Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами

А. В. Устинов*

23 января 2010 г.

1 Введение

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа, взаимно простые в совокупности (наибольший общий делитель всех чисел равен 1). Числом Фробениуса $g(a_1, \ldots, a_n)$ называется наибольшее целое m, не представимое в виде

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = m, \tag{1}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — целые неотрицательные числа. Часто удобней рассматривать функцию

$$f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) + a_1 + \ldots + a_n,$$

которая дает наибольшее целое m, не представимое в виде (1) с натуральными коэффициентами $x_1, \ldots, x_n$. Задача о нахождении $g(a_1, \ldots, a_n)$ называется проблемой Фробениуса. Наиболее полным обзором связанных с нею задач является книга [1].

При $n = 2$ известна формула Сильвестра [2]: $f(a, b) = ab$. Если $n = 3$, то задача о нахождении $f(a, b, c)$ сводится к попарно взаимно простым аргументам, и при $b \equiv lc \pmod{a}$, $1 \leqslant l \leqslant a$ значение $f(a, b, c)$ выражается через элементы цепной дроби для числа l/a (см. результаты Сельмера, Бейера и Рёдсета [3]–[4]; о других формулах для подсчета $f(a, b, c)$ см. [1, глава 2], и более поздние результаты [5, 6]). При $n \geqslant 4$ формул для нахождения $f(a_1, \ldots, a_n)$ не известно. Доказано, что для фиксированного n число Фробениуса можно вычислить за полиномиальное время (см. [7]), а при произвольном n нахождение $f(a_1, \ldots, a_n)$ становится NP-полной задачей (см. [8]).

В работе Дэйвисона [9] при $(a, b, c) = 1$ была доказана оценка $f(a, b, c) \geqslant \sqrt{3abc}$, в которой константа $\sqrt{3}$ точна. Там же было высказано предположение, что для "случайного" набора (a, b, c) функция $f(a, b, c)$ имеет порядок $\sqrt{abc}$. Более формально это утверждение сформулировано в виде двух гипотез. Обозначим через X_N множество $X_N = \{(a, b, c) : 1 \leqslant a, b, c \leqslant N; (a, b, c) = 1\}$.

Гипотеза 1.

$$\sup_N \frac{1}{|X_N|} \sum_{(a,b,c)\in X_N} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}} < \infty.$$

*Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 07-01-00306, проекта ДВО РАН 06-III-А-01-017 и Фонда содействия отечественной науке

Гипотеза 2. Предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|X_N|} \sum_{(a,b,c)\in X_N} \frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$$

существует и конечен.

Арнольдом сформулировано более сильное предположение (см. [10], задачи 1999-8, 2003-5, а также [11]).

Гипотеза 3. При любом $n \geqslant 2$ за распределение значений функции $f(a_1,\ldots,a_n)$ отвечает плотность, пропорциональная $\sqrt[n-1]{a_1\ldots a_n}$. Другими словами, если

$$\begin{gathered} Q_{N,r} = Q_{N,r}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \\ = \left\{(a_1,\ldots,a_n) : \left|\frac{a_j}{N} - \alpha_j\right| < r \quad (j=1,\ldots,n); (a_1,\ldots,a_n) = 1\right\}, \end{gathered}$$

то для некоторой константы c_n нормированная сумма

$$\frac{1}{|Q_{N,r}|} \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in Q_{N,r}} f(a_1,\ldots,a_n)$$

при растущем N и $r = r(N) \to 0$ асимптотически ведет себя как $c_n N^{1-1/n} \sqrt[n-1]{\alpha_1\ldots\alpha_n}$.

Результаты связанных с ней численных экспериментов могут быть найдены в [11], [12] и [13].

Бургейном и Синаем в работе [14] изучалось предельное поведение чисел $f(a,b,c)N^{-3/2}$ при $1 \leqslant a,b,c \leqslant N$. Они (на основе одного естественного предположения, подтвержденного позднее в [15]) вероятностными методами доказали существование предельного распределения для величины $f(a,b,c)N^{-3/2}$.

Оказывается, что при $n=3$ искомая плотность выделяется при усреднении по двум параметрам из трех и может быть посчитана явно. Центральную роль играет константа $c_3 = 8/\pi = 2.546\ldots$ (примерно равная одному дюйму, измеренному в сантиметрах).

Определим множество

$$M_a(x_1,x_2) = \{(b,c) : 1 \leqslant b \leqslant x_1 a, 1 \leqslant c \leqslant x_2 a, (a,b,c) = 1\}.$$

Теорема 1. *Пусть a — натуральное, x_1, x_2, ε — действительные положительные числа. Тогда*

$$\frac{1}{a^{3/2}|M_a(x_1,x_2)|} \sum_{(b,c)\in M_a(x_1,x_2)} \left(f(a,b,c) - \frac{8}{\pi}\sqrt{abc}\right) = O_\varepsilon(R_\varepsilon(a;x_1,x_2)),$$

где

$$R_\varepsilon(a;x_1,x_2) = \left(a^{-1/6}(x_1+x_2) + a^{-1/4}(x_1^{3/2}+x_2^{3/2})(x_1x_2)^{-1/4} + a^{-1/2}\right) a^\varepsilon \ll_{x_1,x_2} a^{-1/6+\varepsilon}.$$

Доказательство основано на формуле Рёдсета для чисел Фробениуса из работы [3], теории цепных дробей и оценках сумм Клостермана. Оно также использует идеи, применявшиеся ранее автором при исследовании статистических свойств цепных дробей, см. [16, 17, 18].

Квадрат на плоскости bc

$$\left|\frac{b}{a} - \beta\right| < r, \quad \left|\frac{c}{a} - \gamma\right| < r$$

можно представить в виде комбинации прямоугольников вида $[0, x_1 a] \times [0, x_2 a]$ с $x_1 = \beta \pm r$, $x_2 = \gamma \pm r$. Поэтому из теоремы 1 вытекает гипотеза Арнольда для $n = 3$ с константой $c_3 = 8/\pi$ в более сильном виде: если

$$Q'_{N,r} = Q'_{N,r}(\alpha, \beta, \gamma) = \left\{ (a, b, c) : a = \alpha N, \left| \frac{b}{N} - \beta \right| < r, \left| \frac{c}{N} - \gamma \right| < r, (a, b, c) = 1 \right\},$$

то

$$\frac{1}{|Q'_{N,r}|} \sum_{(a,b,c) \in Q'_{N,r}} f(a, b, c) = \frac{8}{\pi} \sqrt{\alpha \beta \gamma} N^{3/2} \left(1 + O_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon}(r^{-2} N^{-1/6+\varepsilon} + r) \right).$$

Результат нетривиален при $N^{-1/12+\varepsilon} \ll r \ll N^{-\varepsilon}$.

Из теоремы 1 вытекает справедливость гипотезы 2 также в более сильной форме.

Теорема 2. *Пусть* $Y_N = \{(a, b, c) : a = N, 1 \leqslant b, c \leqslant N, (a, b, c) = 1\}$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|Y_N|} \sum_{(a,b,c) \in Y_N} \frac{f(a, b, c)}{\sqrt{abc}} = \frac{8}{\pi} + O_\varepsilon(N^{-1/12+\varepsilon}).$$

Автор благодарит рецензента за указания на недочеты в первоначальной версии статьи.

2 Континуанты

Пусть a, b, c — натуральные числа, $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$ и l — решение сравнения $bl \equiv c \pmod a$, лежащее в пределах $1 \leqslant l \leqslant a$. Формула Рёдсета для $f(a, b, c)$ основана на разложении числа a/l в приведенную регулярную цепную дробь (см. [19, § 42–43]

$$\frac{a}{l} = \langle b_0; b_1, \ldots, b_m \rangle = b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \ddots - \cfrac{1}{b_m}}, \tag{2}$$

в которой $b_0 = \lceil a/l \rceil = -\lfloor -a/l \rfloor$ (потолок, ближайшее сверху целое число) и $b_1, \ldots, b_m \geqslant 2$. Через $m = m(a/l)$ будем обозначать длину дроби (2). Для работы с такими дробями удобно модифицировать стандартное определение континуантов (см. [20, раздел 6.7]) следующим образом:

$$K_0() = 1, \quad K_1(x_1) = x_1,$$
$$K_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) - K_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}) \qquad (n \geqslant 2).$$

Естественно также доопределить $K_{-1} = 0$. Согласно рекуррентным соотношениям на числители и знаменатели цепных дробей, при $m \geqslant 0$ будет выполняться равенство

$$\langle x_0; x_1, \ldots, x_m \rangle = \frac{K_{m+1}(x_0, x_1, \ldots, x_m)}{K_m(x_1, \ldots, x_m)}.$$

Переформулируется правило Эйлера: многочлен $K_n(x_1, \ldots, x_n)$ может быть получен, если начать с произведения $x_1 \ldots x_n$, затем вычеркивать из него пары $x_k x_{k+1}$ всеми возможными способами и складывать получившиеся слагаемые с коэффициентом $(-1)^j$, где j — число вычеркнутых пар. Например,

$$K_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3x_4 - \cancel{x_1x_2}x_3x_4 - x_1\cancel{x_2x_3}x_4 - x_1x_2\cancel{x_3x_4} + \cancel{x_1x_2}\cancel{x_3x_4} =$$
$$= x_1x_2x_3x_4 - x_3x_4 - x_1x_4 - x_1x_2 + 1.$$

Из правила Эйлера следует свойство симметричности

$$K_n(x_1,\dots,x_n) = K_n(x_n,\dots,x_1),$$

левостороннее рекуррентное соотношение

$$K_n(x_1,\dots,x_n) = x_1K_{n-1}(x_2,\dots,x_n) - K_{n-2}(x_3,\dots,x_n) \qquad (n \geqslant 2)$$

и более общая формула (соответствующая равенству (6.133) из [20])

$$K_{m+n}(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+n}) =$$
$$= K_m(x_1,\dots,x_m)K_n(x_{m+1},\dots,x_{m+n}) - K_{m-1}(x_1,\dots,x_{m-1})K_{n-1}(x_{m+2},\dots,x_{m+n}).$$

Выписанные соотношения являются частными случаями тождества Эйлера ($m \geqslant 1$, $l \geqslant 0$, $n \geqslant l+1$)

$$K_{m+n}(x_1,\dots,x_{m+n})K_l(x_{m+1},\dots,x_{m+l}) - K_{m+l}(x_1,\dots,x_{m+l})K_n(x_{m+1},\dots,x_{m+n}) +$$
$$+ K_{m-1}(x_1,\dots,x_{m-1})K_{n-l-1}(x_{m+l+2},\dots,x_{m+n}) = 0$$

которое можно интерпретировать как равенство нулю пфаффиана вырожденной матрицы размера 4×4, см. [21].

В дальнейшем будем использовать более простое обозначение $K(x_1,\dots,x_n)$, поскольку число аргументов континуанта всегда будет понятно из контекста.

3 Функция Рёдсета

Пусть l — фиксированное целое число в пределах $1 \leqslant l \leqslant a$, $(l,a)=1$, и $\bar{l}$ — решение сравнения $\bar{l}\cdot l \equiv 1 \pmod{a}$ $(1 \leqslant \bar{l} \leqslant a)$. В соответствии с работой Рёдсета [3], рассмотрим разложение a/l в цепную дробь с минусами

$$\frac{a}{l} = \langle a_1;\dots,a_m\rangle$$

и определим последовательности $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ $(-1 \leqslant j \leqslant m)$ равенствами

$$s_j = K(a_{j+2},\dots,a_m), \qquad q_j = K(a_1,\dots,a_j).$$

Легко показать следующие свойства чисел $\{s_j\}$, $\{q_j\}$.

1°. Последовательности $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ однозначно задаются начальными условиями

$$s_m = 0,\ s_{m-1} = 1, \qquad q_{-1} = 0,\ q_0 = 1$$

и рекуррентными соотношениями

$$s_{j-1} = a_{j+1}s_j - s_{j+1}, \quad q_{j+1} = a_{j+1}q_j - q_{j-1} \qquad (0 \leqslant j \leqslant m-1).$$

При этом

$$s_{-1} = q_m = K(a_1, \ldots, a_m) = a,$$
$$s_0 = K(a_2, \ldots, a_m) = l, \quad q_{m-1} = K(a_1, \ldots, a_{m-1}) = \bar{l}.$$

2°. Последовательность $\{s_j\}$ монотонно убывает, $\{q_j\}$ — монотонно возрастает и

$$0 = \frac{s_m}{q_m} < \frac{s_{m-1}}{q_{m-1}} < \ldots < \frac{s_0}{q_0} < \frac{s_{-1}}{q_{-1}} = \infty.$$

3°. При любом n $(0 \leqslant n \leqslant m)$ векторы $e_n = (q_n, s_n)$ и $e_{n-1} = (q_{n-1}, s_{n-1})$ образуют базис решетки

$$\Lambda_l = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : xl \equiv y \pmod{a}\right\}.$$

При этом

$$\begin{vmatrix} q_n & s_n \\ q_{n-1} & s_{n-1} \end{vmatrix} = \det \Lambda_l = a.$$

4°. Точки (q_n, s_n) $(-1 \leqslant n \leqslant m)$ являются вершинами выпуклой оболочки ненулевых точек решетки Λ_l, лежащих в первой координатной четверти.

5°. Четверки $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n)$ при $1 \leqslant l < a$, $(l, a) = 1$, $0 \leqslant n \leqslant m(l/a)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями (u_1, u_2, v_1, v_2) уравнения

$$u_1 u_2 - v_1 v_2 = a,$$

для которых

$$0 \leqslant v_1 < u_1 \leqslant a, \quad (u_1, v_1) = 1, \qquad 0 \leqslant v_2 < u_2 \leqslant a, \quad (u_2, v_2) = 1.$$

6°. При $0 \leqslant n \leqslant m$ выполняются неравенства

$$s_{n-1} - s_n \leqslant a/q_n, \qquad q_n - q_{n-1} \leqslant q/s_{n-1}.$$

Свойства 1°–2° непосредственно вытекают из определений.

Для доказательства свойства 3° заметим, что пары векторов (e_{n-1}, e_n) и (e_n, e_{n+1}) связаны унимодулярным преобразованием

$$\begin{pmatrix} e_n \\ e_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{n+1} \\ e_n \end{pmatrix} \qquad (1 \leqslant n < m).$$

При этом первые два $e_{-1} = (0, a)$, $e_0 = (1, l)$ образуют базис решетки Λ_l и

$$\begin{vmatrix} q_0 & s_0 \\ q_{-1} & s_{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & a \end{vmatrix} = a.$$

Свойство 4° следует из монотонности последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ и свойства 3°.

Докажем свойство 5°. Согласно свойству 3° всякая четверка $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n)$ удовлетворяет уравнению $u_1 u_2 - v_1 v_2 = a$. Для построения соответствия в другую сторону достаточно рассмотреть разложения

$$\frac{u_1}{v_1} = \langle a_n; \ldots, a_1 \rangle, \qquad \frac{u_2}{v_2} = \langle a_{n+1}; \ldots, a_m \rangle$$

и выбрать $l = K(a_2, \ldots, a_m)$.

Свойство 6° следует из того, что равенство $q_r s_{r-1} - q_{r-1} s_r = a$ (см. свойство 3°) можно переписать в виде

$$q_n(s_{n-1} - s_n) + s_n(q_n - q_{n-1}) = a \quad \text{или} \quad (q_n - q_{n-1})s_{n-1} + q_{n-1}(s_{n-1} - s_n) = a.$$

Отсюда $s_{n-1} - s_n \leqslant a/q_n$ и $q_n - q_{n-1} \leqslant a/s_{n-1}$.

Введем функцию Рёдсета $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$, которая для неотрицательных t_1, t_2 таких, что

$$\frac{s_n}{q_n} \leqslant \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}$$

определяется равенством

$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 s_{n-1} + t_2 q_n - \min\{t_1 s_n, t_2 q_{n-1}\} \tag{3}$$

(в силу свойства 2° эти условия задают значения $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$ для всех t_1, $t_2 \geqslant 0$) . Тогда, как показано в [3], при $(b, a) = 1$ и $c \equiv b \cdot l \pmod{a}$ число Фробениуса вычисляется по формуле

$$f(a, b, c) = \rho_{l,a}(b, c). \tag{4}$$

Замечание 1. Функция $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$ непрерывна и равенство (3) выполняется при

$$\frac{s_n}{q_n} \leqslant \frac{t_2}{t_1} \leqslant \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

4 О целых точках в областях

Пусть Ω — плоская односвязная область со спрямляемой границей. Обозначим через V площадь Ω, P — ее периметр и N — число точек решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащих внутри Ω. Для выпуклой области известно неравенство Ярника (см. [22])

$$|V - N| < P + 1.$$

Однако оценку

$$V - N = O(P + 1)$$

приходится применять и в более общих ситуациях, см. [23].

Лемма 1. *Для произвольной плоской односвязной области со спрямляемой границей*

$$|V - N| < 4(P + 1).$$

Доказательство. Пусть N_1 — число квадратов вида $[a, a+1) \times [b, b+1)$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, лежащих внутри Ω, и N_2 — число квадратов, имеющих с Ω хотя бы одну общую точку. Тогда

$$N_1 \leqslant V, N \leqslant N_2,$$

и, значит, $|V - N| \leqslant M = N_2 - N_1$, где M — число квадратов, через которые проходит граница Ω. В каждом из таких квадратов выберем точку A_k $(0 \leqslant k < M)$ на границе Ω (нумерация точек — в порядке их следования по границе). Среди любых пяти квадратов, через которые проходит граница Ω, всегда можно выбрать два, замыкания которых не имеют общих точек. Поэтому при любом k длина отрезка границы между точками A_k и A_{k+4} удовлетворяет неравенству $l(A_k, A_{k+4}) > 1$. Отсюда

$$P \geqslant l(A_0, A_4) + l(A_4, A_8) + \ldots + l(A_{4\lfloor M/4 \rfloor - 4}, A_{4\lfloor M/4 \rfloor}) > \lfloor M/4 \rfloor > M/4 - 1.$$

Значит, $M < 4(P + 1)$ и $|V - N| < 4(P + 1)$. $\square$

Следствие 1. *Пусть G — непрерывная действительнозначная функция, определенная внутри односвязной области Ω периметра $P \geqslant 1$, и удовлетворяющая неравенствам $0 \leqslant G(x,y) \leqslant B$ для всех $(x,y) \in \Omega$. Предположим также, что функция G монотонна по каждой переменной, и для всех $z \in [0,B]$ неравенство $G(x,y) \leqslant z$ задает в Ω односвязную область, периметр которой есть $O(P)$. Тогда*

$$\sum_{(x,y)\in\Omega\cap\mathbb{Z}^2} G(x,y) = \iint_\Omega G(x,y)\,dx\,dy + O(BP).$$

Доказательство. Достаточно приблизить $G(x,y)$ линейной комбинацией функций

$$G_k(x,y) = [G(x,y) \leqslant \frac{k}{n}B] \qquad (0 \leqslant k \leqslant n),$$

к каждой из них применить лемму 1 и устремить n в бесконечность. □

Замечание 2. Пусть Λ — подрешетка $\mathbb{Z}^2$ индекса d. Обозначим через $N(\Lambda)$ число точек Λ, содержащихся в области Ω. Тогда выполняется неравенство

$$|V - d\cdot N(\Lambda)| \leqslant 4d\cdot(P+1).$$

Для его проверки достаточно повторить рассуждения из доказательства леммы 1, заменив единичные квадраты фундаментальными параллелограммами Λ, натянутыми на приведенный базис.

В качестве следствия (при тех же ограничениях, что и в следствии 1) аналогично получается формула

$$\sum_{(x,y)\in\Omega\cap\Lambda} G(x,y) = \frac{1}{d}\iint_\Omega G(x,y)\,dx\,dy + O(BP). \tag{5}$$

5 Выделение плотности

Для рационального r квадратными скобками будет обозначаться каноническое разложение в цепную дробь

$$r = [a_0; a_1, \ldots, a_s] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_s}}$$

длины $s = s(r)$, где $a_0 = \lfloor r \rfloor$ (целая часть r), $a_1, \ldots, a_s$ — неполные частные (натуральные числа) и $a_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$. Через $s_1(r)$ будем обозначать сумму неполных частных числа r: $s_1(r) = t_0 + t_1 + \ldots + t_s$. Введем также удобное обозначение (см. [20]). Если A — некоторое утверждение, то $[A] = 1$, если A истинно, и $[A] = 0$ в противном случае. Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q:

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod q] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть* $1 \leqslant l < a$, $(l,a)=1$, δ_1, δ_2 — *натуральные и* x_1, x_2 — *положительные действительные числа. Тогда для суммы*

$$S_{l,a}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2)=\sum_{\substack{b\leqslant x_1a\\ \delta_1|b}}\sum_{\substack{c\leqslant x_2a\\ \delta_2|c}}\delta_a(bl-c)\rho_{l,a}(b,c)$$

справедлива асимптотическая формула

$$S_{l,a}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2)=a^2\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\rho_{l,a}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2+O(x_1x_2a^2s_1(l/a)).$$

Доказательство. Рассмотрим решетку

$$\Lambda_l(\delta_1,\delta_2)=\{(x,y)\in\Lambda_l:\delta_1\mid x,\delta_2\mid y\}.$$

Произвольная точка (x,y) решетки Λ_l имеет вид $(x,y)=ue_{-1}+ve_0$, где u, v — целые, $e_{-1}=(0,a)$, $e_0=(1,l)$ (см. свойство 3°). Такая точка будет принадлежать подрешетке $\Lambda_l(\delta_1,\delta_2)$ в том и только том случае, когда выполняются сравнения

$$v\equiv 0 \pmod{\delta_1},\quad au+lv\equiv 0 \pmod{\delta_2}.$$

Значит, $\Lambda_l(\delta_1,\delta_2)$ подрешетка индекса $\delta_1\delta_2/(a,\delta_1,\delta_2)$ в решетке Λ_l.

Рассмотрим сумму

$$S_n=S_{l,a,n}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2)=\sum_{\substack{b\leqslant x_1a\\ \delta_1|b}}\sum_{\substack{c\leqslant x_2a\\ \delta_2|c}}\left[(b,c)\in\Lambda_l(\delta_1,\delta_2),\frac{s_n}{q_n}\leqslant\frac{c}{b}<\frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right]\rho_{l,a}(b,c).$$

Согласно свойству 3° последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$, все решения сравнения $bl\equiv c \pmod{a}$, для которых $s_n/q_n\leqslant c/b<s_{n-1}/q_{n-1}$, имеют вид

$$b(u,v)=uq_n+vq_{n-1},\quad c(u,v)=us_n+vs_{n-1}$$

с целыми $u>0$, $v\geqslant 0$. Поэтому

$$S_n=\sum_{u>0}\sum_{v\geqslant 0}[b(u,v)\leqslant x_1a,\delta_1\mid b(u,v),c(u,v)\leqslant x_2a,\delta_2\mid c(u,v)]h_{l,a}(u,v),$$

где $h_{l,a}(u,v)=\rho_{l,a}(uq_n+vq_{n-1},us_n+vs_{n-1})$.

Определим $r=r(l,a)$ с помощью неравенств

$$\frac{s_r}{q_r}\leqslant\frac{x_2}{x_1}<\frac{s_{r-1}}{q_{r-1}}.$$

При $n>r$ из двух ограничений $b\leqslant x_1a$, $c\leqslant x_2a$ существенным является лишь первое. Значит,

$$S_n=\sum_{u>0}\sum_{v\geqslant 0}[uq_n+vq_{n-1}\leqslant x_1a,\delta_1\mid uq_n+vq_{n-1},\delta_2\mid us_n+vs_{n-1}]h_{l,a}(u,v).$$

Переменные u и v меняются внутри области, периметр которой есть $O(x_1a/q_{n-1})$. Из оценки

$$\rho_{l,a}(t_1,t_2)\leqslant t_1s_{n-1}+t_2q_n \tag{6}$$

вытекает, что наибольшее значение функции $h_l(u,v)$ в указанной области не превосходит $2x_1as_{n-1}q_n/q_{n-1}$. Кроме того, как отмечалось выше, $\Lambda_l(\delta_1,\delta_2)$ — подрешетка индекса $\delta_1\delta_2/(a,\delta_1,\delta_2)$ в Λ_l. Поэтому, применяя равенство (5), находим

$$\begin{aligned}S_n =&\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^a\int_0^a [uq_n+vq_{n-1}\leqslant x_1a]h_{l,a}(u,v)\,du\,dv + O\left(\frac{x_1^2a^2}{q_{n-1}^2}s_{n-1}q_n\right) =\\ =&\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{a\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1a}\int_0^{x_2a}\left[\frac{s_n}{q_n}\leqslant\frac{c}{b}<\frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right]\rho_{l,a}(b,c)\,db\,dc + O\left(x_1x_2\frac{a^2q_n}{q_{n-1}}\right).\end{aligned}$$

Далее, замечая, что

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{K(a_1,\ldots,a_n)}{K(a_1,\ldots,a_{n-1})} = \langle a_n; a_{n-1},\ldots,a_1\rangle \leqslant a_n,$$

находим

$$S_n = a^2\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\left[\frac{s_n}{q_n}\leqslant\frac{t_2}{t_1}<\frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right]\rho_{l,a}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 + O(x_1x_2a^2a_n). \tag{7}$$

Аналогично при $n<r$ из двух ограничений $b\leqslant x_1a$, $c\leqslant x_2a$ остается лишь второе. С учетом соотношений

$$\frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{K(a_{n+1},\ldots,a_m)}{K(a_{n+2},\ldots,a_m)} = \langle a_{n+1};\ldots,a_m\rangle \leqslant a_{n+1}$$

это приводит к равенству

$$S_n = a^2\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\left[\frac{s_n}{q_n}\leqslant\frac{t_2}{t_1}<\frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right]\rho_{l,a}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 + O(x_1x_2a^2a_{n+1}). \tag{8}$$

Если же $n=r$, то прямая $c/b=x_2/x_1$ на плоскости Obc делит угол $s_n/q_n\leqslant c/b<s_{n-1}/q_{n-1}$ на две части, в первой из которых ($s_n/q_n\leqslant c/b<x_2/x_1$) нужно учитывать ограничение $b\leqslant x_1a$, а во второй ($x_2/x_1\leqslant c/b<s_{n-1}/q_{n-1}$) — ограничение $c\leqslant x_2a$. Поэтому

$$\begin{aligned}S_n =&\sum_{u>0}\sum_{v\geqslant 0}[b(u,v)\leqslant x_1a, x_2b(u,v)>x_1c(u,v), \delta_1\mid b(u,v), \delta_2\mid c(u,v)]h_{l,a}(u,v)+\\ &+\sum_{u>0}\sum_{v\geqslant 0}[c(u,v)\leqslant x_2a, x_2b(u,v)\leqslant x_1c(u,v), \delta_1\mid b(u,v), \delta_2\mid c(u,v)]h_{l,a}(u,v).\end{aligned}$$

Переменные u, v меняются в области, периметр которой оценивается как (см. свойство 6°)

$$O\left(\frac{x_1a}{q_r}+\frac{x_2a}{s_{r-1}}+x_1(s_{r-1}-s_r)+x_2(q_r-q_{r-1})\right) = O\left(\frac{x_1a}{q_r}+\frac{x_2a}{s_{r-1}}\right).$$

Наибольшее значение $h_{l,a}(u,v)$, согласно неравенству (6), есть $O(ax_1s_{r-1}+ax_2q_r)$. При этом

$$\left(\frac{x_1a}{q_r}+\frac{x_2a}{s_{r-1}}\right)(ax_1s_{r-1}+ax_2q_r) \ll x_1x_2a^2(a_r+a_{r+1}).$$

Значит, с помощью замечания 2 получаем

$$S_r = a^2\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\left[\frac{s_r}{q_r}\leqslant\frac{t_2}{t_1}<\frac{s_{r-1}}{q_{r-1}}\right]\rho_{l,a}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 + O(x_1x_2a^2(a_r+a_{r+1})). \tag{9}$$

Таким образом для суммы

$$S_{l,a}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2)=\sum_{n=o}^{m}S_n$$

с учетом равенств (7)–(9) находим асимптотическую формулу

$$S_{l,a}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2)=a^2\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\rho_{l,a}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2+O(x_1x_2a^2(a_1+\ldots+a_m)).$$

Цепная дробь с минусами $a/l=\langle a_1;a_2,\ldots,a_m\rangle$ получается из обычной цепной дроби $a/l=[b_1;b_2,\ldots,b_s]$ путем последовательного применения к неполным частным с четными номерами преобразования

$$[t_{2j-1};t_{2j},t_{2j+1}+\alpha]=\langle t_{2j-1}+1;\underbrace{2,\ldots,2}_{t_{2j}-1},t_{2j+1}+1+\alpha\rangle.$$

При этом последнее неполное частное (если оно имеет четный номер) заменяется по формуле

$$[t_{2j-1};t_{2j}]=\langle t_{2j-1}+1;\underbrace{2,\ldots,2}_{t_{2j}-1}\rangle.$$

Значит,

$$a_1+\ldots+a_m\leqslant 2(b_1+\ldots+b_s)=2s_1(l/a),$$

что и дает нужную асимптотическую формулу. □

Далее знак звездочки в суммах вида

$$\sum_{x=1}^{a}{}^{*},\qquad \sum_{x=0}^{a-1}{}^{*}$$

означает, что переменная суммирования x, связана с a условием взаимной простоты: $(a,x)=1$.

Следствие 2. *В условиях леммы 2 для суммы*

$$S_a(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2)=\sum_{l=1}^{a}{}^{*}S_{l,a}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2)$$

справедлива асимптотическая формула

$$S_a(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2)=a^2\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\rho_a(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2+O(x_1x_2a^3\log^2 a),$$

где

$$\rho_a(t_1,t_2)=\sum_{l=1}^{a}{}^{*}\rho_{l,a}(t_1,t_2).$$

Доказательство. Достаточно просуммировать равенство из леммы 9 и воспользоваться оценкой (см. [24])

$$\sum_{p=1}^{q}s_1(p/q)\ll q\cdot\log^2(q+1).$$

□

Лемма 3. *Пусть x_1, x_2 — положительные действительные числа. Тогда для суммы*

$$F_a(x_1,x_2) = \sum_{(b,c)\in M_a(x_1,x_2)} f(a,b,c)$$

справедлива асимптотическая формула

$$F_a(x_1,x_2) = a^2 \sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}} \frac{1}{d_1d_2} \sum_{\delta_1|d_2a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2|d_1a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}(a,\delta_1,\delta_2) \int_0^{x_1d_2}\int_0^{x_2d_1} \rho_{a_1}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 + \\ + O(x_1x_2a^{3+\varepsilon}),$$

где $a_1 = a/(d_1d_2)$.

Доказательство. Для нахождения суммы $F_a(x_1,x_2)$ введем параметры $d_1 = (a,b)$, $d_2 = (a,c)$ и положим $b_1 = b/d_1$, $c_1 = c/d_2$, $a_1 = a/(d_1d_2)$. Для всех ненулевых слагаемых $(d_1,d_2) = 1$. Поэтому

$$F_a(x_1,x_2) = \sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}} \sum_{\substack{b\leqslant x_1a\\(b,a)=d_1}} \sum_{\substack{c\leqslant x_2a\\(c,a)=d_2}} f(a,b,c) = \\ = \sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}} \sum_{\substack{b_1\leqslant x_1d_2a_1\\(b_1,d_2a_1)=1}} \sum_{\substack{c_1\leqslant x_2d_1a_1\\(c_1,d_1a_1)=1}} f(d_1d_2a_1, d_1b_1, d_2c_1).$$

Применяя тождество Джонсона (см. [25])

$$f(a,b,c) = df\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d},c\right),$$

находим

$$F_a(x_1,x_2) = \sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}} d_1d_2 \sum_{\substack{b_1\leqslant x_1d_2a_1\\(b_1,d_2a_1)=1}} \sum_{\substack{c_1\leqslant x_2d_1a_1\\(c_1,d_1a_1)=1}} f(a_1,b_1,c_1).$$

Теперь число Фробениуса можно выразить через функцию Рёдсета по формуле (4). Значит,

$$F_a(x_1,x_2) = \sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}} d_1d_2 \sideset{}{^*}\sum_{l=1}^{a_1} \sum_{\substack{b_1\leqslant x_1d_2a_1\\(b_1,d_2a_1)=1}} \sum_{\substack{c_1\leqslant x_2d_1a_1\\(c_1,d_1a_1)=1}} \delta_{a_1}(b_1l-c_1)\rho_{l,a_1}(b_1,c_1) = \\ = \sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}} d_1d_2 \sum_{\delta_1|d_2a_1} \mu(\delta_1) \sum_{\delta_2|d_1a_1} \mu(\delta_2) \sideset{}{^*}\sum_{l=1}^{a_1} \sum_{\substack{b_1\leqslant x_1d_2a_1\\\delta_1|b_1}} \sum_{\substack{c_1\leqslant x_2d_1a_1\\\delta_2|c_1}} \delta_{a_1}(b_1l-c_1)\rho_{l,a_1}(b_1,c_1).$$

Далее, согласно следствию 2

$$F_a(x_1,x_2) = a^2 \sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}} \frac{1}{d_1d_2} \sum_{\delta_1|d_2a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2|d_1a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}(a,\delta_1,\delta_2) \int_0^{x_1d_2}\int_0^{x_2d_1} \rho_{a_1}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 + \\ + O(x_1x_2a^{3+\varepsilon}).$$

□

Замечание 3. Те же самые рассуждения, примененные к сумме

$$G_a(x_1,x_2)=\sum_{(b,c)\in M_a(x_1,x_2)}\sqrt{abc}$$

приводят к формуле

$$G_a(x_1,x_2)=a^2\sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}}\frac{1}{d_1d_2}\sum_{\delta_1|d_2a_1}\frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1}\sum_{\delta_2|d_1a_1}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}(a,\delta_1,\delta_2)\varphi(a_1)a_1^{1/2}\int_0^{x_1d_2}\int_0^{x_2d_1}\sqrt{t_1t_2}\,dt_1\,dt_2+$$
$$+\,O(x_1x_2a^{3+\varepsilon}).$$

Замечание 4. В силу однородности

$$\rho_{l,a}(t_1,t_2)=t_1\cdot\rho_{l,a}(t_2/t_1),$$

где при $s_n/q_n\leqslant\xi<s_{n-1}/q_{n-1}$

$$\rho_{l,a}(\xi)=s_{n-1}+\xi q_n-\min\{s_n,\xi q_{n-1}\}.$$

Поэтому, зная функцию

$$\rho_a(\xi)=\sum_{l=1}^{a}{}^{*}\rho_{l,a}(\xi),$$

легко найти нужную плотность

$$\rho_a(t_1,t_2)=t_1\cdot\rho_a(t_2/t_1). \tag{10}$$

6 Преобразование плотности

В соответствии со свойством 5° последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$

$$\rho_a^*(\xi)=\sum_{u_1=1}^{a}\sum_{v_1=0}^{u_1-1}{}^{*}\sum_{u_2=1}^{a}\sum_{v_2=0}^{u_2-1}{}^{*}\left[u_1u_2-v_1v_2=a,\frac{v_2}{u_1}\leqslant\xi<\frac{u_2}{v_1}\right]h(u_1,u_2,v_1,v_2;\xi),$$

где

$$h(u_1,u_2,v_1,v_2;\xi)=u_2+\xi u_1-\min\left\{v_2,\xi v_1\right\}.$$

Рассматривая отдельно случаи $v_2>\xi v_1$ и $v_2\leqslant\xi v_1$, запишем искомую плотность в виде

$$\rho_a^*(\xi)=\lambda^*(a;\xi)+\eta^*(a;\xi),$$

где

$$\lambda^*(a;\xi)=\sum_{u_1=1}^{a}\sum_{v_1=0}^{u_1-1}{}^{*}\sum_{u_2=1}^{a}\sum_{v_2=0}^{u_2-1}{}^{*}\left[u_1u_2-v_1v_2=a,\frac{v_2}{u_1}\leqslant\xi<\frac{v_2}{v_1}\right]h_1(u_1,u_2,v_1,v_2;\xi),$$
$$\eta^*(a;\xi)=\sum_{u_1=1}^{a}\sum_{v_1=0}^{u_1-1}{}^{*}\sum_{u_2=1}^{a}\sum_{v_2=0}^{u_2-1}{}^{*}\left[u_1u_2-v_1v_2=a,\frac{v_2}{v_1}\leqslant\xi<\frac{u_2}{v_1}\right]h_2(u_1,u_2,v_1,v_2;\xi),$$
$$h_1(u_1,u_2,v_1,v_2;\xi)=u_2+\xi(u_1-v_1),\quad h_2(u_1,u_2,v_1,v_2;\xi)=u_2-v_2+\xi u_1.$$

Замена переменных $u_1 \leftrightarrow u_2$, $v_1 \leftrightarrow v_2$ с учетом замечания 1 приводит к равенству $\eta^*(a;\xi) = \xi\lambda^*(a;1/\xi)$. Поэтому

$$\rho_a^*(\xi) = \lambda^*(a;\xi) + \xi\lambda^*(a;1/\xi). \tag{11}$$

Для вычисления функции $\lambda^*(a;\xi)$ перепишем уравнение $u_1u_2 - v_1v_2 = a$ в виде

$$u_1(u_2 - v_2) + v_2(u_1 - v_1) = a$$

и введем переменные $x = u_1$, $y = u_2 - v_2$, $z = u_1 - v_1$, $w = v_2$. Тогда сумма $\lambda^*(a;\xi)$ перепишется в виде

$$\lambda^*(a;\xi) = \sum_{x=1}^{a} \sum_{z=1}^{x}{}^{*} \sum_{y=1}^{a} \sum_{w=0}^{a-1}{}^{*} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leqslant \xi < \frac{w}{x-z} \right] (y + w + \xi z).$$

Освобождаясь от условий взаимной простоты, получаем

$$\lambda^*(a;\xi) = \sum_{d_1d_2|a} \mu(d_1)\mu(d_2)d_2\lambda\left(\frac{a}{d_1d_2}, \frac{d_1\xi}{d_2}\right), \tag{12}$$

где

$$\lambda(a;\xi) = \sum_{x\geqslant 1} \sum_{z=1}^{x} \sum_{y\geqslant 1} \sum_{w\geqslant 0} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leqslant \xi < \frac{w}{x-z} \right] (y + w + \xi z).$$

В соответствии со слагаемыми в последней скобке запишем функцию $\lambda(a;\xi)$ в виде

$$\lambda(a;\xi) = Y(a;\xi) + W(a;\xi) + \xi Z(a;\xi) \tag{13}$$

и найдем каждую из сумм по отдельности.

7 Применение оценок сумм Клостермана

Пусть q — натуральное число, a — целое и f — неотрицательная функция. Обозначим через $T[f]$ число решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$, лежащих в области $P_1 < x \leqslant P_2$, $0 < y \leqslant f(x)$:

$$T[f] = \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \sum_{0 < y \leqslant f(x)} \delta_q(xy - a).$$

Как показано в работе Быковского [26], вычисление $T[f]$ сводится к нахождению суммы

$$S[f] = \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \mu_{q,a}(x) f(x),$$

где $\mu_{q,a}(x)$ — число решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$ относительно переменной y, лежащей в пределах $1 \leqslant y \leqslant q$.

Приведем упрощенный результат работы [18], уточняющий соответствующую теорему из [26]. Он основан на оценках сумм Клостермана

$$K_q(l,m,n) = \sum_{x,y=1}^{q} \delta_q(xy - l) e^{2\pi i \frac{mx+ny}{q}} \tag{14}$$

и методе ван дер Корпута оценки тригонометрических сумм. Доказательство использует неравенство

$$|K_q(l,m,n)| \leqslant \sigma_0(q)\cdot\sigma_0((l,m,n,q))\cdot(lm,ln,mn,q)^{1/2}\cdot q^{1/2},$$

обобщающее результат Эстермана [27]

$$|K_q(\pm 1,m,n)| \leqslant \sigma_0(q)\cdot(m,n,q)^{1/2}\cdot q^{1/2}.$$

Здесь и далее

$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha$$

— сумма степеней делителей натурального q. Везде ниже ε — сколь угодно малое положительное число. В показателях 2ε будет заменяться на ε.

Лемма 4. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 2$, на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для некоторых $A > 0$, $w \geqslant 1$*

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{A}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T[f] = S[f] - \frac{P}{2}\cdot\delta_q(a) + R[f],$$

где

$$R[f] \ll_{w,\varepsilon} (PA^{-1/3} + A^{1/2}D + q^{1/2})P^\varepsilon$$

и $D = (a,q)$.

Замечание 5. Из леммы 4 следует, что асимптотическая формула для $T[f]$ не изменится, если в определении $T[f]$ нестрогое неравенство $y \leqslant f(x)$ заменить строгим $y < f(x)$.

Лемма 5. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 > 0$, и вещественная неотрицательная функция $f(x)$ на отрезке $[P_1, P_2]$ постоянна. Тогда*

$$T[f] = S[f] + O\left(\left(q^{1/2} + \left(\frac{P}{q} + 1\right) D\right) q^\varepsilon\right),$$

где $D = (a,q)$.

Доказательство. По определению $\mu_{k,a}(x)$ при любом Y

$$\sum_{P_1 < x \leqslant P_2}\ \sum_{Y < y \leqslant Y+q} \delta_q(xy - a) = \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \mu_{k,a}(x). \tag{15}$$

Далее (см. [18], замечание 2), при любом X и $0 < Y \leqslant q$

$$\sum_{X < x \leqslant X+q}\ \sum_{0 < y \leqslant Y} \delta_q(xy - a) = \frac{Y}{q} K_q(a,0,0) + O(Dq^\varepsilon), \tag{16}$$

где $K_q(l,m,n)$ определено равенством (14). Кроме того, при $X_2-X_1=X\leqslant q$, $Y_2-Y_1=Y\leqslant q$

$$\sum_{X_1<x\leqslant X_2}\sum_{Y_1<y\leqslant Y_2}\delta_q(xy-a)=\frac{XY}{q^2}K_q(a,0,0)+O((q^{1/2}+D)q^{\varepsilon}) \tag{17}$$

(см. [18], лемма 3). С учетом соотношений

$$\sum_{X_1<x\leqslant X_2}\mu_{k,a}(x)=\sum_{k|(a,q)}k\sum_{\substack{X_1<x\leqslant X_2\\(x,q)=k}}1=\sum_{k|(a,q)}k\left(\frac{\varphi(q/k)}{q/k}\cdot\frac{X}{k}+O(\sigma_0(q/k))\right)=$$

$$=\frac{X}{q}\sum_{k|(a,q)}k\varphi(q/k)+O(Dq^{\varepsilon})=\frac{X}{q}K_q(a,0,0)+O(Dq^{\varepsilon})$$

асимптотические формулы (15)– (17) приводят к утверждению леммы. □

Лемма 6. *Пусть f — убывающая на отрезке $[P_1,P_2]$ функция и $f(P_1)-f(P_2)=Q$. Тогда в обозначениях леммы 4*

$$S[f]=\psi(a,q)\int_{P_1}^{P_2}f(x)dx+O(DQq^{-1+\varepsilon}),$$

где

$$\psi(a,q)=\frac{1}{q}\sum_{k|(a,q)}\sum_{\delta|q/k}\frac{\mu(\delta)}{\delta}=\frac{K_q(a,0,0)}{q^2}. \tag{18}$$

Доказательство. Действительно, $\mu_{q,a}(x)=k\delta_k(a)$, где $k=(q,x)$. Поэтому

$$S[f]=\frac{1}{q}\sum_{P_1<x\leqslant P_2}k\delta_k(a)f(x)=\frac{1}{q}\sum_{k|(a,q)}k\sum_{\substack{\frac{P_1}{k}<x\leqslant\frac{P_2}{k}\\(x,q/k)=1}}f(kx)=$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{k|(a,q)}k\sum_{\delta|q/k}\mu(\delta)\sum_{\frac{P_1}{k\delta}<x\leqslant\frac{P_2}{k\delta}}f(k\delta x).$$

Заменяя внутреннюю сумму интегралом, приходим к нужной асимптотической формуле:

$$S[f]=\frac{1}{q}\sum_{k|(a,q)}k\sum_{\delta|q/k}\mu(\delta)\left(\frac{1}{k\delta}\int_{P_1}^{P_2}f(x)dx+O(Q)\right)=$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{k|(a,q)}\sum_{\delta|q/k}\frac{\mu(\delta)}{\delta}\int_{P_1}^{P_2}f(x)dx+O(DQq^{-1+\varepsilon}).$$

□

Лемма 7. *Пусть функция $I(r)/r\in C([0,1])$ имеет конечное число участков монотонности, $|I(r)/r|\leqslant B$ для всех $r\in[0,1]$, $\psi(a,q)$ определено равенством (18), $1\leqslant U\leqslant a$, и $0\leqslant\theta\leqslant 1$. Тогда*

$$\sum_{q\leqslant\theta U}\psi(a,q)I(q/U)=\frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)}\int_0^{\theta}\frac{I(r)}{r}\,dr+O(BU^{-1}a^{\varepsilon}).$$

Доказательство. По определению функции $\psi(a,q)$

$$\sum_{q\leqslant\theta U}\psi(a,q)I(q/U)=\sum_{k|a}\sum_{\delta<U/k}\frac{\mu(\delta)}{\delta}\sum_{\substack{q<\theta U\\ \delta k|q}}\frac{I(q/U)}{q}.$$

Заменяя внутреннюю сумму интегралом, приходим к нужной формуле:

$$\sum_{q\leqslant\theta U}\psi(a,q)I(q/U)=\sum_{k|a}\sum_{\delta<U/k}\frac{\mu(\delta)}{\delta}\left(\frac{1}{\delta k}\int_0^\theta\frac{I(r)}{r}\,dr+O(BU^{-1})\right)=$$
$$=\sum_{k|a}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\zeta(2)}+O\left(\frac{k}{U}\right)\right)\int_0^\theta\frac{I(r)}{r}\,dr+O(BU^{-1}a^\varepsilon)=\frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)}\int_0^\theta\frac{I(r)}{r}\,dr+O(BU^{-1}a^\varepsilon).$$

□

8 Вычисление трех вспомогательных сумм

Для вычисления сумм $Y(a;\xi)$, $W(a;\xi)$ и $Z(a;\xi)$ введем параметры $U_1\asymp\sqrt{a\xi}$, $U_2=aU_1^{-1}\asymp\sqrt{a/\xi}$. Будем считать, что $a\geqslant 9$ и $9/a\leqslant\xi\leqslant a/9$, поскольку в противном случае дальнейшие утверждения тривиальны. При $\xi\geqslant 1$ положим $n=\lfloor\sqrt{a\xi}\rfloor-2\geqslant 1$. Тогда для $U_1\in[n+\frac14,n+\frac34]$ параметр $U_2=a/U_1$ меняется внутри отрезка $\left[\frac{a}{n+3/4},\frac{a}{n+1/4}\right]$, длина которого больше $1/2$. Поэтому можно выбрать $U_1,U_2\geqslant 1$ так, чтобы выполнялись условия

$$U_1U_2=a,\quad \|U_1\|,\|U_2\|\geqslant 1/4,\quad \frac{1}{12}\sqrt{a\xi}\leqslant U_1\leqslant\sqrt{a\xi},\quad \sqrt{a/\xi}\leqslant U_2\leqslant 12\sqrt{a/\xi}$$

(здесь и далее $\|x\|$ — расстояние от вещественного x до ближайшего целого числа). При $\xi>1$ положим $n=\lfloor\sqrt{a/\xi}\rfloor-2\geqslant 1$. Меняя U_2 внутри отрезка $[n+\frac14,n+\frac34]$ аналогично получаем, что можно выбрать U_1, $U_2\geqslant 1$ так, что

$$U_1U_2=a,\quad \|U_1\|,\|U_2\|\geqslant 1/4,\quad \sqrt{a\xi}\leqslant U_1\leqslant 12\sqrt{a\xi},\quad \frac{1}{12}\sqrt{a/\xi}\leqslant U_2\leqslant\sqrt{a/\xi}.$$

Лемма 8. *Для суммы*

$$Y(a;\xi)=\sum_{x\geqslant 1}\sum_{z=1}^{x}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{w\geqslant 1}\left[xy+wz=a,\frac{w}{x}\leqslant\xi<\frac{w}{x-z}\right]y$$

справедлива асимптотическая формула

$$Y(a;\xi)=\frac{2(4-\pi)}{3\zeta(2)}\sigma_{-1}(a)a^{3/2}\xi^{1/2}+O(R(a,\xi)),$$

где

$$R(a,\xi)=(a^{4/3}(1+\xi)+a^{5/4}(\xi^{5/4}+\xi^{-1/4}))a^\varepsilon. \tag{19}$$

Доказательство. Перепишем сумму $Y(a;\xi)$ в виде

$$Y(a;\xi) = \sum_{t=1}^{a} Y(a,t;\xi),$$

где

$$Y(a,t;\xi) = \sum_{x\geqslant 1}\sum_{z=1}^{x}\sum_{y\geqslant t}\sum_{w\geqslant 1}\left[xy+wz=a, \frac{w}{x}\leqslant \xi < \frac{w}{x-z}\right].$$

Разобьем сумму $Y(a,t;\xi)$ на две:

$$Y(a,t;\xi) = Y_1(a,t;\xi) + Y_2(a,t;\xi).$$

В первую отнесем те слагаемые, для которых $w \leqslant U_1$, а ко второй — остальные. При таком разбиении во второй сумме всегда будет выполняться условие $z \leqslant U_2$.

В сумме

$$Y_1(a,t;\xi) = \sum_{w\leqslant U_1}\sum_{x\geqslant 1}\sum_{y\geqslant t}\sum_{z=1}^{x}\left[xy+wz=a, \frac{w}{x}\leqslant \xi < \frac{w}{x-z}\right]$$

при фиксированном значении $w \geqslant 1$ переменные x и y связаны сравнением $xy \equiv a \pmod{w}$. Для известных w, x и y значение z уже находится однозначно:

$$z = \frac{a-xy}{w}.$$

Поэтому, учитывая ограничение $z \leqslant x$, сумму $Y_1(a,t;\xi)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}Y_1(a,t;\xi) &= \sum_{w\leqslant U_1}\sum_{w/\xi\leqslant x\leqslant a}\sum_{y\geqslant t}\delta_w(xy-a)\,[y_1(x)\leqslant y < y_2(x)] = \\ &= \sum_{w\leqslant U_1}\sum_{y\geqslant t}\sum_{x\geqslant 1}\delta_w(xy-a)\,[x_1(y)\leqslant x < x_2(y)] = \sum_{w\leqslant U_1}\sum_{(x,y)\in\Omega}[y\geqslant t]\delta_w(xy-a),\end{aligned}$$

где

$$y_1(x) = \frac{a}{x} - w, \qquad y_2(x) = \frac{a}{x} - w + \frac{w^2}{\xi x}, \tag{20}$$

$$x_1(y) = \frac{a}{w+y}, \qquad x_2(y) = \frac{1}{w+y}\left(a + \frac{w^2}{\xi}\right), \tag{21}$$

а область Ω задается условиями

$$x \geqslant w/\xi, \quad y > 0, \quad y_1(x) \leqslant y < y_2(x)$$

или эквивалентными условиями

$$x \geqslant w/\xi, \quad y > 0, \quad x_1(y) \leqslant x < x_2(y).$$

Выберем параметр $U = \sqrt{a + \frac{w^2}{\xi}}$ и представим Ω в виде

$$\Omega = (\Omega_1 \setminus \Omega_2) \cup (\Omega_3 \setminus (\Omega_4 \cup \Omega_5)),$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega_1 =&\{(x,y) : t \leqslant y \leqslant U-w, w/\xi < x < x_2(y)\},\\
\Omega_2 =&\{(x,y) : t \leqslant y \leqslant U-w, w/\xi < x < x_1(y)\},\\
\Omega_3 =&\{(x,y) : w/\xi < x \leqslant U, t \leqslant y < y_2(x)\},\\
\Omega_4 =&\{(x,y) : w/\xi < x \leqslant a/U, t \leqslant y < y_1(x)\},\\
\Omega_5 =&\{(x,y) : \max\{w/\xi, a/U\} < x \leqslant U, t \leqslant\leqslant U-w\}.
\end{aligned}$$

То есть прямая $y = U - w$ разбивает Ω на части $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ и $\Omega_3 \setminus (\Omega_4 \cup \Omega_5)$, где Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 — криволинейные трапеции, а Ω_5 — прямоугольник.

В областях Ω_1 и Ω_2 применим леммы 4 и 6 к функциям $x_1(y)$ и $x_2(y)$. Для этого разобьем интервал изменения переменной y на промежутки вида $(Y, 2Y] = (P_1, P_2]$ ($Y = (U-w)/2$, $(U-w)/4$, $(U-w)/8$, $\ldots$), на каждом из которых

$$x_1''(y) \asymp x_2''(y) \asymp \frac{a}{(w+Y)^3}, \quad A \asymp \frac{(w+Y)^3}{a}.$$

Учитывая, что

$$S[x_2] - S[x_1] = S[x_2 - x_1], \quad x_2(y) - x_1(y) \leqslant \frac{w^2}{(w+t)\xi} = Q,$$

при суммировании по таким промежуткам, приходим к главному члену

$$\psi(a,w) \iint_{\Omega_1 \setminus \Omega_2} [y \geqslant t]\, dx\, dy + O\left(\delta_w(a) U [t \leqslant U]\right) + O\left(\frac{D_w w a^{\varepsilon}}{\xi(w+t)}\right),$$

где $D_w = (a, w)$, и остатку

$$O((a^{1/3} + a^{1/4} D_w + w^{1/2}) a^{\varepsilon}). \tag{22}$$

При этом добавлено условие $t \leqslant U$, связанное с тем, что при $t > U$ область $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ пуста.

Аналогично в областях Ω_3 и Ω_4 применим леммы 4 и 6 к функциям $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Снова, для $x \in (X, 2X]$

$$y_1''(x) \asymp y_2''(x) \asymp \frac{a}{X^3}, \qquad y_2(x) - y_1(x) \leqslant \frac{w^2}{\xi x} \leqslant w.$$

Поэтому при суммировании по промежуткам вида $(X, 2X]$ ($X = U/2$, $U/4$, $U/8$, $\ldots$) получим главный член

$$\psi(a,w) \iint_{\Omega_3 \setminus \Omega_4} [y \geqslant t]\, dx\, dy + O\left(\delta_w(a) \min\left\{U, \frac{a}{w+t}\right\}\right) + O(D_w a^{\varepsilon})$$

и остаток (22).

В области Ω_5 применим леммы 5 и 6, что даст

$$\psi(a,w) \iint_{\Omega_5} [y \geqslant t]\, dx\, dy + O\left(\frac{D_w}{w} \min\left\{U, \frac{a}{w+t}\right\}\right) + O((w^{1/2} + D_w) a^{\varepsilon}).$$

Объединяя вышесказанное, для суммы $Y_1(a,t;\xi)$ получаем представление

$$Y_1(a,t;\xi) = \sum_{w\leqslant U_1}\left(\psi(a,w)\int_{w/\xi}^{a}dx\int_{t}^{a}[y_1(x)\leqslant y<y_2(x)]\,dy + O\left(R_1(a,t,w;\xi)\right)\right),$$

где

$$R_1(a,t,w;\xi) = \left(a^{1/3}+a^{1/4}D_w+w^{1/2}+\frac{D_w w a^{\varepsilon}}{\xi(w+t)}\right)a^{\varepsilon}+$$
$$+\delta_w(a)U[t\leqslant U]+\delta_w(a)\min\left\{U,\frac{a}{w+t}\right\}.$$

Слагаемые в сумме $Y_1(a,t;\xi)$ являются ненулевыми только при $tw\leqslant a\xi$. Поэтому из неравенств

$$\sum_{w\leqslant N}D_w\leqslant\sum_{D|a}\sum_{\substack{w\leqslant N\\ D|w}}1\leqslant N\sigma_0(a)$$

для остаточного члена получается оценка

$$\sum_{\substack{tw\leqslant a\xi\\ w\leqslant U_1}}R_1(a,t,w;\xi)\ll R_1(a,\xi),$$

где

$$R_1(a,\xi)=(a^{4/3}\xi+a^{5/4}(\xi^{5/4}+\xi)+a)a^{\varepsilon}.$$

Таким образом для суммы

$$Y_1(a;\xi)=\sum_{t=1}^{a}Y_1(a,t;\xi)$$

получаем формулу

$$Y_1(a;\xi) =\sum_{t=1}^{a}\sum_{w\leqslant U_1}\psi(a,w)\int_{w/\xi}^{a}dx\int_{t}^{a}[y_1(x)\leqslant y<y_2(x)]\,dy+O\left(R_1(a;\xi)\right)=$$
$$=\sum_{w\leqslant U_1}\psi(a,w)\int_{w/\xi}^{a}dx\int_{t}^{a}[y_1(x)\leqslant y<y_2(x)]y\,dy+O\left(R_1(a;\xi)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{w\leqslant U_1}\psi(a,w)\left(\int_{w/\xi}^{a/w+w/\xi}y_2^2(x)\,dx-\int_{w/\xi}^{a/w}y_1^2(x)\,dx\right)+O\left(R_1(a;\xi)\right).$$

Возникшие интегралы вычисляются непосредственно, что приводит к равенству

$$Y_1(a;\xi)=\frac{a^{3/2}\xi^{1/2}}{2}\sum_{1\leqslant w\leqslant U_1}\psi(a,w)I_1\left(\frac{w}{U_1}\right)+O\left(R_1(a;\xi)\right),$$

где

$$I_1(r)=r^3-2r^3\log\left(1+\frac{1}{r^2}\right)+2r-2r\log(1+r^2).$$

По лемме 7

$$Y_1(a;\xi) =\frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{2\zeta(2)}\int_0^1\frac{I_1(r)}{r}dr+O\left(R_1(a;\xi)\right)=$$
$$=\frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)}\left(\frac{5}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{4}{3}\log 2\right)+O\left(R_1(a;\xi)\right). \tag{23}$$

Рассмотрим теперь сумму

$$Y_2(a,t;\xi) = \sum_{z\geqslant 1}\sum_{x\geqslant z}\sum_{y\geqslant t}\sum_{w>U_1}\left[xy+wz=a, \frac{w}{x}\leqslant \xi < \frac{w}{x-z}\right].$$

При фиксированном $z\geqslant 1$ переменные x и y удовлетворяют сравнению $xy\equiv a \pmod z$, а для известных z, x и y значение w уже находится однозначно:

$$w = \frac{a-xy}{z}.$$

Ограничение $w>U_1$ приводит к тому, что $z<a/U_1=U_2$. Поэтому сумму $Y_2(a,t;\xi)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}Y_2(a,t;\xi) &= \sum_{z\leqslant U_2}\sum_{x\geqslant U_2}\sum_{y\geqslant t}\delta_z(xy-a)\left[y_3(x)\leqslant y<y_4(x)\right] = \\ &= \sum_{z\leqslant U_2}\sum_{y\geqslant t}\sum_{x\geqslant U_2}\delta_z(xy-a)\left[x_3(y)\leqslant x<x_4(y)\right],\end{aligned}$$

где

$$y_3(x) = \frac{a}{x}-\xi z, \qquad y_4(x) = \min\left\{\frac{a-U_1z}{x}, \frac{a}{x}-\xi z+\frac{\xi z^2}{x}\right\}, \tag{24}$$

$$x_3(y) = \frac{a}{\xi z+y}, \qquad x_4(y) = \min\left\{\frac{a-U_1z}{y}, \frac{a+\xi z^2}{\xi z+y}\right\}. \tag{25}$$

Выберем теперь $U=\sqrt{a+\xi z^2}$. Как и в случае суммы $Y_1(a,t;\xi)$, при $y\leqslant U$ леммы 4 и 6 будут применяться к функциям $x_3(y)$ и $x_4(y)$, а при $y>U$ — к $y_3(x)$ и $y_4(x)$. Так же разбивая интервалы изменения переменных x и y на промежутки вида $(X,2X]$ и $(Y,2Y]$, находим

$$Y_2(a,t;\xi) = \sum_{z\leqslant U_2}\left(\psi(a,z)\int_z^a dx\int_t^a \left[y_3(x)\leqslant y<y_4(x)\right]dy + O\left(R_2(a,t,z;\xi)\right)\right),$$

где

$$R_2(a,t,z;\xi) = (a^{1/3}+a^{1/4}D_z+z^{1/2})a^{\varepsilon}+\delta_z(a)(U[t\leqslant U]+a/t)+D_z(\xi+1)+D_z\frac{a^{3/4}}{(a-U_1z)^{1/2}}.$$

Слагаемые в сумме $Y_2(a,t;\xi)$ будут ненулевыми только при $t\leqslant U_1$. Поэтому, с учетом оценки

$$\sum_{\substack{tz\leqslant a\\ z\leqslant U_2}}\frac{a^{3/4}}{(a-U_1z)^{1/2}} \ll \frac{a^{7/4}}{U_1^{1/2}}\sum_{z\leqslant U_2}\frac{1}{z(U_2-z)^{1/2}} \ll a^{5/4+\varepsilon}.$$

для остаточного члена

$$R_2(a,\xi) = \sum_{\substack{tz\leqslant a\\ z\leqslant U_2}} R_2(a,t,z;\xi)$$

получаем

$$R_2(a,\xi) \ll (a^{4/3}+a^{5/4}\xi^{-1/4}+a\xi)a^{\varepsilon}.$$

Значит, для суммы

$$Y_2(a;\xi) = \sum_{t=1}^{a} Y_2(a,t;\xi)$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} Y_2(a;\xi) =& \sum_{t=1}^{a} \sum_{z \leqslant U_2} \psi(a,z) \int_0^a dx \int_t^a [y_3(x) \leqslant y < y_4(x)]\, dy + O\left(R_2(a;\xi)\right) = \\ =& \sum_{z \leqslant U_2} \psi(a,z) \int_0^a dx \int_t^a [y_3(x) \leqslant y < y_4(x)] y\, dy + O\left(R_2(a;\xi)\right) = \\ =& \frac{1}{2} \sum_{z \leqslant U_2} \psi(a,z) \left(\int_{U_2}^{a/(\xi z)+z} y_4^2(x)\, dx - \int_{U_2}^{a/(\xi z)} y_3^2(x)\, dx \right) + O\left(R_2(a;\xi)\right). \end{aligned}$$

После вычисления интегралов приходим к равенству

$$Y_2(a;\xi) = \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}}{2} \sum_{1 \leqslant z \leqslant U_2} \psi(a,z) I_2\left(\frac{z}{U_2}\right) + O\left(R_2(a;\xi)\right),$$

где

$$I_2(r) = 2r\left(r^2 \log r - (1+r^2)\log\frac{1+r^2}{1+r}\right).$$

По лемме 7

$$\sum_{z \leqslant U_2} \psi(a,z) I_2(z/U_2) = \frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 \frac{I_2(r)}{r} dr + O(a^{1+\varepsilon}\xi).$$

Отсюда

$$Y_2(a;\xi) = \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(\frac{1}{6} - \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\log 2\right) + O\left(R_2(a;\xi)\right). \tag{26}$$

Подставляя равенства (23) и (26) в формулу

$$Y(a;\xi) = Y_1(a;\xi) + Y_2(a;\xi)$$

приходим к утверждению леммы. □

Лемма 9. *Для суммы*

$$W(a;\xi) = \sum_{x \geqslant 1} \sum_{z=1}^{x} \sum_{y \geqslant 1} \sum_{w \geqslant 0} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leqslant \xi < \frac{w}{x-z} \right] w$$

справедлива асимптотическая формула

$$W(a;\xi) = \frac{2(\pi-2)}{3\zeta(2)} \sigma_{-1}(a) a^{3/2}\xi^{1/2} + O(R(a,\xi)),$$

где остаток $R(a,\xi)$ *определен равенством* (19).

Доказательство. Запишем данную сумму в виде

$$W(a;\xi) = \sum_{t=1}^{a} W(a,t;\xi),$$

где

$$\begin{aligned}
W(a,t;\xi) =& W_1(a,t;\xi) + W_2(a,t;\xi),\\
W_1(a,t;\xi) =& \sum_{t\leqslant w<U_1} \sum_{x,y\geqslant 1} \sum_{z=1}^{x} \left[xy+wz=a, \frac{w}{x} \leqslant \xi < \frac{w}{x-z} \right],\\
W_2(a,t;\xi) =& \sum_{z\leqslant U_2} \sum_{x,y\geqslant 1} \sum_{w\geqslant \max\{t,U_1\}} \left[xy+wz=a, \frac{w}{x} \leqslant \xi < \frac{w}{x-z} \right].
\end{aligned}$$

В сумме $W_1(a,t;\xi)$ от уравнения $xy+wz=a$ перейдем к сравнению $xy \equiv a \pmod{w}$. Ограничения на переменные $z \leqslant x$, $w \leqslant \xi x$, $\xi(x-z) < w$ — те же, что и в сумме $Y_1(a,t;\xi)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
W_1(a,t;\xi) =& \sum_{t\leqslant w\leqslant U_1} \sum_{x\geqslant w/\xi} \sum_{y\geqslant 1} \delta_w(xy-a) \left[x_1(y) \leqslant x < x_2(y) \right] =\\
=& \sum_{t\leqslant w<U_1} \sum_{y\geqslant 1} \sum_{x\geqslant w/\xi} \delta_w(xy-a) \left[y_1(x) \leqslant y < y_2(x) \right],
\end{aligned}$$

где функции $x_1(y)$, $x_2(y)$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определены равенствами (20)–(21). Применение лемм 4 и 6 приводит к асимптотической формуле

$$W_1(a,t;\xi) = \sum_{w\leqslant U_1} \left(\psi(a,w) \int_{w/\xi}^{a} dx \int_0^a \left[y_1(x) \leqslant y < y_2(x) \right] dy + O\left(R_3(a,t,w;\xi) \right) \right),$$

где

$$R_3(a,t,w;\xi) = (a^{1/3} + a^{1/4} D_w + w^{1/2}) a^{\varepsilon} + \delta_w(a) U + D_w \xi^{-1}.$$

При этом, как и для суммы $Y_1(a;\xi)$

$$\sum_{t\leqslant a} \sum_{t\leqslant w<U_1} R_3(a,t,w;\xi) \ll R_1(a;\xi).$$

Значит,

$$\begin{aligned}
W_1(a;\xi) =& \sum_{w\leqslant U_1} w\psi(a,w) \int_{w/\xi}^{a} dx \int_0^a \left[y_1(x) \leqslant y < y_2(x) \right] dy + O\left(R_1(a;\xi) \right) =\\
=& a \sum_{w\leqslant U_1} w\psi(a,w) I_3(w/U_1) + O\left(R_1(a;\xi) \right),
\end{aligned}$$

где

$$I_3(r) = (1+r^2)\log(1+r^2) - r^2 \log r - r^2. \tag{27}$$

По лемме 7

$$\begin{aligned}
W_1(a;\xi) =& \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 I_3(r)\, dr + O\left(R_1(a;\xi) \right) =\\
=& \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(-\frac{5}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\log 2 \right) + O\left(R_1(a;\xi) \right).
\end{aligned} \tag{28}$$

В сумме $W_2(a,t;\xi)$ от уравнения $xy+wz=a$ перейдем к сравнению $xy\equiv a \pmod z$. Тогда

$$\begin{aligned}W_2(a,t;\xi) &= \sum_{z\leqslant U_2}\sum_{x\geqslant U_2}\sum_{y>0}\delta_z(xy-a)\,[y_3(x)\leqslant y<y_4(x,t)] = \\ &= \sum_{z\leqslant U_2}\sum_{x\geqslant U_2}\sum_{y>0}\delta_z(xy-a)\,[x_3(y)\leqslant x<x_4(y,t)]\,,\end{aligned}$$

где функции $x_3(y)$ и $y_3(x)$ определены в (24) и (25),

$$\begin{aligned}y_4(x,t) &= \min\left\{\frac{a-\max\{U_1,t\}z}{x},\frac{a}{x}-\xi z+\frac{\xi z^2}{x}\right\},\\ x_4(y,t) &= \min\left\{\frac{a-\max\{U_1,t\}z}{y},\frac{a+\xi z^2}{\xi z+y}\right\}.\end{aligned}$$

Применяя леммы 4 и 6 к функциям $x_3(y)$, $x_4(y,t)$, $y_3(x)$ и $y_4(x,t)$ приходим к равенству

$$W_2(a,t;\xi) = \sum_{z\leqslant U_2}\left(\psi(a,z)\int_{U_2}^{a}dx\int_0^a[y_3(x)\leqslant y<y_4(x,t)]\,dy+O\left(R_4(a,t,z;\xi)\right)\right),$$

где

$$R_3(a,t,z;\xi) = (a^{1/3}+a^{1/4}D_z+z^{1/2})a^{\varepsilon}+\delta_z(a)\min\{U_1,a\xi/t\}+D_z(1+\xi)+D_z\frac{a^{3/4}}{(a-zU_1)^{1/2}}.$$

При этом слагаемые будут ненулевыми только при $tz\leqslant a$ и

$$\sum_{t=1}^{a}\sum_{z\leqslant\min\{U_2,a/t\}}R_4(a,t,z;\xi)\ll R_2(a,\xi).$$

Значит,

$$\begin{aligned}W_2(a;\xi) = &\sum_{t\leqslant U_1}\sum_{z\leqslant U_2}\psi(a,z)\int_{U_2}^{a}dx\int_0^a[y_3(x)\leqslant y<y_4(x)]\,dy+\\ &+\sum_{U_1<t\leqslant a}\sum_{z\leqslant a/t}\psi(a,z)\int_{U_2}^{a}dx\int_0^a[y_3(x)\leqslant y<y_4(x,t)]\,dy+O\left(R_2(a;\xi)\right).\end{aligned}$$

Двойные интегралы вычисляются непосредственно:

$$\begin{aligned}\int_{U_2}^{a}dx\int_0^a[y_3(x)\leqslant y<y_4(x)]\,dy &= aI_4(z/U_2),\\ \int_{U_2}^{a}dx\int_0^a[y_3(x)\leqslant y<y_4(x,t)]\,dy &= aI_4(z/U_2,U_1/t),\end{aligned}$$

где $I_4(r)=I_4(r,1)$ и

$$I_4(r,\tau) = (1+r^2)\log(1+r^2)-r^2\log r+r\tau\log\tau-r(r+\tau)\log(r+\tau). \tag{29}$$

Следовательно, по лемме 7,

$$W_2(a;\xi) = \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)}\left(\int_0^1 \frac{I_4(r)}{r}dr + \int_1^\infty d\tau\int_0^{1/\tau}\frac{I_4(r,\tau)}{r}dr\right) + O\left(R_2(a;\xi)\right) =$$
$$= \frac{a^{3/2}\xi^{1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)}\left(\frac{1}{3}+\frac{\pi}{3}-\frac{4}{3}\log 2\right) + O\left(R_2(a;\xi)\right). \qquad (30)$$

Складывая равенства (28) и (30), приходим к утверждению леммы. □

Лемма 10. *Для суммы*

$$Z(a;\xi) = \sum_{x\geqslant 1}\sum_{z=1}^{x}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{w\geqslant 0}\left[xy+wz=a, \frac{w}{x}\leqslant\xi<\frac{w}{x-z}\right]z$$

справедлива асимптотическая формула

$$Z(a;\xi) = \frac{2(\pi-2)}{3\zeta(2)}\sigma_{-1}(a)a^{3/2}\xi^{-1/2} + O(\xi^{-1}R(a,\xi)),$$

где где остаток $R(a,\xi)$ *определен равенством* (19).

Доказательство. Разобьем $Z(a;\xi)$ на четыре суммы

$$Z(a;\xi) = Z_1(a;\xi) + Z_2(a;\xi) + Z_3(a;\xi) + Z_4(a;\xi), \qquad (31)$$

где

$$Z_1(a;\xi) = \sum_{t\leqslant U_2}\sum_{w\leqslant\xi t}\sum_{x,y\geqslant 1}\sum_{t\leqslant z\leqslant x}\left[xy+wz=a, \frac{w}{x}\leqslant\xi<\frac{w}{x-z}\right],$$
$$Z_2(a;\xi) = \sum_{t\leqslant U_2}\sum_{\xi t<w\leqslant U_1}\sum_{x,y\geqslant 1}\sum_{t\leqslant z\leqslant x}\left[xy+wz=a, \frac{w}{x}\leqslant\xi<\frac{w}{x-z}\right],$$
$$Z_3(a;\xi) = \sum_{t>U_2}\sum_{w\leqslant a/t}\sum_{x,y\geqslant 1}\sum_{t\leqslant z\leqslant x}\left[xy+wz=a, \frac{w}{x}\leqslant\xi<\frac{w}{x-z}\right],$$
$$Z_4(a;\xi) = \sum_{t\leqslant U_2}\sum_{t<z<U_2}\sum_{x\geqslant z}\sum_{y\geqslant 1}\sum_{w>U_1}\left[xy+wz=a, \frac{w}{x}\leqslant\xi<\frac{w}{x-z}\right],$$

В сумме $Z_1(a;\xi)$ для ненулевых слагаемых условие $z\geqslant t$ выполняется автоматически. Поэтому

$$Z_1(a;\xi) = \sum_{t\leqslant U_2}\sum_{w\leqslant\xi t}\sum_{x,y\geqslant 1}\delta_w(xy-a)\left[y_1(x)\leqslant y<y_2(x)\right].$$

Главный член здесь выделяется как и в сумме $Y_1(a;\xi)$:

$$Z_1(a;\xi) = \sum_{t\leqslant U_2}\sum_{w\leqslant\xi t}\psi(a,w)\left(\int_t^a dx\int_0^a\left[y_1(x)\leqslant y<y_2(x)\right]dy + O(R_5(a,t,w;\xi))\right) =$$
$$= a\sum_{t\leqslant U_2}\sum_{w\leqslant\xi t}\psi(a,w)\left(I_4(w/U_1,t/U_2) + O(R_5(a,t,w;\xi))\right),$$

где $I_4(r,\tau)$ определено равенством (29) и

$$R_5(a,t,w;\xi) = \left(a^{1/3} + a^{1/4}D_w + w^{1/2} + \frac{D_w a^{3/4}}{(a-wt)^{1/2}}\right) a^{\varepsilon} + \delta_w(a)\min\{U, a/t\} + D_w(1+\xi^{-1}).$$

Для оценки остатка заметим, что

$$\sum_{wt<a} \frac{a^{3/4}}{(a-wt)^{1/2}} \ll a^{3/4+\varepsilon} \sum_{n=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{n}} \ll a^{5/4+\varepsilon}.$$

Остальные слагаемые, входящие в состав $R_5(a,t,w;\xi)$, оцениваются как и в лемме 8. Поэтому

$$\sum_{t\leqslant U_2}\sum_{w\leqslant \xi t} R_5(a,t,w;\xi) \ll (a^{4/3} + a^{5/4}(\xi^{1/4} + a\xi^{-1}))a^{\varepsilon} \ll R_1(a;\xi)\xi^{-1}.$$

По лемме 7

$$\begin{aligned} Z_1(a;\xi) =& \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 d\tau \int_0^{\tau} \frac{I_4(r,\tau)}{r}\, dr + O\left(R_1(a;\xi)\xi^{-1}\right) = \\ =& \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\zeta(2)}{4} - \log 2\right) + O\left(R_1(a;\xi)\xi^{-1}\right). \end{aligned}$$

Сумма $Z_3(a;\xi)$ вычисляется аналогично:

$$\begin{aligned} Z_3(a;\xi) =& \sum_{t>U_2}\sum_{w\leqslant a/t} \psi(a,w) \left(\int_t^a dx \int_0^a [y_1(x) \leqslant y < y_2(x)]\, dy + O\left(R_5(a,t,w;\xi)\right)\right) = \\ =& a\sum_{t>U_2}\sum_{w\leqslant a/t} \psi(a,w) I_4(w/U_1, t/U_2) + O\left(R_1(a;\xi)\xi^{-1}\right) = \\ =& \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_1^{\infty} d\tau \int_0^{1/\tau} \frac{I_4(r,\tau)}{r}\, dr + O\left(R_1(a;\xi)\xi^{-1}\right) = \\ =& \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(-\frac{1}{6} + \frac{\pi}{3} - \frac{\zeta(2)}{4} - \frac{1}{3}\log 2\right) + O\left(R_1(a;\xi)\xi^{-1}\right). \end{aligned}$$

Такие же преобразования приводят к следующему представлению суммы $Z_2(a;\xi)$:

$$\begin{aligned} Z_2(a;\xi) =& \sum_{t\leqslant U_2}\sum_{\xi t<w\leqslant U_1} \psi(a,w) \left(\int_{w/\xi}^a dx \int_0^a [y_1(x) \leqslant y < y_2(x)]\, dy + O(R_5(a,t,w;\xi))\right) = \\ =& a\sum_{t\leqslant U_2}\sum_{\xi t<w\leqslant U_1} \psi(a,w) I_5(w/U_1, t/U_2) + O(R_1(a;\xi)\xi^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$I_5(r,\tau) = (1+r^2)\log(1+r^2) - r(r+\tau)\log(r+\tau) - r(\tau - r)\log r + r(\tau - r).$$

По лемме 7

$$\begin{aligned} Z_2(a;\xi) =& \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \int_0^1 d\tau \int_{\tau}^1 \frac{I_5(r,\tau)}{r}\, dr + O\left(R_1(a;\xi)\xi^{-1}\right) = \\ =& \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)} \left(-\frac{5}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\log 2\right) + O\left(R_1(a;\xi)\xi^{-1}\right). \end{aligned}$$

Сумма $Z_4(a;\xi)$ путем применения лемм 4 и 6 считается как и $W_2(a;\xi)$:

$$Z_4(a;\xi) = \sum_{t\leqslant U_2}\sum_{t<z<U_2}\left(\psi(a,z)\int_{U_2}^{a}dx\int_0^a [y_3(x)\leqslant y<y_4(x,t)]\,dy + O(R_4(a,t,z;\xi))\right).$$

При этом

$$\sum_{t\leqslant U_2}\sum_{z<U_2} R_4(a,t,z;\xi) \ll R(a;\xi)\xi^{-1}.$$

Нахождение главного члена сводится к интегралу от функции $I_3(r)$, определенной равенством (27):

$$\begin{aligned} Z_4(a;\xi) =& \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)}\int_0^1 d\tau\int_\tau^1 \frac{I_4(r,\tau)}{r}\,dr + O\left(R(a;\xi)\xi^{-1}\right) = \\ =& \frac{a^{3/2}\xi^{-1/2}\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)}\left(-\frac{17}{12}+\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\log 2\right) + O\left(R(a;\xi)\xi^{-1}\right). \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения сумм $Z_1(a;\xi)$, $Z_2(a;\xi)$, $Z_3(a;\xi)$, $Z_4(a;\xi)$ в (31), приходим к утверждению леммы. □

9 Доказательство основного результата

Следствие 3. *Пусть x_1, $x_2 \in [0,1]$. Тогда для плотности $\rho_a(\xi)$ справедлива асимптотическая формула*

$$\rho_a(\xi) = \frac{8}{\pi}\varphi(a)a^{1/2}\xi^{1/2} + O((a^{4/3}(1+\xi) + a^{5/4}(\xi^{5/4}+\xi^{-1/4}))a^{\varepsilon}).$$

Доказательство. Подставляя результаты лемм 8–10 в равенство (13), получаем

$$\lambda(a;\xi) = \frac{4}{\pi}\sigma_{-1}(a)a^{3/2}\xi^{1/2} + O((a^{4/3}(1+\xi) + a^{5/4}(\xi^{5/4}+\xi^{-1/4}))a^{\varepsilon}).$$

Отсюда по формуле (12), находим

$$\lambda^*(a;\xi) = \frac{4}{\pi}\varphi(a)a^{1/2}\xi^{1/2} + O((a^{4/3}(1+\xi) + a^{5/4}(\xi^{5/4}+\xi^{-1/4}))a^{\varepsilon}).$$

Подставляя найденное равенство в (11), приходим к утверждению следствия. □

Доказательство теоремы 1. По формуле (10) с помощью следствия 3 получаем равенство

$$\rho_a(t_1,t_2) = \frac{8}{\pi}\varphi(a)\sqrt{t_1t_2a} + O((a^{4/3}(t_1+t_2) + a^{5/4}(t_1^{5/4}t_2^{-1/4} + t_1^{-1/4}t_2^{5/4}))a^{\varepsilon}).$$

Подставляя его в лемму 3 с учетом замечания 3 приходим к утверждению теоремы с нужным остаточным членом. □

Для доказательства теоремы 2 достаточно разбить квадрат $[1,N]^2$, внутри которого лежат пары (b,c) на меньшие квадраты со стороной $N^{11/12}$ и в каждом из них применить теорему 1.

Замечание 6. Доказательство теоремы 1 идейно близко к подходу Портера из статьи [28] (см. также [18]), в которой получена асимптотическая формула для среднего значения длин цепных дробей рациональных чисел с равным знаменателем:

$$\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{1\leqslant c\leqslant d\\(c,d)=1}} s(c/d)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\cdot\log d+C_P-1+O_\varepsilon(d^{-1/6+\varepsilon}),$$

где

$$C_P=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\frac{3\log 2}{2}+2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\right)-\frac{1}{2}$$

— константа, получившая название константы Портера. В обоих случаях ключевую роль играют корневые оценки сумм Клостермана и метод ван дер Корпута, чем и объясняется одинаковое понижение в остаточных членах. В работе [17] при усреднении по числителям и знаменателям получены более точный результат:

$$E(R)=\frac{2}{R(R+1)}\sum_{d\leqslant R}\sum_{c\leqslant d} s(c/d)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\cdot\log R+C_P'+O(R^{-1}\log^4 R)$$

с абсолютной константой C_P'. Поэтому при усреднении $f(a,b,c)$ по всем трем аргументам можно надеяться на справедливость следующего утверждения.

Гипотеза.

$$\frac{1}{x_1x_2x_3N^{9/2}}\sum_{a\leqslant x_1N}\sum_{b\leqslant x_2N}\sum_{\substack{c\leqslant x_3N\\(a,b,c)=1}}\left(f(a,b,c)-\frac{8}{\pi}\sqrt{abc}\right)=O_{\varepsilon,x_1,x_2,x_3}(N^{-1/2+\varepsilon}).$$

Замечание 7. Метод, примененный при доказательстве теоремы 1 позволяет также описать плотность распределения величины $f(a,b,c)/\sqrt{abc}$. Оказывается, что

$$\frac{1}{|M_a(x_1,x_2)|}\sum_{(a,b,c)\in M_a(x_1,x_2)}[f(a,b,c)\leqslant\tau\sqrt{abc}]=\int_0^\tau p(t)\,dt+O_\varepsilon(R(a;x_1,x_2;\tau)a^\varepsilon),$$

где

$$R(a,x_1,x_2,\tau)\ll_{x_1,x_2,\tau}a^{-1/6}$$

и плотность $p(t)$ задается равенствами

$$p(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\in[0,\sqrt{3}];\\ \frac{12}{\pi}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}-\sqrt{4-t^2}\right), & \text{если } t\in[\sqrt{3},2];\\ \frac{12}{\pi^2}\left(t\sqrt{3}\arccos\frac{t+3\sqrt{t^2-4}}{4\sqrt{t^2-3}}+\frac{3}{2}\sqrt{t^2-4}\log\frac{t^2-4}{t^2-3}\right), & \text{если } t\in[2,+\infty).\end{cases}$$

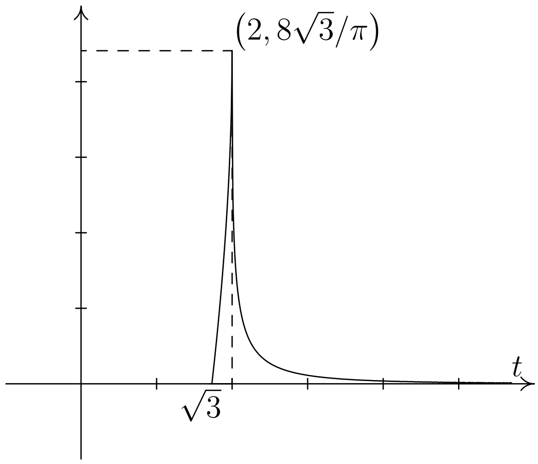

График плотности $p(t)$

Указанная плотность обладает следующими свойствами.

1°. $p(t)$ возрастает на отрезке $[\sqrt{3}, 2]$, убывает на полуинтервале $[2, +\infty)$; $\lim\limits_{t\to 2-0} p'(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 2+0} p'(t) = -\infty$;

2°. $p(t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right) \qquad (t \to \infty)$;

3°. $\int_0^\infty p(t)\, dt = 1$;

4°. $\int_0^\infty tp(t)\, dt = \frac{8}{\pi}$.

Доказательство этого результата автор планирует опубликовать в следующей статье.

Список литературы

[1] Ramirez Alfonsin J. L. *The Diophantine Frobenius problem.* — Oxford University Press, 2005.

[2] Sylvester J.J. Problem 7382. — *Educational Times* 37 (1884), 26; reprinted in: Mathematical questions with their solution, *Educational Times* (with additional papers and solutions) 41 (1884), 21.

[3] Rödseth Ö. J. On a linear Diophantine problem of Frobenius. — *J. Reine Angew. Math.*, 301 (1978), 171–178.

[4] Selmer E.S., Beyer O. On the linear diophantine problem of Frobenius in three variables. — *J. Reine Angewandte Math.*, 301 (1978), 161–170.

[5] Fel L. G. Frobenius problem for semigroups $ttS(d_1, d_2, d_3)$. — *Funct. Anal. Other Math.*, 2006, 1 (2), 119–157.

[6] Fel L. G. Analytic representations in the three-dimensional Frobenius problem. — *Funct. Anal. Other Math.*, 2006, 2 (1), 27–44.

[7] Kannan R. Lattice Translates of a Polytope and the Frobenius Problem — *Combinatorica*, 12(2), 1992, 161–177.

[8] Karp R. M. Reducibility Among Combinatorial Problems — *Complexity of Computer Computations*, R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds, Plenum, New York, 1972, 85–103.

[9] Davison J. L. On the linear Diophantine problem of Frobenius. — *J. Number Theory*, 48 (1994), 353–363.

[10] Arnold V. *Arnold's Problems.* — Springer, 2005.

[11] Арнольд В. И. *Экмпериментальное наблюдение математических фактов.* — М.: МЦНМО, 2006.

[12] Beck M., Einstein D., Zacks S. Some experimental results on the Frobenius problem. — *Experiment. Math.*, 12 (2003), 263–269.

[13] Beihoffer D., Hendry J., Nijenhuis A., Wagon S. Faster algorithms for Frobenius numbers. — *Electron. J. Combin.*, 12 (2005), Research Paper 27, 38 pp. (electronic)

[14] Бургейн Ж., Синай Я. Г. Предельное поведение больших чисел Фробениуса. — *Успехи мат. наук*, **62**:4 (2007), 77—90.

[15] Устинов А. В. О статистических свойствах элементов цепных дробей. — *ДАН*, **424**: 3 (2009), (в печати).

[16] Устинов А. В. Вычисление дисперсии в одной задаче из теории цепных дробей. — *Мат. сборник*, **198**: 6 (2007), 139–158.

[17] Устинов А. В. Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида. — *Известия РАН*, **72**: 5 (2008), 189–224.

[18] Устинов А. В. О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции. — *Алгебра и анализ*, **20**: 5 (2008), 186–216.

[19] Perron O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen (Band 1).* — Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1954.

[20] Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* — М.: Мир, 1998.

[21] Устинов А. В. Короткое доказательство тождества Эйлера для континуантов. — *Мат. заметки*, **79**: 1 (2006), 155–156.

[22] Weisstein E. W. *CRC concise encyclopedia of mathematics.* — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.

[23] Устинов А. В. О статистических свойствах конечных цепных дробей. — *Записки научн. семин. ПОМИ*, **322** (2005), 186–211.

[24] Knuth D. E., Yao, A. C. *Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 72, № 12, 1975, 4720–4722.

[25] Johnson S. M. A linear diophantine problem. — *Canad. J. Math.*, 12 (1960), 390–398.

[26] Быковский В. А. Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2), удовлетворяющих сравнению $a_1a_2 \equiv l \pmod q$. — *Записки научных семинаров ЛОМИ* **112** (1981), 5–25.

[27] Estermann T. On Kloosterman's sum. — *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.

[28] Porter J. W. On a theorem of Heilbronn. — *Mathematika*, **22**: 1 (1975), 20–28.