УДК 511.33+519.21

В.А.Быковский, А.В.Устинов

СТАТИСТИКА ТРАЕКТОРИЙ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ СИНАЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКИ

Аннотация

В связи с двумерной моделью "Периодический газ Лоренца" в работе изучается асимптотическое поведение статистических характеристик участка свободного пробега точечной частицы до первого попадания в h-окрестность (круг радиуса h) ненулевой целой точки при $h \to 0$, выпущенной из h-окрестности начала координат. Вычислена предельная функция распределения длины свободного пробега и входного прицельного параметра (расстояние от траектории до интересующей нас целой точки) при заданном значении выходного прицельного параметра. Ранее этот вопрос был изучен для частицы, вылетающей из начала координат (однородный случай).

Обозначения

1. $\|x\|$ — расстояние от вещественного x до ближайшего целого числа.
2. $\varphi(d)$ — количество целых, взаимно простых с d, от 1 до d (функция Эйлера).
3. $\mu(d)$ — функция Мебиуса.
4. $\delta_q(a) = 1$, если целое a делится на q, и $\delta_q(a) = 0$ в остальных случаях (функция делимости на q).

В.А.Быковский. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS грант № 03-51-5070, фонда РФФИ, грант № 07-01-00306 и проекта ДВО РАН 06-I-П-13-047).

А.В.Устинов Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS грант № 03-51-5070, фонда РФФИ, грант № 07-01-00306 и проекта ДВО РАН 06-III-А-01-017).

5. Конечные разности функции от двух переменных $f(m, n)$:

$$\Delta_{1,0} f(m, n) = f(m + 1, n) - f(m, n),$$

$$\Delta_{0,1} f(m, n) = f(m, n + 1) - f(m, n),$$

$$\Delta_{1,1} f(m, n) = \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0} f)(m, n) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1} f)(m, n).$$

Введение

При изучении движущихся в кристалле достаточно быстрых частиц, траектории которых обусловлены главным образом многократным их рассеянием на ядрах, мы приходим к следующей достаточно естественной математической конструкции.

Зафиксируем вещественные h и v из интервалов $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ и $(-1, 1)$ соответственно. Ориентированная в направлении $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, параметрически заданная прямая

$$\left\{(-hv \sin\varphi + t\cos\varphi,\ hv\cos\varphi + t\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in (-\infty, \infty)\right\} \qquad (1)$$

на плоскости при $t = 0$ проходит через ближайшую к началу координат $O = (0, 0)$ точку $O' = (-hv \sin\varphi, hv\cos\varphi)$ (проекция O на прямую (1)). Еще одно параметрическое представление

$$\left\{(x - t' \sin\varphi,\ y + t' \cos\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid t' \in (-\infty, \infty\right\} \qquad (2)$$

определяет перпендикулярную к (1) прямую, проходящую при $t' = 0$ через точку (x, y). Они пересекаются в некоторой точке $M = M(\varphi)$ при

$$t = R(x, y) = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$

$$t' = U(x, y) = x\sin\varphi - y\cos\varphi + hv.$$

Среди всех целочисленных точек (m, n) на плоскости с условиями

$$R(m, n) > 0 \quad \text{и} \quad |U(m, n)| < h$$

выберем ту из них — $(m(\varphi), n(\varphi))$, для которой величина $R(m, n)$ принимает минимальное значение. Такая точка $(m(\varphi), n(\varphi))$ всегда найдется, поскольку по теореме Минковского о выпуклом теле существует целочисленная пара $(m,n)\neq(0,0)$, для которой

$$|m\cos\varphi+n\sin\varphi|<\left(h(1-|v|)\right)^{-1},\quad |m\sin\varphi-n\cos\varphi|\leqslant h(1-|v|).$$

При этом

$$|U(m,n)|=|m\sin\varphi-n\cos\varphi+hv|<h(1-|v|)+h|v|=h.$$

Назовем h-окрестностью точки (x,y) открытый круг радиуса h с центром в (x,y). Тогда $(m(\varphi),n(\varphi))$ — такая целочисленная точка $(m,n)\neq(0,0)$, h-окрестность которой в первый раз пересекает частица, движущаяся по прямой (1) из точки O' в положительном направлении. Отсюда немедленно следует единственность пары $(m(\varphi),n(\varphi))$. Положим

$$r(\varphi)=hR\left(m(\varphi),n(\varphi)\right),\quad u(\varphi)=h^{-1}U\left(m(\varphi),n(\varphi)\right).$$

При этом

$$0<r(\varphi)<\frac{1}{1-|v|}\quad\text{и}\quad -1<u(\varphi)<1.$$

Ориентируясь на терминологию из ядерной физики, назовем $r=r(\varphi)$ нормированным *свободным пробегом*, а v и $u=u(\varphi)$ нормированным *выходным* и *входным прицельными параметрами.*

Пусть

$$0<r_0<\frac{1}{1-|v|}\quad\text{и}\quad -1<u_-<u_+<1,$$

а также $\chi_I(\dots)$ — характеристическая функция промежутка I на прямой $(-\infty,\infty)$. Главным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть* $|v|<c<1$. *Тогда при любом* $\varepsilon>0$ *для функции распределения*

$$\Phi_v(h)=\Phi_v(h;\varphi_0,r_0,u_-,u_+)=$$
$$=\int\limits_0^{\varphi_0}\chi_{[0,r_0]}\left(r(\varphi)\right)\chi_{[u_-,u_+]}\left(u(\varphi)\right)d\varphi$$

при $h \to 0$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\Phi_v(h) = \int\limits_0^{\varphi_0} \int\limits_0^{r_0} \int\limits_{u_-}^{u_+} \rho(\varphi, r, v, u) d\varphi dr du + O_{\varepsilon,c}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right),$$

равномерная по v, u_-, u_+ *и* $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ *с плотностью*

$$\rho(\varphi, r, v, u) = \rho(r, v, u) = \rho(r, u, v) = \rho(r, -u, -v),$$

которая при $u \geqslant v$ *и* $u + v \geqslant 0$ *имеет вид*

$$\rho(r, u, v) = \begin{cases} \dfrac{6}{\pi^2}, & \textit{если } u \leqslant \dfrac{1}{r} - 1; \\ \dfrac{6}{\pi^2} \dfrac{1}{u - v} \left(\dfrac{1}{r} - 1 - v\right), & \textit{если } v \leqslant \dfrac{1}{r} - 1 < u; \\ 0, & \textit{если } \dfrac{1}{r} - 1 < v. \end{cases}$$

Замечание 1. *С физической точки зрения функцию* $\rho(r, v, u)$ *можно интерпретировать как плотность частиц, движущихся прямолинейно с единичной скоростью под углом* φ *после первого рассеяния с выходным прицельным параметром* $V = hv$ *в* h-*окрестности некоторого узла целочисленной решетки, которые проходят расстояние* $R = h^{-1}r$ *до повторного рассеяния с входным прицельным параметром* hu.

Замечание 2. *Плотность* $\rho(r, v, u)$ *не зависит от угла* φ *(изотропность). Ее симметрия относительно замены* (v, u) *на* (u, v), $(-u, -v)$, $(-v, -u)$ *объясняется изотропностью и "обратимостью" траекторий частиц.*

Замечание 3. *Эргодичность рассматриваемой модели "Периодический газ Лоренца" была доказана Я.Г.Синаем [2]. Ему же принадлежит постановка рассматриваемой задачи в простейшем варианте* ($v = 0$, $u_- = -1$, $u_+ = 1$, $\varphi_0 = 2\pi$).

Замечание 4. *При $v = 0$ (однородная задача) теорема была доказана в [3]. В простейшей постановке из предыдущего замечания более ранний результат на эту тему был получен в [4] с худшей оценкой остаточного члена в виде $O_\varepsilon\left(h^{\frac{1}{8}-\varepsilon}\right)$.*

Замечание 5. *Из результатов работы [6], доказанных эргодическими методами, основанными на теореме Ратнер о классификации инвариантных эргодических мер под действием унипотентных потоков, следует существование предела функции $\Phi_v(h)$ при $h \to 0$ в частном случае с $\varphi_0 = 2\pi$. Этого недостаточно для доказательства свойства изотропности.*

Замечание 6. *Рассматриваемая в работе двумерная модель представляет определенный интерес для теории каналирования частиц, движущихся параллельно кристаллографическим плоскостям (см.[7] и [8]).*

§ 1. Свойства целочисленных пар $(m(\varphi), n(\varphi))$

В соответствии с определениями

$$h^{-1}r\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = n\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi - m\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi,$$

$$hu\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = n\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi + m\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi + hv.$$

Так как при повороте плоскости на угол $\pi/2$ вокруг начала координат множество целых точек переходит в себя и ориентация сохраняется, то выходной прицельный параметр v не меняется и

$$r\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = r(\varphi), \quad u\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = u(\varphi).$$

Поэтому

$$m\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = -n(\varphi), \quad n\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = m(\varphi).$$

Далее,

$$h^{-1}r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\varphi + m\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\sin\varphi,$$

$$hu\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = -n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\sin\varphi + m\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\varphi + hv.$$

Речь идет о зеркальной симметрии относительно прямой $y = x$. И в этом случае множество целых точек на плоскости переходит в себя. Однако, ориентация меняется на противоположную. Поэтому выходной прицельный параметр v переходит в $-v$ и

$$r\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = r(\varphi), \quad u\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = -u(\varphi),$$

$$m\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = n(\varphi), \quad n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = m(\varphi).$$

Подытоживая вышесказанное и принимая во внимание равенство $\rho(t,u,v) = \rho(t,-u,-v)$, мы можем заключить, что теорему из введения достаточно доказать для случая $\varphi_0 \in (0, \pi/4)$.

На самом деле удобнее работать с другой параметризацией угла наклона траектории: $\alpha = \alpha(\varphi) = \operatorname{tg}\varphi \in (0,1)$. При этом

$$\sin\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$R(x,y) = \frac{x+\alpha y}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad U(x,y) = \frac{\alpha x - y}{\sqrt{1+\alpha^2}} + hv,$$

$$r(\varphi) = h\frac{m(\varphi)+\alpha n(\varphi)}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad u(\varphi) = \frac{\alpha m(\varphi) - n(\varphi)}{h\sqrt{1+\alpha^2}} + v.$$

Лемма 1. *Числа $m(\varphi)$ и $n(\varphi)$ взаимно просты.*

Доказательство. Предположим, что

$$\text{НОД}(m(\varphi), n(\varphi)) = q > 1.$$

Положив $m = m(\varphi)/q$ и $n = n(\varphi)/q$, получим

$$|U(m,n)| = \left|\frac{\alpha m - n}{\sqrt{1+\alpha^2}} + hv\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{q}\,\frac{\alpha m(\varphi) - n(\varphi)}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{1}{q}hv + \frac{q-1}{q}hv\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{q}U(m(\varphi), n(\varphi)) + \frac{q-1}{q}hv\right| < \frac{1}{q}h + \frac{q-1}{q}h = h.$$

При этом

$$R(m,n) = \frac{1}{q} R(m(\varphi), n(\varphi)) < R(m(\varphi), n(\varphi)),$$

что противоречит определению пары $(m(\varphi), n(\varphi))$. Значит, наше предположение неверно и $q = 1$.

Заметим, что равенство

$$(m(\varphi), n(\varphi)) = (0,1) \quad \text{или} \quad (1,1)$$

выполняется только для $\alpha \in (0, \theta_0)$ в первом случае и $\alpha \in (\theta_1, 1)$ во втором, где ϑ_0 и ϑ_1 — корни уравнений

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + hv = h \quad \text{и} \quad \frac{\alpha - 1}{\sqrt{1+\alpha^2}} + hv = -h$$

из интервала (0,1). При этом

$$0 < \vartheta_0 < \sqrt{8}h < 1 - \sqrt{8}h < \vartheta_1 < 1, \tag{1.1}$$

Положим

$$\mathcal{M} = \left\{ (m,n) \in \mathbb{N}^2 \,|\, 0 < n < m, \quad \text{НОД}(m,n) = 1 \right\}$$

Подытожим вышесказанное в следующем виде.

Замечание 7. *Для любого числа $\alpha \in [\vartheta_0, \vartheta_1]$ пара $(m(\varphi), n(\varphi))$ лежит в множестве $\mathcal{M}$.*

Пусть $(m,n) \in \mathcal{M}$. Определим натуральные m_+ и m_- из условий:

$$nm_\pm \equiv \pm 1 (\mathrm{mod} m), \qquad 0 < m_\pm < m. \tag{1.2}$$

Положим также

$$n_- = \frac{nm_- + 1}{m}, \quad n_+ = \frac{nm_+ - 1}{m}. \tag{1.3}$$

Из определения немедленно следует

Замечание 8. *Пара* $(m,n)\in\mathcal{M}$ *однозначно определяется по* (m,m_+) *или* (m,m_-).

Лемма 2. *Для целых чисел* m_+,m_-,n_+,n_-, *однозначно определяемых парой* $(m,n)\in\mathcal{M}$, *выполняются следующие свойства:*

1) $0\leqslant n_+<m_+<m$ *и* $1\leqslant n_-\leqslant m_-<m$;

2) $(m_+,n_+)+(m_-,n_-)=(m,n)$;

3) $nm_+-n_+m=n_-m-nm_-=n_-m_+-n_+m_-=1$.

Доказательство. Пункт 1) непосредственно следует из равенств (1.3). Складывая сравнения из (1.2), получим еще одно

$$(m_++m_-)n\equiv 0(\mathrm{mod}\, m).$$

Поскольку n взаимно просто с m, то $m_++m_-=km$ при некотором натуральном k. Но $m_++m_-<2m$ и поэтому $k=1$. Складывая равенства из (1.3), получим и второе соотношение: $n_++n_-=n$. Тем самым пункт 2) доказан. И, наконец, в соответствии с (1.3),

$$1=\det\begin{pmatrix} n & n_+\\ m & m_+\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} n_- & n\\ m_- & m\end{pmatrix}=$$
$$=\det\begin{pmatrix} n_- & n_++n_-\\ m_- & m_++m_-\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} n_- & n_+\\ m_- & m_+\end{pmatrix}.$$

А это и утверждается в пункте 3). Лемма 2 полностью доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha=\alpha(\varphi)\in[\vartheta_0,\vartheta_1]$. *Пара* $(m,n)\in\mathcal{M}$ *совпадает с* $(m(\varphi),n(\varphi))$ *тогда и только тогда, когда*

$$U(m_+,n_+)\geqslant h,\quad U(m_-,n_-)\leqslant -h,\quad |U(m,n)|<h.$$

Доказательство. Предположим, что числа

$$U(m_+(\varphi),n_+(\varphi))\quad\text{и}\quad U(m_-(\varphi),n_-(\varphi))\tag{1.4}$$

имеют одинаковые знаки. Тогда в соответствии с пунктом 2) леммы 2

$$|U(m(\varphi),n(\varphi))|=$$
$$=|U(m_+(\varphi),n_+(\varphi))+U(m_-(\varphi),n_-(\varphi))-vh|>2h-h=h,$$

что противоречит определению пары $(m(\varphi), n(\varphi))$. Следовательно, наше предположение неверно и интересующие нас числа имеют разные знаки.

Теперь предположим, что

$$U(m_+(\varphi), n_+(\varphi)) = \frac{\alpha m_+(\varphi) - n_+(\varphi)}{\sqrt{1+\alpha^2}} + vh \leqslant -h.$$

Тогда

$$\alpha m_+(\varphi) - n_+(\varphi) \leqslant -\sqrt{1+\alpha^2}(1+v)h < 0.$$

Поскольку у числа $U(m_-(\varphi), n_-(\varphi))$ противоположный знак, то

$$\alpha m_-(\varphi) - n_-(\varphi) \geqslant \sqrt{1+\alpha^2}(1-v)h > 0.$$

В таком случае

$$\frac{n_-(\varphi)}{m_-(\varphi)} < \alpha < \frac{n_+(\varphi)}{m_+(\varphi)}.$$

Но это противоречит равенству

$$n_-(\varphi)m_+(\varphi) - n_+(\varphi)m_-(\varphi) = 1$$

из леммы 2 и наше предположение неверно. То есть, первое число из (1.4) положительное, а второе отрицательное. Необходимость условий в лемме 3 доказана.

Теперь докажем их достаточность. Предположим, что найдется целочисленная пара (m_1, n_1) с $0 < m_1 < m$, для которой $|U(m,n)| < \Delta$. Принимая во внимание те же соображения, что и при доказательстве леммы 1, мы можем считать, что m_1 и n_1 взаимно просты. Из пункта 3 леммы 2 следует существование двух взаимно простых целых a и b, для которых

$$am_+ + bm_- = m_1 \quad \text{и} \quad an_+ + bn_- = n_1.$$

Если одно из чисел a и b равно нулю, то второе есть единица, что противоречит одному из первых двух неравенств в условии доказываемой леммы. Поэтому a и b отличны от нуля. Предположим, что $ab < 0$. В таком случае

$$|U(m,n)| = |aU(m_+, n_+) + bU(m_-, n_-) + (1-a-b)vh| \geqslant$$
$$\geqslant |a|h + |b|h - |a+b-1|h \geqslant h.$$

Мы пришли к противоречию, а поэтому у a и b положительные знаки. Но тогда $m_1 = am' + bm' \geqslant m_+ + m_- = m$, чего опять не может быть. Следовательно, для всех натуральных $m_1 < m$ и любого целого n_1 выполняется неравенство $|U(m_1, n_1)| \geqslant h$. Лемма 3 полностью доказана.

§ 2. Вспомогательные преобразования

Так как для $-v < u_- < u_+$

$$\chi_{(u_-,u_+]}(u) = \chi_{(-v,u_+]}(u) - \chi_{(-v,u_-]}(u),$$

а для $u_- < u_+ < -v$

$$\chi_{[u_-,u_+)}(u) = \chi_{[u_-,-v)}(u) - \chi_{[u_+,-v)}(u),$$

то утверждение теоремы достаточно доказать только в случае

$$-1 < u_- \leqslant -v \leqslant u_+ < 1,$$

что и будет предполагаться в дальнейшем.

Пусть $(m, n) \in \mathcal{M}$. Обозначим через

$$I(m, n) = I(h, v, u_-, u_+; m, n)$$

подмножество отрезка $[\theta_0, \theta_1]$, состоящее из всех чисел α, удовлетворяющих условиям:

$$(1-v)h\sqrt{1+\alpha^2} \leqslant \alpha m_+ - n_+, \quad \alpha m_- - n_- \leqslant -(1+v)h\sqrt{1+\alpha^2}; \tag{2.1}$$

$$(u_- - v)h\sqrt{1+\alpha^2} \leqslant \alpha m - n \leqslant (u_+ - v)h\sqrt{1+\alpha^2}. \tag{2.2}$$

Из (2.2) немедленно следует, что для α из $I(m, n)$

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| \leqslant 2\sqrt{2}\frac{h}{m}. \tag{2.3}$$

Положив $\alpha_0 = \mathrm{tg}\varphi_0$ и принимая во внимание неравенства из (1.1), с помощью леммы 3 получим

$$\varPhi_v(h) = \sum_{(m,n)\in\mathcal{M}} \int\limits_{I(m,n)} \chi_{[0,\alpha_0]}(\alpha)\chi_{[0,r_0]}\left(h\frac{m+\alpha n}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\frac{d\alpha}{1+\alpha^2} + O(h).$$

Пусть для $R \in [1, \infty)$ и $t \in (0,1)$

$$\mathcal{M}(R) = \left\{ (m,n) \in \mathcal{M} \mid \sqrt{m^2+n^2} \leqslant R \right\},$$

$$\mathcal{M}_t(R) = \left\{ (m,n) \in \mathcal{M}(R) \ \middle| \ \frac{n}{m} \leqslant t \right\}.$$

Лемма 4. *Для* $r_0 < (1-|v|)^{-1}$ *и* $|v| \leqslant c < 1$

$$\varPhi_v(h) = \sum_{(m,n) \in \mathcal{M}_{\alpha_0}(r_0 h^{-1})} \operatorname{mes}\left(I(m,n)\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2\right)^{-1} + \\ + O_c\left(h \log(h^{-1})\right).$$

Доказательство. Поскольку

$$\left(\frac{m+\alpha n}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha m - n}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 = m^2 + n^2,$$

то для $\alpha \in I(m,n)$ (см.(2.2))

$$m^2 + n^2 - (2h)^2 < \left(\frac{m+\alpha n}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 \leqslant m^2 + n^2.$$

Отсюда следует, что ввиду (2.3)

$$\varPhi_v(h) - \sum_{(m,n) \in \mathcal{M}(r_0 h^{-1})} \int\limits_{I(m,n)} \chi_{[0,\alpha_0]}(\alpha) \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} \ll$$

$$\ll h + \sum_{\substack{(m,n) \in \mathcal{M} \\ 0 \leqslant m^2+n^2-(r_0 h^{-1})^2 \leqslant (2h)^2}} \int\limits_{I(m,n)} d\alpha \ll$$

$$\ll \sum_{1 \leqslant m \leqslant r_0 h^{-1}} \sum_{0 \leqslant n^2 - \left((r_0 h^{-1})^2 - m^2\right) \leqslant \frac{1}{2}} \frac{h}{m} \ll$$

$$\ll h \sum_{1 \leqslant m \leqslant r_0 h^{-1}} \frac{1}{m} \underset{c}{\ll} h \log\left(h^{-1}\right).$$

Если для некоторого $\alpha \in I(m,n)$

$$\chi_{[0,\alpha_0]}(\alpha) \neq \chi_{[0,\alpha_0]}\left(\frac{n}{m}\right),$$

то из неравенства (2.3) следует, что

$$\left|\alpha_0 - \frac{n}{m}\right| \leqslant 2\sqrt{2}\frac{h}{m} \Rightarrow |\alpha_0 m - n| \leqslant 2\sqrt{2}h < \frac{1}{2}\,.$$

Поэтому

$$\Phi_v(h) - \sum_{(m,n)\in\mathcal{M}_{\alpha_0}(r_0h^{-1})} \int\limits_{I(m,n)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \underset{c}{\ll}$$
$$\underset{c}{\ll} h\log\left(h^{-1}\right) + \sum_{\substack{(m,n)\in\mathcal{M}_{\alpha_0}(r_0h^{-1})\\ |\alpha_0 m - n|<1/2}} \operatorname{mes}\left(I(m,n)\right) \ll$$
$$\ll h\log\left(h^{-1}\right) + \sum_{m\leqslant 1+r_0h^{-1}} \frac{h}{m} \underset{c}{\ll} h\log\left(h^{-1}\right).$$

В соответствии с (2.3), $\forall\alpha \in I(m,n)$

$$(1+\alpha^2)^{-1} - \left(1+\left(\frac{n}{m}\right)^2\right)^{-1} \ll \frac{h}{m}$$

и мы окончательно находим

$$\Phi_v(h) - \sum_{(m,n)\in\mathcal{M}_{\alpha_0}(r_0h^{-1})} \operatorname{mes}\left(I(m,n)\right)\cdot\left(1+\left(\frac{n}{m}\right)^2\right)^{-1} \underset{c}{\ll}$$
$$\underset{c}{\ll} h\log\left(h^{-1}\right) + \sum_{1\leqslant m<n\leqslant r_0h^{-1}} \frac{h}{m}\cdot\frac{h}{m} \underset{c}{\ll} h\log\left(h^{-1}\right).$$

Лемма 4 полностью доказана.

Положим $\alpha = \frac{n}{m} + \beta$ и с помощью соотношений пункта 3) из леммы 2 преобразуем неравенства (2.1) и (2.2) к виду

$$-\frac{1}{mm_+} + (1-v)\frac{h}{m_+}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2} \leqslant \beta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{mm_-} - (1+v)\frac{h}{m_-}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2},$$

$$(u_- - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2} \leqslant \beta \leqslant (u_+ - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2}.$$

Пусть

$$f_1(\beta) = \beta + \frac{1}{mm_+} - (1-v)\frac{h}{m_+}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2}.$$

Для ее производной находим

$$f_1'(\beta) = 1 - \frac{(1-v)h\left(\frac{n}{m}+\beta\right)}{m_+\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2}} \geqslant 1-(1-v)\frac{h}{m_+} \geqslant 1-2h > \frac{1}{2}.$$

Поэтому $f_1(\beta)$ — возрастающая функция и уравнение $f_1(\beta) = 0$ имеет единственный корень, который мы обозначим через $\lambda_-(m,n)$. Точно так же показывается, что функции

$$f_2(\beta) = \beta - \frac{1}{mm_-} + (1+v)\frac{h}{m_-}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2},$$

$$f_3(\beta) = \beta - (u_- - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2},$$

$$f_4(\beta) = \beta - (u_+ - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}+\beta\right)^2}$$

возрастают и меняют знак на интересующем нас промежутке. По этой причине они принимают нулевое значение в единственных точках $\lambda_+(m,n)$, $\gamma_-(m,n)$, $\gamma_+(m,n)$, соответственно. Следовательно, ограничения на β можно переписать в виде

$$\lambda_-(m,n) \leqslant \beta \leqslant \lambda_+(m,n) \quad \text{и} \quad \gamma_-(m,n) \leqslant \beta \leqslant \gamma_+(m,n).$$

Из оценки (2.3) следует, что для $\dfrac{n}{m}+\beta \in I(m,n)$

$$\gamma_\pm(m,n) = \widetilde{\gamma}_\pm(m,n) + O\left(\frac{h^2}{m^2}\right), \quad \lambda_\pm(m,n) = \widetilde{\lambda}_\pm(m,n) + O\left(\frac{h^2}{mm_\mp}\right),$$

где

$$\widetilde{\lambda}_-(m,n) = -\frac{1}{mm_+} + (1-v)\frac{h}{m_+}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2},$$

$$\widetilde{\lambda}_+(m,n) = \frac{1}{mm_-} - (1+v)\frac{h}{m_-}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2},$$

$$\widetilde{\gamma}_-(m,n) = (u_- - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2},$$

$$\widetilde{\gamma}_+(m,n) = (u_+ - v)\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{mes}(I(m,n)) = \operatorname{mes}(J(m,n)) + O\left(\frac{h^2}{mm_-} + \frac{h^2}{mm_+}\right), \tag{2.4}$$

где $J(m,n)$ — множество, состоящее из всех β, удовлетворяющих условию

$$\max\left\{\widetilde{\lambda}_-(m,n), \widetilde{\gamma}_-(m,n)\right\} \leqslant \beta \leqslant \min\left\{\widetilde{\lambda}_+(m,n), \widetilde{\gamma}_+(m,n)\right\}.$$

Так как $(u_- - v) \leqslant (u_+ - v)$, то $\widetilde{\gamma}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\gamma}_+(m,n)$. Следовательно, $J(m,n)$ — непустое множество только для пар $(m,n) \in \mathcal{M}$, для которых одновременно выполняются неравенства

$$\widetilde{\lambda}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\lambda}_+(m,n), \quad \widetilde{\lambda}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\gamma}_+(m,n), \quad \widetilde{\gamma}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\lambda}_+(m,n).$$

С помощью соотношения $m_+ + m_- = m$ перепишем их в виде

$$w(m,n) = ((1+v)m_+ + (1-v)m_-)\, h\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \leqslant 1, \qquad (2.5)$$

$$((1-u_+)m_+ + (1-v)m_-)\, h\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \leqslant 1,$$

$$((1+v)m_+ + (1+u_-)m_-)\, h\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \leqslant 1.$$

Поскольку по условию

$$1-u_+ \leqslant 1+v \quad \text{и} \quad 1+u_- \leqslant 1-v,$$

то второе и третье неравенства следуют из первого. То есть, справедливо

Замечание 9. *Отрезок $J(m,n)$ с $(m,n) \in \mathcal{M}$ является непустым тогда и только тогда, когда $w(m,n) \leqslant 1$.*

Легко проверить, что неравенство (2.5) эквивалентно неравенству

$$\widetilde{\lambda}_-(m,n) \leqslant \widetilde{\gamma}_-(m,n) \quad \text{при} \quad u_- = -v$$

и неравенству

$$\widetilde{\lambda}_+(m,n) \geqslant \widetilde{\gamma}_+(m,n) \quad \text{при} \quad u_+ = -v.$$

Поэтому $J(m,n)$ разбивается точкой

$$\beta_0 = -2v\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}$$

на два отрезка $J_+(m,n)$ и $J_-(m,n)$, которые получаются из $J(m,n)$ при заменах пары (u_-,u_+) на $(-v,u_+)$ и $(u_-,-v)$ соответственно. При этом

$$J_+(m,n) = \left\{\beta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \beta_0 \leqslant \beta \leqslant \min\left\{\lambda_+(m,n), \gamma_+(m,n)\right\}\right\},$$

$$J_-(m,n) = \left\{ \beta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \max\{\lambda_-(m,n), \gamma_-(m,n)\} \leqslant \beta \leqslant \beta_0 \right\},$$

$$\mathrm{mes}(J(m,n)) = \mathrm{mes}(J_+(m,n)) + \mathrm{mes}(J_-(m,n)).$$

Лемма 5. *В условиях леммы 4*

$$\Phi_v(h) = \Psi_v^+(h) + \Psi_v^-(h) + O_c\left(h\log(h^{-1})\right),$$

где

$$\Psi_v^{\pm}(h) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathcal{M}_{\alpha_0}(r_0h^{-1})\\ w(m,n)\leqslant 1}} \mathrm{mes}(J_{\pm}(m,n)) \cdot \left(1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2\right)^{-1}.$$

Доказательство. Применяя лемму 4 и принимая во внимание асимптотическое равенство (2.4), получим (см. также замечание 8)

$$\Phi_v(h) - \Psi_v^+(h) - \Psi_v^-(h) \ll_c$$

$$\ll_c \sum_{(m,n)\in\mathcal{M}(r_0h^{-1})} \left(\frac{h^2}{mm_+} + \frac{h^2}{mm_-}\right) + h\log(h^{-1}) \ll$$

$$\ll \sum_{0<m'<m\leqslant r_0h^{-1}} \frac{h^2}{m'm} + h\log(h^{-1}) \ll_c h\log(h^{-1}).$$

§ 3. Применение оценок сумм Клостермана.

В соответствии с определениями

$$\frac{\mathrm{mes}(J_+(m,n))}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} = \frac{2v\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} + \min\{\lambda_+(m,n), \gamma_+(m,n)\}}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} =$$

$$= \frac{h}{m}\, g_+\left(\frac{n}{m}, \frac{m_-}{m}\right),$$

где

$$g_+(x,y) = \frac{2v + \min\{u_+ - v, s_+(x,y)\}}{\sqrt{1+x^2}}$$

с

$$s_+(x,y) = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{mh\sqrt{1+x^2}} - (1+v)\right).$$

При этом

$$w(m,n) \geqslant 1 \iff s_+\left(\frac{n}{m}, \frac{m_-}{m}\right) \geqslant -2v.$$

Аналогично,

$$\frac{\mathrm{mes}(J_-(m,n))}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} = \frac{-2v\frac{h}{m}\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} - \max\{\lambda_-(m,n), \gamma_-(m,n)\}}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} =$$

$$= \frac{h}{m}\, g_-\left(\frac{n}{m}, \frac{m_+}{m}\right),$$

где

$$g_-(x,y) = \frac{-2v + \min\{v - u_-, s_-(x,y)\}}{\sqrt{1+x^2}}$$

с

$$s_-(x,y) = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{mh\sqrt{1+x^2}} - (1-v)\right).$$

При этом

$$w(m,n) \geqslant 1 \iff s_-\left(\frac{n}{m}, \frac{m_+}{m}\right) \geqslant 2v.$$

Заметим также, что условие $\sqrt{m^2+n^2} \leqslant r_0 h^{-1}$ можно переписать в виде

$$\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \leqslant \frac{r_0}{mh}.$$

Пусть

$$\alpha_1 = \min\left\{\alpha_0, \sqrt{\left(r_0^2(mh)^{-2} - 1\right)}\right\}.$$

Определим на прямоугольнике $[0,\alpha_1] \times [0,1]$ функции $f_\pm$, положив

$$f_\pm(x,y) = \begin{cases} g_\pm(x,y), & \text{если} \quad \mp 2v \leqslant s_\pm(x,y); \\ 0, & \text{если} \quad \mp 2v > s_\pm(x,y). \end{cases}$$

Тогда

$$\Psi_v^{\pm}(h) = h \cdot \sum_{1<m\leqslant r_0 h^{-1}} \frac{W_{\pm}(m)}{m},$$

где

$$W_{\pm}(m) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m' \\ 1\leqslant n'\leqslant m}} \delta_m(nn' \pm 1) \cdot f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}\right)$$

с $m' = [\alpha_1 m]$.

Применяя по второй переменной преобразование Абеля

$$\sum_{0<l\leqslant N} a(l)\, b(l) =$$

$$= a(N) \cdot \sum_{0<k\leqslant N} b(k) - \sum_{0<l<N} (a(l+1) - a(l)) \cdot \left(\sum_{0<k\leqslant l} b(k)\right),$$

получим

$$W_{\pm}(m) = W_{\pm}^{(0)}(m) - W_{\pm}^{(1)}(m),$$

где

$$W_{\pm}^{(0)}(m) = \sum_{1\leqslant n\leqslant m'} f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{m}{m}\right) \cdot \left(\sum_{1\leqslant n'\leqslant m} \delta_m(nn' \pm 1)\right),$$

$$W_{\pm}^{(1)}(m) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m' \\ 1\leqslant k'<m}} \Delta_{0,1} f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot \left(\sum_{1\leqslant n'\leqslant k'} \delta_m(nn' \pm 1)\right).$$

Выполнив еще раз преобразование Абеля в обеих суммах по первой переменной, находим

$$W_{\pm}^{(0)}(m) = W_{\pm}^{(0,0)}(m) - W_{\pm}^{(0,1)}(m),$$

где

$$W_{\pm}^{(0,0)}(m) = f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{m}{m}\right) \cdot \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m' \\ 1\leqslant n'\leqslant m}} \delta_m(nn' \pm 1),$$

$$W_{\pm}^{(0,1)}(m) = \sum_{1\leqslant k<m'} \varDelta_{1,0} f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{m}{m}\right) \cdot \left(\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant k\\ 1\leqslant n'\leqslant m}} \delta_m(nn'\pm 1)\right),$$

$$W_{\pm}^{(1,0)}(m) = \sum_{1\leqslant k'<m} \varDelta_{0,1} f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot \left(\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m'\\ 1\leqslant n'\leqslant k'}} \delta_m(nn'\pm 1)\right),$$

$$W_{\pm}^{(1,1)}(m) = \sum_{\substack{1\leqslant k<m'\\ 1\leqslant k'<m}} \varDelta_{1,1} f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot \left(\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant k\\ 1\leqslant n'\leqslant k'}} \delta_m(nn'\pm 1)\right).$$

Далее воспользуемся асимптотическим равенством ($\forall\varepsilon > 0$)

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant k\\ 1\leqslant n'\leqslant k'}} \delta_m(nn'\pm 1) = \frac{\varphi(m)}{m^2} kk' + O_\varepsilon\left(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

для $1 \leqslant k, k' < m$. Оно доказывается стандартным способом (см., например, [1]) с помощью оценок сумм Клостермана, принадлежащих Эстерману [5]. В результате для $0 \leqslant i, j \leqslant 1$ получим 8 равенств

$$W_{\pm}^{(i,j)}(m) = \frac{\varphi(m)}{m^2} D_{\pm}^{(i,j)}(m) + O_\varepsilon\left(G_{\pm}^{(i,j)}(m)\cdot m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где

$$D_{\pm}^{(0,0)}(m) = f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{m}{m}\right)\cdot m'm \quad \text{и} \quad G_{\pm}^{(0,0)}(m) = 1,$$

$$D_{\pm}^{(0,1)}(m) = \sum_{1\leqslant k<m'} \varDelta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{m}{m}\right)\cdot km$$

и

$$G_{\pm}^{(0,1)}(m) = \sum_{1\leqslant k<m'} \left|\varDelta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{m}{m}\right)\right|,$$

$$D_{\pm}^{(1,0)}(m) = \sum_{1\leqslant k'<m} \mathit{\Delta}_{0,1}\, f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot m'k'$$

и

$$G_{\pm}^{(1,0)}(m) = \sum_{1\leqslant k'<m} \left|\mathit{\Delta}_{0,1}\, f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right|,$$

$$D_{\pm}^{(1,1)}(m) = \sum_{\substack{1\leqslant k<m'\\ 1\leqslant k'<m}} \mathit{\Delta}_{1,1} f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right) \cdot kk'$$

и

$$G_{\pm}^{(1,1)}(m) = \sum_{\substack{1\leqslant k<m'\\ 1\leqslant k'<m}} \left|\mathit{\Delta}_{1,1}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right|.$$

Легко проверить,что преобразование Абеля по двум переменным, примененное к сумме

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m'\\ 1\leqslant n'\leqslant m}} f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}\right) \cdot b(n, n')$$

с $b(n, n') = 1$, приводит к равенству

$$S_{\pm}(m) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant m'\\ 1\leqslant n'\leqslant m}} f_{\pm}\left(\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}\right) =$$

$$= D_{\pm}^{(0,0)}(m) - D_{\pm}^{(0,1)}(m) - D_{\pm}^{(1,0)}(m) + D_{\pm}^{(1,1)}(m).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

$$W_{\pm}(m) = \frac{\varphi(m)}{m^2} S_{\pm}(m) + O_{\varepsilon}\left(G_{\pm}(m) \cdot m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{3.2}$$

где

$$G_{\pm}(m) = G_{\pm}^{(0,0)}(m) + G_{\pm}^{(0,1)}(m) + G_{\pm}^{(1,0)}(m) + G_{\pm}^{(1,1)}(m).$$

Нам понадобятся следующие очевидные

Замечание 10. *При фиксированном x обе функции $f_\pm(x,\dots)$ монотонны по второй переменной y.*

Замечание 11. *Для фиксированного y обе функции $f_\pm(\dots,y)$ непрерывны по первой переменной на отрезке $[0,\alpha_1]$. Кроме того, они непрерывно дифференцируемы, за возможным исключением одной точки, и равномерно по (x,y)*

$$\varDelta_{1,0}\, f_\pm\left(\frac{k}{m},\frac{k'}{m}\right) \ll \frac{1}{m}\,.$$

Лемма 6. *Для любого натурального $m \geqslant 2$,* $\quad G_\pm(m) \ll 1.$

Доказательство. Нам достаточно показать, что при $0 \leqslant i,j \leqslant 1$

$$G_\pm^{(i,j)}(m) \ll 1.$$

При $i=j=0$, $\;G_\pm^{(0,0)}(m)=1$ и нужное неравенство выполнено. Принимая во внимание замечание 10, при $i=1$ и $j=0$ находим

$$G_\pm^{(1,0)}(m) = -\sum_{1\leqslant k'<m} \varDelta_{0,1}\, f_\pm\left(\frac{m'}{m},\frac{k'}{m}\right) =$$
$$= f_\pm\left(\frac{m'}{m},\frac{1}{m}\right) - f_\pm\left(\frac{m'}{m},\frac{m}{m}\right) \ll 1.$$

Опираясь на замечание 11, при $i=0$ и $j=1$ получаем

$$G_\pm^{(0,1)}(m) \ll \sum_{1\leqslant k<m'} \frac{1}{m} \ll 1.$$

Осталось разобрать самый сложный случай с $i=j=1$.

Заметим, что на прямоугольнике $[0,m'/m]\times[0,1]$

$$\frac{\partial^2 g_\pm}{\partial x\partial y}(x,y) = \begin{cases} g''_\pm(x,y), & \text{e } \Upsilon\ s_\pm(x,y) < \pm(u_\pm - v); \\ 0, & \text{e } \Upsilon\ s_\pm(x,y) > \pm(u_\pm - v), \end{cases}$$

где
$$g''_{\pm}(x,y)=\frac{x}{mhy^2(1+x^2)^2}\left(2-(1\pm v)mh\sqrt{1+x^2}\right).$$
Пусть $\alpha_{\pm}$ — положительные корни уравнений
$$2-(1\pm v)mh\sqrt{1+x^2}=0$$
относительно x.

Предположим, что $m\alpha_{\pm}\geqslant m'$.

Для этого случая в рассматриваемом прямоугольнике, за исключением точек кривых
$$s_{\pm}(x,y)=\pm(u_{\pm}-v), \tag{3.3}$$
смешанная производная функции $g_{\pm}$ неотрицательна. Следовательно,
$$\mathit{\Delta}_{1,1}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m},\frac{k'}{m}\right)\geqslant 0$$
во всех точках
$$\left(\frac{k}{m},\frac{k'}{m}\right)\quad \text{с}\quad 1\leqslant k<m'\quad \text{и}\quad 1\leqslant k'<m,$$
за исключением, быть может, тех, для которых кривые из (3.3) пересекают квадрат
$$\left[\frac{k}{m},\frac{k+1}{m}\right]\times\left[\frac{k'}{m},\frac{k'+1}{m}\right].$$
Количество последних есть $O(m)$ и для них, в соответствии с замечанием 11,
$$\left|\mathit{\Delta}_{1,1}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m},\frac{k'}{m}\right)\right|\leqslant\left|\mathit{\Delta}_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m},\frac{k'}{m}\right)\right|+$$
$$+\left|\mathit{\Delta}_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m},\frac{k'+1}{m}\right)\right|\ll\frac{1}{m}.$$

Поэтому

$$G_{\pm}^{(1,1)}(m) = \sum_{\substack{1\leqslant k<m' \\ 1\leqslant k'<m}} \varDelta_{1,1}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m'-1} \left(\varDelta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{m}{m}\right) - \varDelta_{1,0}\, f_{\pm}\left(\frac{k}{m}, \frac{1}{m}\right)\right) =$$

$$= f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{m}{m}\right) - f_{\pm}\left(\frac{1}{m}, \frac{m}{m}\right) - f_{\pm}\left(\frac{m'}{m}, \frac{1}{m}\right) + f_{\pm}\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) \ll 1.$$

Предположим теперь, что $m\alpha_{\pm} < m'$.

Обозначим через $l_{\pm}$ наибольшие целые, не превосходящие $m\alpha_{\pm}$, и разобьем сумму $G_{\pm}^{(1,1)}(m)$ на три:

$$G'_{\pm}, \quad G''_{\pm}, \quad G'''_{\pm}.$$

К первой отнесем слагаемые с $0 < k' < l_{\pm}$, ко второй с $k' = l_{\pm}$, к третьей с $l_{\pm} < k' < m'$. Суммы $G'_{\pm}$ и $G'''_{\pm}$ оцениваются точно по такой же схеме, как и в предыдущем варианте с $m\alpha_{\pm} \geqslant m'$, поскольку в первом случае смешанная производная неотрицательна везде, а во втором неположительна (за исключением точек на кривой (3.3)). Кроме того, с учетом замечания 10

$$G''_{\pm} = \sum_{1\leqslant k'<m} \left|\varDelta_{1,1}\, f_{\pm}\left(\frac{l_{\pm}}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant k'<m} \left|\varDelta_{0,1}\, f_{\pm}\left(\frac{l_{\pm}}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right| + \left|\varDelta_{0,1}\, f_{\pm}\left(\frac{1+l_{\pm}}{m}, \frac{k'}{m}\right)\right| =$$

$$= f_{\pm}\left(\frac{l_{\pm}}{m}, \frac{1}{m}\right) - f_{\pm}\left(\frac{l_{\pm}}{m}, \frac{m}{m}\right) +$$

$$+ f_{\pm}\left(\frac{1+l_{\pm}}{m}, \frac{1}{m}\right) - f_{\pm}\left(\frac{1+l_{\pm}}{m}, \frac{m}{m}\right) \ll 1.$$

Лемма 6 полностью доказана.

§ 4. Выделение главного члена.

Пусть $F(x)$ произвольная фиксированная кусочно дифференцируемая на отрезке $[x_0, x_1]$ функция с ограниченной производной. Хорошо известно, что для $x_0 \leqslant y_0 < y_1 \leqslant x_1$

$$\sum_{y_0 \leqslant \frac{k}{N} \leqslant y_2} F\left(\frac{k}{N}\right) = N \cdot \int\limits_{y_0}^{y_1} F(x)dx + O(1). \tag{4.1}$$

Дважды применяя это асимптотическое равенство и принимая во внимание замечания 10 и 11, получим

$$S_\pm(m) = \sum_{1 \leqslant n' \leqslant m} \left(m \int\limits_0^{\alpha_1} f_\pm\left(x, \frac{n'}{m}\right) dx + O(1) \right) =$$

$$= m^2 \int\limits_0^{\alpha_1} \int\limits_0^1 f_\pm(x, y) dxdy + O(m).$$

Применяя леммы 5 и 6, а также асимптотическое равенство (3.2), находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\varPhi_v(h) = h \cdot \int\limits_0^{\alpha_0} \int\limits_0^1 (Q_+(x,y) + Q_-(x,y)) \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2}} +$$

$$+ O_{c,\varepsilon}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right),$$

где

$$Q_\pm(x,y) = \sum_{mh\sqrt{1+x^2} \leqslant r_0} \frac{\varphi(m)}{m} \varTheta_\pm\left(y, mh\sqrt{1+x^2}\right)$$

с

$$\varTheta_+(y,r) =$$

$$= \chi_{[0,r]}\left(\frac{1}{1+v(1-2y)}\right)\left(2v + \min\left\{u_+ - v, \frac{1}{y}\left(\frac{1}{r} - (1+v)\right)\right\}\right)$$

и

$$\Theta_-(y,r) =$$
$$= \chi_{[0,r]}\left(\frac{1}{1-v(1-2y)}\right)\left(-2v+\min\left\{v-u_-, \frac{1}{y}\left(\frac{1}{r}-(1-v)\right)\right\}\right).$$

Так как

$$\frac{\varphi(m)}{m} = \sum_{d\backslash m}\frac{\mu(d)}{d} = \sum_{dn=m}\frac{\mu(d)}{d},$$

то

$$Q_\pm(x,y) = \sum_{dh\sqrt{1+x^2}\leqslant r_0}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{ndh\sqrt{1+x^2}\leqslant r_0}\Theta_\pm\left(y, ndh\sqrt{1+x^2}\right).$$

Поскольку

$$ndh\sqrt{1+x^2}\leqslant r_0\leqslant\frac{1}{1-c},$$

а функция $\Theta_\pm(y,r)$ ограничена и монотонна по r, то заменяя внутреннюю сумму по n интегралом, получим

$$Q_\pm(x,y) =$$
$$= \sum_{dh\sqrt{1+x^2}\leqslant r_0}\frac{\mu(d)}{d}\left(\frac{1}{dh\sqrt{1+x^2}}\int_0^{r_0}\Theta_\pm(y,r)dr + O_c(1)\right) =$$
$$= \frac{1}{h\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\sum_{dh\sqrt{1+x^2}\leqslant r_0}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\left(\int_0^{r_0}\Theta_\pm(y,r)dr\right) +$$
$$+ O_c\left(\log(h^{-1})\right).$$

Так как

$$\sum_{dh\sqrt{1+x^2}\leqslant r_0}\frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} + O_c(h^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{\zeta(2)} + O_c(h^{-1}) = \frac{6}{\pi^2} + O_c(h^{-1}),$$

то

$$Q_{\pm}(x,y) = \frac{6}{\pi^2 h\sqrt{1+x^2}} \int\limits_0^{r_0} \Theta_{\pm}(y,r)dr + O_c\left(\log(h^{-1})\right).$$

Принимая во внимание равенство

$$\int\limits_0^{\alpha_0} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_0^{\varphi_0} d\varphi,$$

в итоге находим

$$\Phi_v(h) = \frac{6}{\pi^2}\left(K_+(u_+) + K_-(u_-)\right) \int\limits_0^{\varphi_0} d\varphi + O_{c,\varepsilon}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right),$$

где

$$K_{\pm}(u_{\pm}) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{r_0} \Theta_{\pm}(y,r)dydr.$$

Положим

$$\tau = \frac{1}{r} - (1+v).$$

Поскольку равенство

$$\chi_{[0,r]}\left(\frac{1}{1+v(1-2y)}\right) = 1$$

эквивалентно неравенству

$$\frac{\tau}{y} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{r} - (1+v)\right) \geqslant -rv,$$

которое следует из условия

$$\frac{\tau}{y} \geqslant u_+ - v,$$

то для $u_+ > v$

$$\frac{\partial K_+}{\partial u_+}(u_+) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \tau > 0; \\ \frac{\tau}{v-u_+}, & \text{если} \quad u_+ - v < \tau \leqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad \tau \leqslant u_+ - v. \end{cases}$$

В результате для $u_+ + v \geqslant 0$ находим

$$\frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{\partial K_+}{\partial u_+}(u_+) = \rho(r, u_+, v).$$

Принимая во внимание равенство $\partial K_+(u_+) = 0$, при $u_+ = -v$ в итоге получаем

$$\frac{6}{\pi^2} \cdot \partial K_+(u_+) = \int\limits_0^{r_0} \int\limits_{-v}^{u_+} \rho(r, u, v) dr du.$$

Точно так же доказывается еще одно равенство

$$\frac{6}{\pi^2} \cdot \partial K_-(u_-) = \int\limits_0^{r_0} \int\limits_{u_-}^{-v} \rho(r, u, v) dr du.$$

Таким образом,

$$\Phi_v(h) = \int\limits_0^{\varphi_0} \int\limits_0^{r_0} \int\limits_{u_-}^{u_+} \rho(r, u, v) d\varphi dr d\varphi + O_{c,\varepsilon}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right).$$

Сформулированная во введении теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеева М. О. *О статистиках неполных частных конечных цепных дробей.* — Функц. анализ и его прил., 2004, т. 38, вып. 2, 1–11.

2. Синай Я. Г. *Эргодические свойства газа Лоренца.* — Функциональный анализ и его приложения, т. 13 (1979), вып. 3, с. 46–59.

3. Быковский В. А., Устинов А. В. *Статистика траекторий частиц для неоднородной двумерной модели "Периодический газ Лоренца".* — Функц. анализ и его приложения (2007, в печати).

4. Boca F. P., Gologan R. N., Zaharescu A., *The statistics of the trajectory of a certain billiard in a flat two-torus*, Comm. Math. Phys., v. 240 (2003), № 1-2, 53–73.

5. Estermann T. *On Kloosterman's sum.* — Mathematika, 1961, v. 8, 83–86.

6. Marklof J., Strömbergsson A. *The distribution of free path lengths in the periodic Lorentz gas and related lattice point problems.* — arXiv:math/0706.4395v1.

7. Кадменский А.Г., Самарин В.В., Тулинов А.Ф. *Регулярное и стохастическое движение в кристалле при каналировании. Эволюция потока частиц в толстом кристалле.* — Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2003, т.34, вып.4, стр.822–868.

8. Кумахов М.А., Ширмер Г. *Атомные столкновения в кристаллах.* — М.: Атомиздат, 1980.

Быковский Виктор Алексеевич,
Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской Академии наук,
680000, г.Хабаровск, ул.Запарина, дом 92,
тел.,факс:(4212)32-46-76
vab@iam.khv.ru

Устинов Алексей Владимирович,
Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской Академии наук,
680000, г.Хабаровск, ул.Запарина, дом 92,
тел.,факс:(4212)31-24-91
vab@iam.khv.ru

V.A. Bykovskii A.V.Ustinov

Trajectory statistics in inhomogeneous Sinai problem for 2-dimentional lattice.