*

$$\frac{2\zeta(2)}{R^4} L(R) = F(x_1, x_2, y_1, y_2) + O\left(\frac{x_1(y_1 + y_2) \log^2 R}{R}\right).$$

Доказательство. Для данного числа $\alpha = a/b$ и некоторого решения системы (2) определим целые m и n с помощью равенств $mP + nP' = a, mQ + nQ' = b$. Тогда система (2) перепишется в виде

$$\begin{gathered} mP + nP' = a, \quad mQ + nQ' = b, \\ 0 < m/n \leqslant x_1, \quad 0 < Q/Q' \leqslant x_2, \quad Q \leqslant y_1R, \quad R \leqslant y_2Q'. \end{gathered}$$

Суммируя ее решения по a и b, получаем, что сумма $L(R)$ равна числу решений системы

$$mQ + nQ' \leqslant R^2, \quad 0 < m/n \leqslant x_1, \quad 0 < Q/Q' \leqslant x_2, \quad Q \leqslant R < Q',$$

где $\left(\begin{smallmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}$, $0 \leqslant m \leqslant n$, $(m, n) = 1$. Снова при известных Q и Q' значения P и P' находятся ровно двумя способами. Кроме того, число решений полученной системы относительно m и n равно (см. [2, гл. II, зад. 21–22])

$$\frac{R^4}{2\zeta(2)}\cdot\frac{x_1}{Q'(Q'+x_1Q)}+O\left(\frac{x_1R^2\log R}{Q'}\right).$$

Таким образом приходим к сумме, аналогичной (3):

$$L(R)=\frac{R^4}{\zeta(2)}\sum_{R/y_2\leqslant Q'\leqslant R^2}\ \sum_{\substack{Q\leqslant\min\{y_1R,x_2Q'\}\\(Q,Q')=1}}\frac{x_1}{Q'(Q'+x_1Q)}+O(x_1y_1R^3\log^2 R).$$

Значит,

$$L(R)=\frac{R^4}{\zeta(2)}N(R)+O(x_1y_1R^3\log^2 R),$$

и теорема 2 следует из теоремы 1. □

Замечание. При $x_2=y_1=y_2=1$ получаем функцию распределения

$$F(x)=F(x,1,1,1)=-\frac{2}{\zeta(2)}\mathrm{Li}_2(-x),$$

отличную от функции Гаусса-Кузьмина $\log_2(1+x)$. Кроме того, при $x\to 0$ функция $F(x)$ (вместе с остаточными членами в теоремах 1 и 2) убывает линейно: $F(x)\sim 2x/\zeta(2)$. Отсюда, в частности, следует, что математическое ожидание неполного частного a_s (определяемого условиями $q_{s-1}\leqslant R<q_s$) равно бесконечности.

Список литературы

[1] Бургейн Ж., Синай Я. Г. Предельное поведение больших чисел Фробениуса. — *Успехи мат. наук*, **62**:4 (2007), 77—90.

[2] Виноградов И. М. *Основы теории чисел.* — М.: Наука, 1972.

[3] Устинов А. В. О статистических свойствах конечных цепных дробей. — *Записки научн. семин. ПОМИ*, **322** (2005), 186–211.

[4] Sinai Ya. G., Ulcigrai C. Renewal-type limit theorem for Gauss map and continued fractions. — *Ergodic Theory & Dynam. Sys.*, **28** (2008), 643—655.

[5] Sinai Ya. G., Ulcigrai C. A limit theorem for Birkhoff sums of non-integrable functions over rotations. — *Probabilistic and Geometric Structures in Dynamics (Contemporary Mathematics*, Eds. K. Burns, D. Dolgopyat and Ya. Pesin. AMS, Providence, RI, 2008.