О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами

А. В. Устинов*

24 июля 2009 г.

1. Если A — некоторое утверждение, то $[A] = 1$, если A истинно, и 0 в противном случае.
2. Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q:
$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod p] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$
3. Знак звездочки в суммах вида
$$\sum_{m=1}^{n}{}^{*} \ldots$$
означает, что суммирование проходит по приведенной системе вычетов.
4. Сумма степеней делителей натурального q:
$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

1 Введение

Для натуральных $a_1, \ldots, a_n$, взаимно простых в совокупности, числом Фробениуса $g(a_1, \ldots, a_n)$ называется наибольшее натуральное m, не представимое в виде
$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = m, \tag{1}$$
где $x_1, \ldots, x_n$ — целые неотрицательные числа. Часто удобней рассматривать функцию
$$f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) + a_1 + \ldots + a_n,$$
которая дает наибольшее натуральное m, не представимое в виде (1) с натуральными коэффициентами $x_1, \ldots, x_n$.

При $n = 2$ известна формула приписываемая Сильвестру (см. [20], обсуждение истории вопроса см. в [15]): $f(a, b) = ab$. Если $n = 3$, то задача о нахождении $f(a, b, c)$ сводится к попарно взаимно простым аргументам, и при
$$(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1, \quad b \equiv lc \pmod a, \quad 1 \leqslant l \leqslant a$$
значение $f(a, b, c)$ выражается через элементы цепной дроби для числа l/a (см. результаты Сельмера, Бейера и Рёдсета [16, 19]). При $n \geqslant 4$ формул для нахождения $f(a_1, \ldots, a_n)$ не известно. Доказано, что для фиксированного n число Фробениуса можно вычислить за полиномиальное время (см. [12]), а при произвольном n нахождение $f(a_1, \ldots, a_n)$ становится NP-полной задачей (см. [13]).

*Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 07-01-00306 и Фонда содействия отечественной науке

Вопросы о поведении чисел Фробениуса в среднем были поставлены Дэйвисоном и Арнольдом (см. [9]; [8], задачи 1999-8, 2003-5). Бургейном и Синаем в работе [1] на основе одного естественного предположения, подтвержденного позднее в [5], доказано существование предельного распределения величины $f(a,b,c)N^{-3/2}$ при $1 \leqslant a,b,c \leqslant N$ и $N \to \infty$. Для произвольного $n \geqslant 4$ там же доказано, что (при дополнительном техническом условии) для любого $\varepsilon > 0$ существует $D = D(\varepsilon)$ такое, что

$$P_{N,\alpha}\{f(a_1,\ldots,a_n)N^{-1-\frac{1}{n+1}} \leqslant D\} \geqslant 1-\varepsilon,$$

где $P_{N,\alpha}$ — вероятность, соответствующая равномерному распределению на множестве

$$\{(a_1,\ldots,a_n) : \alpha N < a_1,\ldots,a_n \leqslant N, (a_1,\ldots,a_n)=1\} \quad (0<\alpha<1).$$

В работе [7] Алиевым и Хэнком методами геометрии чисел получен более точный результат:

$$P_{N,0}\{f(a_1,\ldots,a_n)N^{-1-\frac{1}{n+1}} > t\} \ll t^{-2}.$$

Там же доказано, что в среднем числа $f(a_1,\ldots,a_n)$ ведут себя как $N^{1+\frac{1}{n+1}}$, но отношение $f(a_1,\ldots,a_n)/N^{1+\frac{1}{n+1}}$ может быть неограниченно большим.

В статье [14] Марклоф методами эргодической теории доказал существование предельной функции распределения для нормированных чисел Фробениуса $\frac{f(a_1,\ldots,a_n)}{(a_1\ldots a_n)^{1/(n+1)}}$ при любом $n \geqslant 3$.

В статье [6] Устиновым была решена задача Арнольда о существовании слабой асимптотики для чисел $f(a,b,c)$. Доказано, что в среднем по множеству

$$M_a(x_1,x_2) = \{(a,b,c) : 1 \leqslant b \leqslant x_1 a, 1 \leqslant c \leqslant x_2 a, (a,b,c)=1\}$$

при любых $x_1, x_2 > 0$ числа Фробениуса ведут себя как $\frac{8}{\pi}\sqrt{abc}$:

$$\frac{1}{|M_a(x_1,x_2)|}\sum_{(a,b,c)\in M_a(x_1,x_2)} f(a,b,c) = \frac{1}{|M_a(x_1,x_2)|}\sum_{(a,b,c)\in M_a(x_1,x_2)} \frac{8}{\pi}\sqrt{abc} + O_{x_1,x_2,\varepsilon}(a^{4/3+\varepsilon}). \quad (2)$$

Как следствие доказаны гипотезы Дэйвисона из [9] в более сильной формулировке:

$$\frac{1}{|M_a(1,1)|}\sum_{(a,b,c)\in M_a(1,1)} \frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}} = \frac{8}{\pi} + O_\varepsilon(a^{-1/12+\varepsilon}). \quad (3)$$

Оказывается, что предельная плотность распределения нормированных чисел Фробениуса от трех аргументов $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$ может быть найдена явно. Как и в работе [6] она выделяется при усреднении по двум аргументам из трех, а в остаточном члене получается явное степенное понижение.

Теорема . *Пусть a — натуральное, x_1, x_2, ε — действительные положительные числа. Тогда*

$$\frac{1}{|M_a(x_1,x_2)|}\sum_{(a,b,c)\in M_a(x_1,x_2)} [f(a,b,c) \leqslant \tau\sqrt{abc}] = \int_0^\tau p(t)\,dt + O_\varepsilon(R(a;x_1,x_2;\tau)a^\varepsilon),$$

где

$$R(a,x_1,x_2,\tau) \ll_{x_1,x_2,\tau} a^{-1/6}$$

и

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0,\sqrt{3}]; \\ \frac{12}{\pi}\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{4-t^2}\right), & \text{если } t \in [\sqrt{3},2]; \\ \frac{12}{\pi^2}\left(t\sqrt{3}\arccos\frac{t+3\sqrt{t^2-4}}{4\sqrt{t^2-3}} + \frac{3}{2}\sqrt{t^2-4}\log\frac{t^2-4}{t^2-3}\right), & \text{если } t \in [2,+\infty). \end{cases}$$

Для функции $p(t)$ проверяется равенство

$$\int_0^\infty tp(t)\,dt = \frac{8}{\pi},$$

которое согласуется с формулами (2)–(3). Из теоремы следует, что для почти всех троек чисел $(a,b,c) \in M_a(1,1)$ числа Фробениуса $f(a,b,c)$ имеют порядок $\sqrt{abc}$. Используя свойства плотности удается описать мощность исключительного множества: при $a > \tau^{34+\varepsilon}$,

$$\frac{1}{|M_a(1,1)|} \sum_{(a,b,c)\in M_a(1,1)} [f(a,b,c) > \tau\sqrt{abc}] = \frac{9}{\pi^2\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right).$$

Доказательство теоремы разбивается на следующие этапы. Сначала функция распределения нормированных чисел Фробениуса выражается через усредненную функцию Рёдсета (раздел 4). Она, в свою очередь, с помощью геометрической интерпретации цепных дробей (раздел 2) сводится к вычислению некоторой суммы по решениям уравнения $u_1u_2 - v_1v_2 = a$ (раздел 5). Затем применяются результаты о регулярности распределения решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$, основанные на оценках сумм Клостермана и методе ван дер Корпута (раздел 3). Они позволяют заменить сумму аналогичным интегралом (раздел 6). Потом тройной интеграл, выражающий функцию распределения, дифференцируется. Это приводит к выражению искомой плотности через двойной интеграл (раздел 7), который вычисляется явно (раздел 8).

Автор благодарит рецензента за найденные недочеты в первоначальной версии статьи и Э. Рёдсета за указания на ссылки, связанные с темой работы.

2 Функция Рёдсета

Пусть l — фиксированное целое число в пределах $1 \leqslant l \leqslant a$, $(l,a) = 1$, и $\bar{l}$ — решение сравнения $\bar{l}\cdot l \equiv 1 \pmod{a}$ $(1 \leqslant \bar{l} \leqslant a)$. В соответствии с работой Рёдсета [16], рассмотрим разложение a/l в цепную дробь с минусами

$$\frac{a}{l} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots - \cfrac{1}{a_m}} \qquad (a_1,\dots,a_m \geqslant 2)$$

длины $m = m(a/l)$. Определим последовательности $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ $(-1 \leqslant j \leqslant m)$ условиями

$$\begin{gathered} s_m = 0, s_{m-1} = 1, \quad q_{-1} = 0,\ q_0 = 1, \\ s_{j-1} = a_{j+1}s_j - s_{j+1}, \quad q_{j+1} = a_{j+1}q_j - q_{j-1} \quad (0 \leqslant j \leqslant m-1). \end{gathered} \tag{4}$$

Легко показать следующие свойства чисел $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ (см. [16, 6]).

1°. Справедливы равенства

$$s_{-1} = q_m = a, \quad s_0 = l, \quad q_{m-1} = \bar{l}.$$

2°. Последовательность $\{s_j\}$ монотонно убывает, $\{q_j\}$ — монотонно возрастает и

$$0 = \frac{s_m}{q_m} < \frac{s_{m-1}}{q_{m-1}} < \ldots < \frac{s_0}{q_0} < \frac{s_{-1}}{q_{-1}} = \infty.$$

3°. При любом n $(0 \leqslant n \leqslant m)$ векторы $e_n = (q_n, s_n)$ и $e_{n-1} = (q_{n-1}, s_{n-1})$ образуют базис решетки

$$\Lambda_l = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : xl \equiv y \pmod{a}\right\}.$$

При этом
$$\begin{vmatrix} q_n & s_n \\ q_{n-1} & s_{n-1} \end{vmatrix} = \det \Lambda_l = a.$$

4°. Точки (q_n, s_n) $(-1 \leqslant n \leqslant m)$ являются вершинами выпуклой оболочки ненулевых точек решетки Λ_l, лежащих в первой координатной четверти.

5°. Четверки $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n)$ при $1 \leqslant l < a$, $(l, a) = 1$, $0 \leqslant n \leqslant m(l/a)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями (u_1, u_2, v_1, v_2) уравнения
$$u_1 u_2 - v_1 v_2 = a,$$
для которых
$$0 \leqslant v_1 < u_1 \leqslant a, \quad (u_1, v_1) = 1, \qquad 0 \leqslant v_2 < u_2 \leqslant a, \quad (u_2, v_2) = 1.$$

6°. При $0 \leqslant n \leqslant m$ выполняются неравенства
$$s_{n-1} - s_n \leqslant a/q_n, \qquad q_n - q_{n-1} \leqslant a/s_{n-1}.$$

Введем функцию Рёдсета $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$, которая для неотрицательных действительных t_1, t_2 таких, что
$$\frac{s_n}{q_n} \leqslant \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}$$
определяется равенством
$$\rho_{l,a}(t_1, t_2) = t_1 s_{n-1} + t_2 q_n - \min\{t_1 s_n, t_2 q_{n-1}\}. \tag{5}$$
Тогда, как показано в [16], при $(b, a) = 1$ и $c \equiv b \cdot l \pmod a$ число Фробениуса вычисляется по формуле
$$f(a, b, c) = \rho_{l,a}(b, c). \tag{6}$$

Замечание 1. *Функция* $\rho_{l,a}(t_1, t_2)$ *непрерывна и равенство* (5) *выполняется при*
$$\frac{s_n}{q_n} \leqslant \frac{t_2}{t_1} \leqslant \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

3 Применение оценок сумм Клостермана

Пусть q — натуральное число, a — целое и f — неотрицательная функция. Обозначим через $T[f]$ число решений сравнения $xy \equiv a \pmod q$, лежащих в области $P_1 < x \leqslant P_2$, $0 < y \leqslant f(x)$:
$$T[f] = \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \sum_{0 < y \leqslant f(x)} \delta_q(xy - a).$$

Как показано в работе Быковского [2], вычисление $T[f]$ сводится к нахождению суммы
$$S[f] = \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \mu_{q,a}(x) f(x),$$
где $\mu_{q,a}(x)$ — число решений сравнения $xy \equiv a \pmod q$ относительно переменной y, лежащей в пределах $1 \leqslant y \leqslant q$.

Приведем упрощенный результат работы [4], уточняющий соответствующую теорему из [2]. Он основан на оценках сумм Клостермана
$$K_q(l, m, n) = \sum_{x,y=1}^{q} \delta_q(xy - l) e^{2\pi i \frac{mx + ny}{q}}$$

и методе ван дер Корпута оценки тригонометрических сумм. Доказательство использует неравенство

$$|K_q(l,m,n)| \leqslant \sigma_0(q)\cdot\sigma_0((l,m,n,q))\cdot(lm,ln,mn,q)^{1/2}\cdot q^{1/2},$$

обобщающее результат Эстермана [10]

$$|K_q(\pm 1,m,n)| \leqslant \sigma_0(q)\cdot(m,n,q)^{1/2}\cdot q^{1/2}.$$

Лемма 1. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 2$, на всем отрезке $[P_1,P_2]$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для некоторых $A>0$, $w\geqslant 1$*

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{A}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T[f] = S[f] - \frac{P}{2}\cdot\delta_q(a) + R[f],$$

где

$$R[f] \ll_{w,\varepsilon} (PA^{-1/3} + A^{1/2}D + q^{1/2})P^{\varepsilon}$$

и $D=(a,q)$.

Замечание 2. *Из тривиальной формулы*

$$\sum_{y=1}^{Y}\delta_q(xy-a) = \frac{Y}{q}\mu_{q,a}(x) + O(1)$$

следует, что в обозначениях леммы 1

$$T[f] = S[f] + O(P).$$

Лемма 2. *(См. [6, лемма 5].) Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P=P_2-P_1>0$, и вещественная неотрицательная функция $f(x)$ на отрезке $[P_1,P_2]$ постоянна. Тогда*

$$T[f] = S[f] + O\left(\left(q^{1/2} + \left(\frac{P}{q}+1\right)D\right)q^{\varepsilon}\right),$$

где $D=(a,q)$.

В свою очередь, сумма $S[f]$ также устроена регулярно, и ее вычисление может быть сведено к интегралу.

Лемма 3. *(См. [6, лемма 6].) Пусть f — убывающая на отрезке $[P_1,P_2]$ функция и $f(P_1)-f(P_2)=Q$. Тогда в обозначениях леммы 1*

$$S[f] = \psi(a,q)\int_{P_1}^{P_2} f(x)dx + O(DQq^{-1+\varepsilon}),$$

где

$$\psi(a,q) = \frac{K_q(a,0,0)}{q^2} = \frac{1}{q}\sum_{k|(a,q)}\sum_{\delta|q/k}\frac{\mu(\delta)}{\delta} \ll q^{-1+\varepsilon}. \qquad (7)$$

Лемма 4. *(См. [6, лемма 7].) Пусть $\tau>0$, функция $I(r)/r\in C([0,\tau])$ имеет конечное число участков монотонности, $|I(r)/r|\leqslant B$ для всех $r\in[0,\tau]$, $\psi(a,q)$ определено равенством* (7) *и $1\leqslant U\tau\leqslant a$. Тогда*

$$\sum_{q\leqslant\tau U}\psi(a,q)I(q/U) = \frac{\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)}\int_0^{\tau}\frac{I(r)}{r}\,dr + O(BU^{-1}a^{\varepsilon}).$$

4 Сведение к интегралу с функцией Рёдсета

Лемма 5. *(См. [6, замечание 2].) Пусть Ω — плоская односвязная область со спрямляемой границей, V — площадь Ω, P — ее периметр. Если Λ — подрешетка $\mathbb{Z}^2$ индекса d, и $N(\Lambda)$ — число точек Λ, содержащихся в области Ω, то*

$$|N(\Lambda) - V/d| \leqslant 4(P+1).$$

Лемма 6. *Пусть $1 \leqslant l < a$, $(l,a) = 1$, δ_1, δ_2 — натуральные, x_1, x_2 — положительные действительные числа, и последовательности $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ заданы равенствами (4). Определим целое $r = r(l,a;x_1,x_2)$ с помощью неравенств*

$$\frac{s_r}{q_r} \leqslant \frac{x_2}{x_1} < \frac{s_{r-1}}{q_{r-1}}.$$

Тогда для суммы

$$S_{l,a}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2;\tau) = \sum_{\substack{b\leqslant x_1 a\\ \delta_1|b}} \sum_{\substack{c\leqslant x_2 a\\ \delta_2|c}} \delta_a(bl-c)[\rho_{l,a}(b,c) \leqslant \tau\sqrt{abc}]$$

справедлива асимптотическая формула

$$S_{l,a}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2;\tau) = a\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}[\rho_{l,a}(t_1,t_2) \leqslant \tau\sqrt{at_1t_2}]\,dt_1\,dt_2 + O(R_{l,a}(x_1,x_2)),$$

где

$$R_{l,a}(x_1,x_2) = x_1 a\left(\frac{1}{s_0} + \ldots + \frac{1}{s_{r-1}}\right) + x_2 a\left(\frac{1}{q_r} + \ldots + \frac{1}{q_{m-1}}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим решетку

$$\Lambda_l(\delta_1,\delta_2) = \{(x,y) \in \Lambda_l : \delta_1 \mid x, \delta_2 \mid y\}.$$

Произвольная точка (x,y) решетки Λ_l имеет вид $(x,y) = ue_{-1} + ve_0$, где u, v — целые, $e_{-1} = (0,a)$, $e_0 = (1,l)$ (см. свойство 3°). Такая точка будет принадлежать подрешетке $\Lambda_l(\delta_1,\delta_2)$ в том и только том случае, когда выполняются сравнения

$$v \equiv 0 \pmod{\delta_1}, \quad au + lv \equiv 0 \pmod{\delta_2}.$$

Отсюда $\Lambda_l(\delta_1,\delta_2)$ — подрешетка индекса $\delta_1\delta_2/(a,\delta_1,\delta_2)$ в решетке Λ_l.

Рассмотрим сумму

$$S_n = S_{l,a,n}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2) = \sum_{\substack{b\leqslant x_1 a\\ \delta_1|b}} \sum_{\substack{c\leqslant x_2 a\\ \delta_2|c}} \left[(b,c) \in \Lambda_l(\delta_1,\delta_2), \frac{s_n}{q_n} \leqslant \frac{c}{b} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}, \rho_{l,a}(b,c) \leqslant \tau\sqrt{abc}\right].$$

Согласно свойству 3° последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$, все решения сравнения $bl \equiv c \pmod a$, для которых $s_n/q_n \leqslant c/b < s_{n-1}/q_{n-1}$, имеют вид

$$b(u,v) = uq_n + vq_{n-1}, \quad c(u,v) = us_n + vs_{n-1}$$

с целыми $u > 0$, $v \geqslant 0$. Поэтому

$$S_n = \sum_{u>0}\sum_{v\geqslant 0}[b(u,v) \leqslant x_1 a, \delta_1 \mid b(u,v), c(u,v) \leqslant x_2 a, \delta_2 \mid c(u,v)]h_{l,a,n}(u,v),$$

где

$$h_{l,a,n}(u,v) = [\rho_{l,a}(uq_n + vq_{n-1}, us_n + vs_{n-1}) \leqslant \tau\sqrt{a(uq_n + vq_{n-1})(us_n + vs_{n-1})}].$$

При $n > r$ из двух ограничений $b \leqslant x_1a$, $c \leqslant x_2a$ существенным является лишь первое. Значит,

$$S_n = \sum_{u>0}\sum_{v\geqslant 0}[uq_n + vq_{n-1} \leqslant x_1a, \delta_1 \mid uq_n + vq_{n-1}, \delta_2 \mid us_n + vs_{n-1}]h_{l,a,n}(u,v).$$

Переменные u и v меняются внутри треугольной области $u > 0$, $v \geqslant 0$, $uq_n + vq_{n-1} \leqslant x_1a$, периметр которой есть $O(x_1a/q_{n-1})$. Кроме того, как отмечалось выше, $\Lambda_l(\delta_1,\delta_2)$ — подрешетка индекса $\delta_1\delta_2/(a,\delta_1,\delta_2)$ в Λ_l. Поэтому, применяя лемму 5, находим (под знаками интегралов прежние переменные суммирования принимают уже действительные значения)

$$\begin{aligned}
S_n =&\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^a\int_0^a[uq_n + vq_{n-1} \leqslant x_1a]h_{l,a,n}(u,v)\,du\,dv + O\left(\frac{x_1a}{q_{n-1}}\right) = \\
=&\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{a\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1a}\int_0^{x_2a}\left[\frac{s_n}{q_n} \leqslant \frac{c}{b} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}, \rho_{l,a}(b,c) \leqslant \tau\sqrt{abc}\right]db\,dc + O\left(\frac{x_1a}{q_{n-1}}\right) = \\
=&a\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\left[\frac{s_n}{q_n} \leqslant \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}, \rho_{l,a}(t_1,t_2) \leqslant \tau\sqrt{at_1t_2}\right]dt_1\,dt_2 + O\left(\frac{x_1a}{q_{n-1}}\right). \quad (8)
\end{aligned}$$

Аналогично при $n < r$ из двух ограничений $b \leqslant x_1a$, $c \leqslant x_2a$ остается лишь второе, что приводит к равенству

$$S_n = a^2\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\left[\frac{s_n}{q_n} \leqslant \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}, \rho_{l,a}(t_1,t_2) \leqslant \tau\sqrt{at_1t_2}\right]dt_1\,dt_2 + O\left(\frac{x_1a}{s_n}\right). \quad (9)$$

Если же $n = r$, то прямая $c/b = x_2/x_1$ на плоскости Obc делит угол $s_n/q_n \leqslant c/b < s_{n-1}/q_{n-1}$ на две части, в первой из которых ($s_n/q_n \leqslant c/b < x_2/x_1$) нужно учитывать ограничение $b \leqslant x_1a$, а во второй ($x_2/x_1 \leqslant c/b < s_{n-1}/q_{n-1}$) — ограничение $c \leqslant x_2a$. Поэтому

$$\begin{aligned}
S_n =&\sum_{u>0}\sum_{v\geqslant 0}[b(u,v) \leqslant x_1a, x_2b(u,v) > x_1c(u,v), \delta_1 \mid b(u,v), \delta_2 \mid c(u,v)]h_{l,a,r}(u,v)+ \\
&+\sum_{u>0}\sum_{v\geqslant 0}[c(u,v) \leqslant x_2a, x_2b(u,v) \leqslant x_1c(u,v), \delta_1 \mid b(u,v), \delta_2 \mid c(u,v)]h_{l,a,r}(u,v).
\end{aligned}$$

Переменные u, v меняются внутри четырехугольной области $u > 0$, $v \geqslant 0$, $uq_r + vq_{r-1} \leqslant x_1a$, $us_r + vs_{r-1} \leqslant x_2a$, периметр которой оценивается как (см. свойство 6°)

$$O\left(\frac{x_1a}{q_r} + \frac{x_2a}{s_{r-1}} + x_1(s_{r-1} - s_r) + x_2(q_r - q_{r-1})\right) = O\left(\frac{x_1a}{q_r} + \frac{x_2a}{s_{r-1}}\right).$$

Снова применяя лемму 5, приходим к равенству

$$S_r = a\frac{(a,\delta_1,\delta_2)}{\delta_1\delta_2}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\left[\frac{s_r}{q_r} \leqslant \frac{t_2}{t_1} < \frac{s_{r-1}}{q_{r-1}}, \rho_{l,a}(t_1,t_2) \leqslant \tau\sqrt{at_1t_2}\right]dt_1\,dt_2 + O\left(\frac{x_1a}{q_r} + \frac{x_2a}{s_{r-1}}\right). \quad (10)$$

Суммируя равенства (8)–(10), получаем нужную асимптотическую формулу для суммы

$$S_{l,a}(\delta_1,\delta_2;x_1,x_2;\tau) = \sum_{n=0}^{m} S_n.$$

□

Лемма 7. *В условиях леммы 6 для суммы*

$$R_a(x_1,x_2) = \sum_{l=1}^{a}{}^{*} R_{l,a}(x_1,x_2)$$

при любом $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$R_a(x_1,x_2) \ll (x_1+x_2)a^{1/2+\varepsilon}.$$

Доказательство. Пользуясь симметрией суммы $R_a(x_1, x_2)$ (она переходит в себя при заменах $x_1 \leftrightarrow x_2$, $s_j \leftrightarrow q_{m-j-1}$) и свойством 5° последовательностей $\{s_j\}$ и $\{q_j\}$, можем написать оценку

$$R_a(x_1, x_2) \ll \sum_{u_1=1}^{a} \sum_{v_1=0}^{u_1-1} \sum_{u_2=1}^{a} \sum_{v_2=0}^{u_2-1} \left[u_1 u_2 - v_1 v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leqslant \frac{x_2}{x_1} \right] \frac{x_1}{u_1}$$

Введем новые переменные $x = u_2$, $y = u_1 - v_1$, $z = u_1$, $w = u_2 - v_2$. Тогда

$$R_a(x_1, x_2) \ll \sum_{z=1}^{a} \frac{x_1}{z} \sum_{w \geqslant 0} \sum_{x \leqslant x_2 z / x_1} \sum_{y \leqslant z} [zw + xy = a] \ll$$

$$\ll \sum_{z=1}^{a} \frac{x_1}{z} \sum_{x \leqslant x_2 z / x_1} \sum_{y \leqslant z} [xy \leqslant a] \delta_z(xy - a).$$

Для каждого z область изменения переменных x и y можно разбить на части ($x \leqslant \sqrt{a}$ и $x > \sqrt{a}$), каждая из которых по одной из координат имеет размер не больше $\sqrt{a}$. Применяя в каждой из них замечание 2 и леммы 2–3, получаем нужную оценку:

$$R_a(x_1, x_2) = \sum_{z \leqslant \sqrt{x_1 a / x_2}} \frac{x_1}{z} \left(\frac{x_2 z}{x_1} + \sqrt{a} \right) a^{\varepsilon} + \sum_{z > \sqrt{x_1 a / x_2}} \frac{x_1}{z} \left(\frac{a}{z} + \sqrt{a} \right) a^{\varepsilon} \ll (x_1 + x_2) a^{1/2+\varepsilon}.$$

□

Следствие 1. *В условиях леммы 6 для суммы*

$$S_a(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2; \tau) = \sum_{l=1}^{a}{}^{*} S_{l,a}(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2; \tau)$$

справедлива асимптотическая формула

$$S_a(\delta_1, \delta_2; x_1, x_2; \tau) = a \frac{(a, \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \rho_a(t_1, t_2; \tau)\, dt_1\, dt_2 + O((x_1 + x_2) a^{3/2+\varepsilon}),$$

где

$$\rho_a(t_1, t_2; \tau) = \sum_{l=1}^{a}{}^{*} [\rho_{l,a}(t_1, t_2) \leqslant \tau \sqrt{a t_1 t_2}].$$

Лемма 8. *Пусть x_1, x_2 — положительные действительные числа. Тогда для суммы*

$$F_a(x_1, x_2; \tau) = \sum_{(a,b,c) \in M_a(x_1, x_2)} [f(a, b, c) \leqslant \tau \sqrt{abc}] \tag{11}$$

справедлива асимптотическая формула

$$F_a(x_1, x_2; \tau) = \sum_{\substack{d_1 d_2 | a \\ (d_1, d_2) = 1}} \frac{a}{d_1 d_2} \sum_{\delta_1 | d_2 a_1} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{\delta_2 | d_1 a_1} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} (a, \delta_1, \delta_2) \int_0^{x_1 d_2} \int_0^{x_2 d_1} \rho_{a_1}(t_1, t_2; \tau)\, dt_1\, dt_2 +$$

$$+ O((x_1 + x_2) a^{3/2+\varepsilon}),$$

где $a_1 = a/(d_1 d_2)$.

Доказательство. Для нахождения суммы $F_a(x_1,x_2;\tau)$ введем параметры $d_1=(a,b)$, $d_2=(a,c)$ и положим $b_1=b/d_1$, $c_1=c/d_2$, $a_1=a/(d_1d_2)$. Для всех ненулевых слагаемых $(d_1,d_2)=1$. Поэтому

$$F_a(x_1,x_2;\tau)=\sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}}\sum_{\substack{b\leqslant x_1a\\(b,a)=d_1}}\sum_{\substack{c\leqslant x_2a\\(c,a)=d_2}}[f(a,b,c)\leqslant\tau\sqrt{abc}]=$$
$$=\sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}}\sum_{\substack{b_1\leqslant x_1d_2a_1\\(b_1,d_2a_1)=1}}\sum_{\substack{c_1\leqslant x_2d_1a_1\\(c_1,d_1a_1)=1}}[f(d_1d_2a_1,d_1b_1,d_2c_1)\leqslant\tau d_1d_2\sqrt{a_1b_1c_1}].$$

Применяя тождество Джонсона (см. [11])

$$f(a,b,c)=d\cdot f\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d},c\right),$$

находим

$$F_a(x_1,x_2;\tau)=\sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}}\sum_{\substack{b_1\leqslant x_1d_2a_1\\(b_1,d_2a_1)=1}}\sum_{\substack{c_1\leqslant x_2d_1a_1\\(c_1,d_1a_1)=1}}[f(a_1,b_1,c_1)\leqslant\tau\sqrt{a_1b_1c_1}].$$

Теперь число Фробениуса можно выразить через функцию Рёдсета по формуле (6). Значит,

$$F_a(x_1,x_2;\tau)=\sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}}\sum_{l=1}^{a_1}{}^{*}\sum_{\substack{b_1\leqslant x_1d_2a_1\\(b_1,d_2a_1)=1}}\sum_{\substack{c_1\leqslant x_2d_1a_1\\(c_1,d_1a_1)=1}}\delta_{a_1}(b_1l-c_1)[\rho_{l,a_1}(b_1,c_1)\leqslant\tau\sqrt{a_1b_1c_1}]=$$
$$=\sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}}\sum_{\delta_1|d_2a_1}\mu(\delta_1)\sum_{\delta_2|d_1a_1}\mu(\delta_2)\sum_{l=1}^{a_1}{}^{*}\sum_{\substack{b_1\leqslant x_1d_2a_1\\ \delta_1|b_1}}\sum_{\substack{c_1\leqslant x_2d_1a_1\\ \delta_2|c_1}}\delta_{a_1}(b_1l-c_1)[\rho_{l,a_1}(b_1,c_1)\leqslant\tau\sqrt{a_1b_1c_1}]=$$
$$=\sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}}\sum_{\delta_1|d_2a_1}\mu(\delta_1)\sum_{\delta_2|d_1a_1}\mu(\delta_2)S_{a_1}(\delta_1,\delta_2;x_1d_2,x_2d_1;\tau).$$

Подставляя в последнюю формулу результат следствия 1, приходим к утверждению леммы. □

Замечание 3. *Те же самые рассуждения, примененные к сумме*

$$G_a(x_1,x_2;\tau)=\sum_{(a,b,c)\in M_a(x_1,x_2)}g(\tau)$$

с числом $g(\tau)\in[0,1]$ приводят к формуле

$$G_a(x_1,x_2;\tau)=\sum_{\substack{d_1d_2|a\\(d_1,d_2)=1}}\frac{a}{d_1d_2}\varphi\left(\frac{a}{d_1d_2}\right)\sum_{\delta_1|d_2a_1}\frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1}\sum_{\delta_2|d_1a_1}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}(a,\delta_1,\delta_2)\int_0^{x_1d_2}\int_0^{x_2d_1}g(\tau)\,dt_1\,dt_2+$$
$$+O((x_1+x_2)a^{3/2+\varepsilon}).$$

Замечание 4. *В силу однородности*

$$\rho_{l,a}(t_1,t_2)=t_1\cdot\rho_{l,a}(t_2/t_1),$$

где при $s_n/q_n\leqslant\xi<s_{n-1}/q_{n-1}$

$$\rho_{l,a}(\xi)=s_{n-1}+\xi q_n-\min\{s_n,\xi q_{n-1}\}.$$

Поэтому, зная

$$\rho_a(\xi;\tau)=\sum_{l=1}^{a}{}^{*}[\rho_{l,a}(\xi)\leqslant\tau\sqrt{a\xi}],\qquad(12)$$

легко найти нужную функцию

$$\rho_a(t_1,t_2;\tau)=\rho_a(t_2/t_1;\tau).\qquad(13)$$

5 Вспомогательные преобразования

В соответствии со свойством 5° последовательностей $\{s_j\}$, $\{q_j\}$

$$\rho_a(\xi;\tau) = \sum_{u_1=1}^{a} \sum_{v_1=0}^{u_1-1}{}^{*} \sum_{u_2=1}^{a} \sum_{v_2=0}^{u_2-1}{}^{*} \left[u_1u_2 - v_1v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leqslant \xi < \frac{u_2}{v_1}, u_2 + \xi u_1 - \min\{v_2, \xi v_1\} \leqslant \tau\sqrt{a\xi}\right].$$

Рассматривая отдельно случаи $v_2 > \xi v_1$ и $v_2 \leqslant \xi v_1$, запишем искомую плотность в виде

$$\rho_a(\xi;\tau) = \lambda^*(a;\xi;\tau) + \eta^*(a;\xi;\tau),$$

где

$$\lambda^*(a;\xi;\tau) = \sum_{u_1=1}^{a} \sum_{v_1=0}^{u_1-1}{}^{*} \sum_{u_2=1}^{a} \sum_{v_2=0}^{u_2-1}{}^{*} \left[u_1u_2 - v_1v_2 = a, \frac{v_2}{u_1} \leqslant \xi < \frac{v_2}{v_1}, u_2 + \xi(u_1 - v_1) \leqslant \tau\sqrt{a\xi}\right],$$

$$\eta^*(a;\xi;\tau) = \sum_{u_1=1}^{a} \sum_{v_1=0}^{u_1-1}{}^{*} \sum_{u_2=1}^{a} \sum_{v_2=0}^{u_2-1}{}^{*} \left[u_1u_2 - v_1v_2 = a, \frac{v_2}{v_1} \leqslant \xi < \frac{u_2}{v_1}, u_2 - v_2 + \xi u_1 \leqslant \tau\sqrt{a\xi}\right].$$

Замена переменных $u_1 \leftrightarrow u_2$, $v_1 \leftrightarrow v_2$ с учетом замечания 1 приводит к равенству $\eta^*(a;\xi;\tau) = \lambda^*(a;1/\xi;\tau)$. Поэтому

$$\rho_a(\xi;\tau) = \lambda^*(a;\xi;\tau) + \lambda^*(a;1/\xi;\tau). \tag{14}$$

Для вычисления функции $\lambda^*(a;\xi;\tau)$ перепишем уравнение $u_1u_2 - v_1v_2 = a$ в виде

$$u_1(u_2 - v_2) + v_2(u_1 - v_1) = a$$

и введем переменные $x = u_1$, $y = u_2 - v_2$, $z = u_1 - v_1$, $w = v_2$. Соответственно сумма $\lambda^*(a;\xi;\tau)$ перепишется в виде

$$\lambda^*(a;\xi;\tau) = \sum_{x=1}^{a} \sum_{z=1}^{x}{}^{*} \sum_{y=1}^{a} \sum_{w=0}^{a-1}{}^{*} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leqslant \xi < \frac{w}{x-z}, y + w + \xi z \leqslant \tau\sqrt{a\xi}\right].$$

Освобождаясь от условий взаимной простоты, получаем

$$\lambda^*(a;\xi;\tau) = \sum_{d_1d_2|a} \mu(d_1)\mu(d_2)\lambda\left(\frac{a}{d_1d_2}; \frac{d_1\xi}{d_2}; \tau\right), \tag{15}$$

где

$$\lambda(a;\xi;\tau) = \sum_{x\geqslant 1} \sum_{z=1}^{x} \sum_{y\geqslant 1} \sum_{w\geqslant 0} \left[xy + wz = a, \frac{w}{x} \leqslant \xi < \frac{w}{x-z}, y + w + \xi z \leqslant \tau\sqrt{a\xi}\right]. \tag{16}$$

6 Интегральное представление для функции распределения

Лемма 9. *Для суммы $\lambda(a;\xi;\tau)$, определенной равенством (16), справедлива асимптотическая формула*

$$\lambda(a;\xi;\tau) = \frac{a\sigma_{-1}(a)}{\zeta(2)}\Phi(\tau) + O_\varepsilon(R_0(a,\xi,\tau)),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \int_0^\tau \frac{I(r,\tau)}{r}dr, \\ I(r,\tau) &= \int_r^\infty \int_r^\infty \left[1 \leqslant \alpha\beta \leqslant 1 + r^2, \alpha + \beta - \tau \leqslant \frac{\alpha\beta - 1}{r}\right] d\alpha\, d\beta, \\ R_0(a,\xi,\tau) &= (a^{5/6}\tau^{5/3}\xi^{1/2} + a^{3/4}\tau^{3/2}(\xi^{3/4} + \xi^{1/2}) + a^{1/2}\tau(\xi^{1/2} + \xi^{-1/2}))a^\varepsilon. \end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Заметим, что для известных w, x и y таких, что $xy \equiv a \pmod w$ значение z однозначно находится из формулы
$$z = \frac{a - xy}{w}.$$
Поэтому, учитывая ограничение $z \leqslant x$, сумму $\lambda(a;\xi;\tau)$ можно переписать в виде
$$\lambda(a;\xi;\tau) = \sum_{w \leqslant \tau\sqrt{a\xi}} \sum_{x \geqslant w/\xi} \sum_{y \geqslant 1} \delta_w(xy - a)\,[\max\{y_0(x), y_1(x)\} \leqslant y < y_2(x)] =$$
$$= \sum_{w \leqslant \tau\sqrt{a\xi}} \sum_{y \geqslant 1} \sum_{x \geqslant w/\xi} \delta_w(xy - a)\,[\max\{x_0(y), x_1(y)\} \leqslant x < x_2(y)] = \sum_{w \leqslant \tau\sqrt{a\xi}} \sum_{(x,y) \in \Omega} \delta_w(xy - a),$$
где
$$y_0(x) = \frac{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau\sqrt{\frac{a}{\xi}}}{x - \frac{w}{\xi}}, \qquad y_1(x) = \frac{a}{x} - w, \qquad y_2(x) = \frac{a}{x} - w + \frac{w^2}{\xi x},$$
$$x_0(y) = \frac{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau\sqrt{\frac{a}{\xi}}}{y} + \frac{w}{\xi}, \qquad x_1(y) = \frac{a}{w + y}, \qquad x_2(y) = \frac{1}{w + y}\left(a + \frac{w^2}{\xi}\right),$$
а область $\Omega = \Omega(a, \xi, \tau)$ задается неравенствами
$$x \geqslant w/\xi, \qquad \max\{y_0(x), y_1(x)\} \leqslant y < y_2(x),$$
или равносильными условиями
$$x \geqslant w/\xi, \qquad \max\{x_0(y), x_1(y)\} \leqslant x < x_2(y).$$

Чтобы сумма $\lambda(a;\xi;\tau)$ не равнялась тождественно нулю, область $y_0(x) \leqslant y < y_2(x)$ должна быть непустой. Уравнение $y_1(x) = y_2(x)$ сводится к квадратному с дискриминантом $-3r^2 + 2r\tau + \tau^2 - 4$, где $r = w/\sqrt{a\xi}$. Он может принимать неотрицательные значения только при $\tau \geqslant \sqrt{3}$. Значит, при $\tau < \sqrt{3}$ область пуста, и функция $\lambda(a;\xi;\tau)$ (как и $I(r,\tau)$) тождественно равна нулю. Поэтому в дальнейшем будем везде предполагать справедливость неравенства $\tau \geqslant \sqrt{3}$ (соответствующего оценке Рёжсета $f(a,b,c) \geqslant \sqrt{3abc}$, см. [17]).

Введем параметры
$$U_0 = \sqrt{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau\sqrt{\frac{a}{\xi}}} \leqslant \sqrt{a}, \quad U_1 = \sqrt{a}, \quad U_2 = \sqrt{a + \frac{w^2}{\xi}}.$$
Область Ω разобьем на части горизонтальными прямыми
$$y = U_0, \quad y = U_1 - w, \quad y = U_2 - w$$
и вертикальными
$$x = U_0 + w/\xi, \quad x = U_1, \quad x = U_2.$$

При $x \leqslant U_0 + w/\xi$ будем применять лемму 1 к функции $y_0(x)$, разбивая область изменения переменной x на полуинтервалы вида $(X + w/\xi, 2X + w/\xi]$. На каждом из них
$$y_0''(x) \asymp \frac{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau\sqrt{\frac{a}{\xi}}}{(x - \frac{w}{\xi})^3} \asymp \frac{U_0^2}{X^3} = \frac{1}{A_0(X)}, \qquad A_0(X) \leqslant U_0 \leqslant U_2.$$
При $x \geqslant U_0 + w/\xi$ ($y \leqslant U_0$) будем применять лемму 1 к функции $x_0(y)$, разбивая область изменения переменной y на полуинтервалы вида $(Y, 2Y]$. На каждом из таких интервалов
$$x_0''(y) \asymp \frac{a + \frac{w^2}{\xi} - w\tau\sqrt{\frac{a}{\xi}}}{y^3} \asymp \frac{U_0^2}{Y^3} = \frac{1}{A_0(Y)}, \qquad A_0(Y) \leqslant U_0 \leqslant U_2.$$

К функции $y_1(x)$ лемму 1 будем применять для $x \leqslant U_1$. При этом для $x \in (X, 2X]$

$$y_1''(x) \asymp \frac{a}{x^3} \asymp \frac{U_1^2}{X^3} = \frac{1}{A_1(X)}, \qquad A_1(X) \leqslant U_1 \leqslant U_2.$$

К функции $x_1(y)$ лемму 1 будем применять для $y \leqslant U_1 - w$ ($x \geqslant U_1$). При этом для $y \in (Y-w, 2Y-w]$

$$x_1''(y) \asymp \frac{a}{(w+y)^3} \asymp \frac{U_1^2}{Y^3} = \frac{1}{A_1(Y)}, \qquad A_1(Y) \leqslant U_1 \leqslant U_2.$$

К функции $y_2(x)$ лемму 1 будем применять для $x \leqslant U_2$. При этом для $x \in (X, 2X]$

$$y_2''(x) \asymp \frac{a + \frac{w^2}{\xi}}{x^3} \asymp \frac{U_2^2}{X^3} = \frac{1}{A_2(X)}, \qquad A_2(X) \leqslant U_2.$$

К функции $x_2(y)$ лемму 1 будем применять для $y \leqslant U_2 - w$ ($x \geqslant U_2$). При этом для $y \in (Y-w, 2Y-w]$

$$x_1''(y) \asymp \frac{a + \frac{w^2}{\xi}}{(w+y)^3} \asymp \frac{U_2^2}{Y^3} = \frac{1}{A_2(Y)}, \qquad A_2(Y) \leqslant U_2.$$

К прямоугольным частям разбиения области Ω применим лемму 2. К суммам $S[x_i(y)]$, $S[y_i(x)]$ ($i = 0, 1, 2$) применим лемму 3. С учетом соотношений $S[f-g] = S[f] - S[g]$,

$$x_2(y) - x_1(y) \leqslant \frac{w}{\xi}, \quad y_2(x) - y_1(x) \leqslant \frac{w^2}{\xi x} \leqslant w$$

это приводит к главному члену

$$\sum_{w \leqslant \tau\sqrt{a\xi}} \psi(a, w) \iint_{\Omega(a,\xi,\tau)} dx\, dy$$

и остатку

$$\begin{aligned}
R_0(a, \xi, \tau) \ll \sum_{w \leqslant \tau\sqrt{a\xi}} \Biggl(\left(\left(a + \frac{w^2}{\xi}\right)^{1/3} + \left(a + \frac{w^2}{\xi}\right)^{1/4} D_w + w^{1/2} + \delta_w(a) \left(a + \frac{w^2}{\xi}\right)^{1/2} + \right. \\
+ \frac{D_w}{w} \left(w\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) + \left(a + \frac{w^2}{\xi}\right)^{1/2} + w^{1/2} \right) \Biggr) a^{\varepsilon} \ll \\
\ll \left(a^{5/6}\tau^{5/3}\xi^{1/2} + a^{3/4}\tau^{3/2}(\xi^{1/2} + \xi^{3/4}) + a^{1/2}\tau(\xi^{1/2} + \xi^{-1/2}) \right) a^{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

В главном члене сделаем замены переменных $x = \alpha\sqrt{a/\xi}$, $y = \beta\sqrt{a\xi}$, и положим $r = w/\sqrt{a\xi}$. Тогда получим

$$\lambda(a; \xi; \tau) = \sum_{w \leqslant \tau\sqrt{a\xi}} \psi(a, w) I(w/\sqrt{a\xi}) + O_{\varepsilon}(R_0(a, \xi, \tau)),$$

где

$$I(r, \tau) = a \int_r^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} [\max\{\beta_0(\alpha), \beta_1(\alpha)\} \leqslant \beta < \beta_2(\alpha)]\, d\beta,$$

$$\beta_0(\alpha) = \frac{1 + r^2 - r\tau}{\alpha - r}, \quad \beta_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - r, \quad \beta_2(\alpha) = \frac{1 + r^2}{\alpha} - r.$$

Замена $\beta \to \beta - r$ приводит интеграл $I(r, \tau)$ к виду (17). Применяя лемму 4 и пользуясь оценкой $I(r, \tau) \ll r \leqslant \tau$, приходим к требуемой формуле для суммы $\lambda(a; \xi; \tau)$. $\square$

Следствие 2. *В обозначениях леммы 9 для функции $\rho_a(\xi,\tau)$, задаваемой равенством* (12) *справедлива асимптотическая формула*

$$\rho_a(\xi,\tau)=\frac{2\varphi(a)}{\zeta(2)}\Phi(\tau)+O_\varepsilon(R(a,\xi,\tau)),$$

где

$$R(a,\xi,\tau)=(a^{5/6}\tau^{5/3}(\xi^{1/2}+\xi^{-1/2})+a^{3/4}\tau^{3/2}(\xi^{3/4}+\xi^{-3/4})+a^{1/2}\tau(\xi^{1/2}+\xi^{-1/2}))a^{\varepsilon}.$$

Доказательство. С помощью равенства

$$\sum_{d_1d_2|a}\mu(d_1)\mu(d_2)\frac{a}{d_1d_2}\sigma_{-1}\left(\frac{a}{d_1d_2}\right)=\varphi(a)$$

по формуле (15) получаем, что

$$\lambda^*(a;\xi;\tau)=\frac{\varphi(a)}{\zeta(2)}\Phi(\tau)+O_\varepsilon(R_0(a,\xi,\tau)).$$

Подставляя найденное равенство в (14), приходим к утверждению следствия. □

Следствие 3. *Для суммы $F_a^*(x_1,x_2;\tau)$, определенной равенством* (11) *выполняется равенство*

$$F_a^*(x_1,x_2;\tau)=\frac{2}{\zeta(2)}|M_a(x_1,x_2)|\Phi(\tau)+O_\varepsilon(R(a,x_1,x_2,\tau)),$$

где

$$R(a,x_1,x_2,\tau)=(a^{11/6}\tau^{5/3}x_1^{1/2}x_2^{1/2}(x_1+x_2)+a^{7/4}\tau^{3/2}x_1^{1/4}x_2^{1/4}(x_1^{3/2}+x_2^{3/2})+a^{3/2}(x_1+x_2)(x_1^{1/2}x_2^{1/2}\tau+1))a^{\varepsilon}.$$

Доказательство. Нужная формула получается, если результат следствия 2 подставить в равенство (13), к результату применить лемму 8 и воспользоваться замечанием 3. □

7 Интегральное представление для плотности

Для нахождения плотности $p(\tau)$ продифференцируем тройной интеграл, задающий $\Phi(\tau)$ по параметру τ.

Лемма 10. *Плотность $p(\tau)=\frac{2}{\zeta(2)}\Phi'(\tau)$ может быть записана в виде*

$$p(\tau)=\frac{2}{\zeta(2)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\alpha+\beta>\tau,(\alpha+\beta-\tau)^2\leqslant\alpha\beta-1,\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau}\leqslant\min\{\alpha,\beta\}\right]\frac{d\alpha\,d\beta}{\alpha+\beta-\tau}.$$

Доказательство. Отметим, прежде всего, что при $r>\tau$ внутренний двойной интеграл в равенстве

$$\Phi(\tau)=\int_0^\tau\frac{dr}{r}\int_r^\infty\int_r^\infty\left[1\leqslant\alpha\beta\leqslant1+r^2,\alpha+\beta-\tau\leqslant\frac{\alpha\beta-1}{r}\right]d\alpha\,d\beta$$

равен нулю. Введем малый параметр $\Delta>0$ и рассмотрим разность

$$\begin{aligned}\Phi(\tau+\Delta)-\Phi(\tau)=&\int_0^\infty\frac{dr}{r}\int_r^\infty\int_r^\infty\left[1\leqslant\alpha\beta\leqslant1+r^2,\alpha+\beta-\tau-\Delta\leqslant\frac{\alpha\beta-1}{r}<\alpha+\beta-\tau\right]d\alpha\,d\beta=\\=&\Phi_1(\Delta,\tau)+\Phi_2(\Delta,\tau),\end{aligned}$$

где

$$\Phi_1(\Delta,\tau)=\int_0^\infty\frac{dr}{r}\int_r^\infty\int_r^\infty\left[1\leqslant\alpha\beta\leqslant 1+r^2,\alpha+\beta-\tau-\Delta\leqslant 0<\alpha+\beta-\tau,\frac{\alpha\beta-1}{r}<\alpha+\beta-\tau\right]d\alpha\,d\beta,$$
$$\Phi_2(\Delta,\tau)=\int_0^\infty\frac{dr}{r}\int_r^\infty\int_r^\infty\left[1\leqslant\alpha\beta\leqslant 1+r^2,\alpha+\beta-\tau-\Delta>0,\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau}<r\leqslant\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right]d\alpha\,d\beta.$$

В первом случае можно предполагать, что $\tau\geqslant 2$, поскольку иначе при $\Delta<2-\tau$ интеграл $\Phi_1(\Delta,\tau)$ равен нулю. Из условий

$$\alpha+\beta=\tau+O(\Delta),\quad \alpha\beta=1+O(\Delta\tau)$$

следует, что
$$\alpha=\frac{\tau\pm\sqrt{\tau^2-4}}{2}+O(\Delta),\quad \beta=\frac{\tau\pm\sqrt{\tau^2-4}}{2}+O(\Delta).$$
Поэтому область изменения параметров α и β имеет площадь, не превосходящую $O(\Delta^2)$. С другой стороны, для фиксированного $\alpha\geqslant 1$ (если $\alpha<1$, то из неравенства $\alpha\beta\geqslant 1$ следует, что $\beta>1$ и рассуждения можно провести аналогично) переменная β меняется в интервале, длина которого не превосходит
$$\frac{1+r^2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}=\frac{r^2}{\alpha}\leqslant r^2.$$
Поэтому область изменения параметров α и β по площади можно оценить и как $O(r^2\Delta)$. Следовательно,
$$\Phi_1(\Delta,\tau)\ll\int_0^{\Delta^{1/3}}\frac{r^2\Delta}{r}dr+\int_{\Delta^{1/3}}^\tau\frac{\Delta^2}{r}dr\ll\Delta^{5/3}.$$
Поэтому $\Phi_1(\Delta,\tau)/\Delta\to 0$ при $\Delta\to 0$ и

$$p(\tau)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Phi(\tau+\Delta)-\Phi(\tau)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Phi_2(\Delta,\tau)}{\Delta}.$$

В интеграле $\Phi_2(\Delta,\tau)$ внесем интегрирование по переменной r внутрь:

$$\Phi_2(\Delta,\tau)=\iint_{\Omega(\Delta)}d\alpha\,d\beta\int_0^\infty\left[\sqrt{\alpha\beta-1}\leqslant r\leqslant\min\{\alpha,\beta\},\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau}<r\leqslant\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right]\frac{dr}{r}.$$

Здесь и далее
$$\Omega(\Delta)=\{(\alpha,\beta):\alpha,\beta>0,\alpha\beta\geqslant 1,\alpha+\beta>\tau+\Delta\}.$$

Случай, когда отрезок $\left[\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau},\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right]$ содержит точку $\sqrt{\alpha\beta-1}$ дает малый вклад в $\Phi_2(\Delta,\tau)$. Действительно, для фиксированного значения $t=\alpha+\beta-\tau>\Delta$ переменные α и β удовлетворяют неравенствам $t-\Delta\leqslant\sqrt{\alpha\beta-1}\leqslant t$. Поэтому они меняются внутри интервалов, суммарная длина которых есть $O(\sqrt{\Delta})$ и

$$\iint_{\Omega(\Delta)}d\alpha\,d\beta\int_0^\infty\left[\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau}\leqslant\sqrt{\alpha\beta-1}\leqslant r\leqslant\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right]\frac{dr}{r}\ll$$
$$\ll\iint_{\Omega(\Delta)}d\alpha\,d\beta\left[\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau}\leqslant\sqrt{\alpha\beta-1}\leqslant\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right]\frac{d\alpha\,d\beta}{\alpha+\beta-\tau}\ll\Delta\int_\Delta^\tau\frac{\sqrt{\Delta}}{t}dt\ll\Delta^{3/2-\varepsilon}.$$

Случай, когда отрезок $\left[\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau},\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right]$ содержит точку $\min\{\alpha,\beta\}$ также дает малый вклад в $\Phi_2(\Delta,\tau)$. Для получения соответствующих оценок заметим, что при $\tau<2$ и $\Delta<2-\tau$

из неравенств $\alpha\beta \geqslant 1$, $\min\{\alpha, \beta\} \leqslant \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}$ следует, что этот вклад просто равен нулю. Если же $\tau \geqslant 2$, то в силу симметрии можно предполагать, что $\alpha \leqslant \beta$. Тогда для фиксированного β

$$\int_0^\infty d\alpha \left[\alpha+\beta>\tau-\Delta, \sqrt{\alpha\beta-1} \leqslant \min\{\alpha,\beta\}, \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant \min\{\alpha,\beta\} \leqslant \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right] \times$$
$$\times \int_0^\infty \left[\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} < r \leqslant \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right] \frac{dr}{r} \ll$$
$$\ll \int_0^\infty d\alpha \left[\alpha+\beta>\tau-\Delta, \sqrt{\alpha\beta-1} \leqslant \min\{\alpha,\beta\}, \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant \min\{\alpha,\beta\} \leqslant \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right] \frac{\Delta}{\alpha+\beta-\tau} \ll$$
$$\ll -\Delta \log \Delta.$$

Кроме того, при $\alpha \leqslant \beta$ из неравенств $\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant \min\{\alpha,\beta\} \leqslant \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}$ следует, что β меняется в пределах

$$\beta_1(\Delta) \leqslant \beta \leqslant \beta_1, \quad \beta_2 \leqslant \beta \leqslant \beta_2(\Delta),$$

где

$$\beta_{1,2} = \frac{\tau \mp \sqrt{\tau^2-4}}{2}, \quad \beta_{1,2}(\Delta) = \frac{\tau+\Delta \mp \sqrt{(\tau+\Delta)^2-4}}{2},$$
$$\beta_1 - \beta_1(\Delta) \ll \sqrt{\Delta}, \quad \beta_2(\Delta) - \beta_2 \ll \sqrt{\Delta}.$$

Поэтому и в таком случае вклад оценивается как $O(\Delta^{3/2-\varepsilon})$. Следовательно,

$$\Phi_2(\Delta,\tau) = \iint_{\Omega(\Delta)} d\alpha\, d\beta \left[\sqrt{\alpha\beta-1} \leqslant \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant \min\{\alpha,\beta\}\right] \times$$
$$\times \int_0^\infty \left[\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant r < \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau-\Delta}\right] \frac{dr}{r} + O(\Delta^{3/2-\varepsilon}) =$$
$$= \iint_{\Omega(\Delta)} d\alpha\, d\beta \left[\sqrt{\alpha\beta-1} \leqslant \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant \min\{\alpha,\beta\}\right] \times$$
$$\times \left(\frac{\Delta}{\alpha+\beta-\tau} + O\left(\left(\frac{\Delta}{\alpha+\beta-\tau}\right)^2\right)\right) + O(\Delta^{3/2-\varepsilon}).$$

Здесь при фиксированном $t = \alpha+\beta-\tau > \Delta$ переменные α и β меняются внутри интервалов, длина которых есть $O(t)$. Поэтому

$$\iint_{\Omega(\Delta)} d\alpha\, d\beta \left[\sqrt{\alpha\beta-1} \leqslant \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant \min\{\alpha,\beta\}\right] \left(\frac{\Delta}{\alpha+\beta-\tau}\right)^2 \ll \int_\Delta^\tau \frac{\Delta^2}{t} \ll \Delta^{2-\varepsilon}.$$

Значит,

$$\frac{\Phi_2(\Delta,\tau)}{\Delta} = \iint_{\Omega(\Delta)} \left[\sqrt{\alpha\beta-1} \leqslant \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant \min\{\alpha,\beta\}\right] \frac{d\alpha\, d\beta}{\alpha+\beta-\tau} + O(\Delta^{1/2-\varepsilon}).$$

Предельный переход при $\Delta \to 0$ завершает доказательство леммы. □

8 Вычисление плотности

Для нахождения явного вида плотности $p(\tau)$ изобразим кривые, участвующие в интегральном представлении

$$p(\tau) = \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\alpha+\beta>\tau, (\alpha+\beta-\tau)^2 \leqslant \alpha\beta-1, \frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant \min\{\alpha,\beta\}\right] \frac{d\alpha\, d\beta}{\alpha+\beta-\tau}.$$

На рисунке 1 при $\sqrt{3} < \tau < 2$ показаны прямая $\alpha + \beta = \tau$, эллипс $(\alpha + \beta - \tau)^2 = \alpha\beta - 1$ (сплошными линиями) и гипербола $\alpha\beta = 1$ (пунктиром). На рисунке 2 при $\tau > 2$ к ним добавлены горизонтальные прямые $\beta = \beta_{1,2}$, $\beta = \tau$ и вертикальные $\alpha = \alpha_{1,2}$, $\alpha = \tau$, где

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}.$$

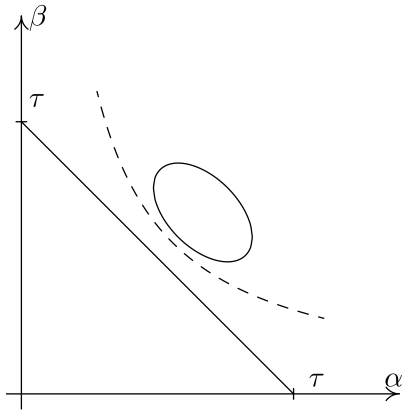

Рис. 1: $\sqrt{3} < \tau < 2$

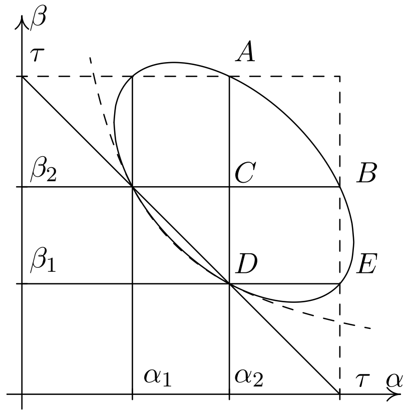

Рис. 2: $\tau > 2$

Лемма 11. *Для плотности $p(\tau)$ справедливы равенства:*

$$p(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau \in [0, \sqrt{3}]; \\ \frac{12}{\pi}\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - \sqrt{4 - \tau^2}\right), & \text{если } \tau \in [\sqrt{3}, 2]; \\ \frac{12}{\pi^2}\left(\tau\sqrt{3}\arccos\frac{\tau + 3\sqrt{\tau^2-4}}{4\sqrt{\tau^2-3}} + \frac{3}{2}\sqrt{\tau^2 - 4}\log\frac{\tau^2-4}{\tau^2-3}\right), & \text{если } \tau \in [2, +\infty). \end{cases}$$

Доказательство. Как отмечалось ранее, при $\tau < \sqrt{3}$ область интегрирования пуста, и $p(\tau) = 0$.

Рассмотрим случай, когда $\sqrt{3} < \tau < 2$. Если $\alpha + \beta > \tau$, то неравенство $\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \tau} \leqslant \min\{\alpha, \beta\}$ выполняется автоматически. Поэтому область изменения переменных задается условием $(\alpha + \beta - \tau)^2 \leqslant \alpha\beta - 1$ (неравенство $\alpha + \beta > \tau$ следует из того, что $\alpha\beta \geqslant 1$). Таким образом интегрирование проводится по внутренности эллипса $(\alpha + \beta - \tau)^2 = \alpha\beta - 1$ (см. рис. 1). Введем переменную $x = \alpha + \beta - \tau$. Тогда

$$\frac{\zeta(2)}{2}p(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left[(\alpha + \beta - \tau)^2 \leqslant \alpha\beta - 1\right] \frac{d\alpha\, d\beta}{\alpha + \beta - \tau} = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty \left[x^2 + 1 \leqslant \alpha(x + \tau - \alpha)\right] d\alpha =$$
$$= \int_0^\infty [(x + \tau)^2 - 4(x^2 + 1) \geqslant 0] \frac{\sqrt{(x + \tau)^2 - 4(x^2 + 1)}}{x} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{(x + \tau)^2 - 4(x^2 + 1)}}{x} dx,$$

где

$$x_{1,2} = \frac{\tau \mp \sqrt{4\tau^2 - 12}}{3}.$$

Замена переменной $y = x - \frac{\tau}{3}$ приводит к интегралу ($b = \tau/3$, $a^2 = \frac{4\tau^2 - 12}{9}$)

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y + b}\, dy = \sqrt{a^2 - y^2} + b \operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{arctg}\frac{a^2 + by}{\sqrt{b^2 - a^2}\sqrt{a^2 - y^2}},$$

для которого

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y + b}\, dy = \pi(b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

Отсюда
$$p(\tau) = \frac{2\pi}{\zeta(2)}\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - \sqrt{4-\tau^2}\right) = \frac{12}{\pi}\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - \sqrt{4-\tau^2}\right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\tau \geqslant 2$. Как и раньше неравенство $(\alpha+\beta-\tau)^2 \leqslant \alpha\beta - 1$ задает внутренность эллипса. Условие $\frac{\alpha\beta-1}{\alpha+\beta-\tau} \leqslant \min\{\alpha,\beta\}$ равносильно тому, что $\alpha \in [0,\alpha_1] \cup [\alpha_2,\infty)$, $\beta \in [0,\beta_1] \cup [\beta_2,\infty)$. Поэтому плотность $p(\tau)$ можно представить в виде
$$p(\tau) = \frac{2}{\zeta(2)}(J_1 + 2J_2),$$
где J_1 — интеграл по области ограниченной отрезками AC, BC и дугой эллипса AB, а J_2 — по сегменту эллипса, отсекаемому отрезком DE (см. рис. 2).

Интеграл J_1 также находится с помощью замены $x = \alpha + \beta - \tau$
$$J_1 = \int_{\sqrt{\tau^2-4}}^{\alpha_2} \frac{x - \sqrt{\tau^2-4}}{x}\,dx + \int_{\alpha_2}^{\frac{\tau+2\sqrt{\tau^2-3}}{3}} \frac{\sqrt{(x+\tau)^2 - 4(x^2+1)}}{x} dx.$$
Применяя в этом случае формулу
$$\int \frac{\sqrt{(x+\tau)^2-4(x^2+1)}}{x}dx = \sqrt{(x+\tau)^2-4(x^2+1)} - \frac{\tau}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\tau-3x}{2\sqrt{\tau^2-3}} - \\ - \sqrt{\tau^2-4}\log\frac{2(\tau^2-4)+2x\tau+2\sqrt{\tau^2-4}\sqrt{(x+\tau)^2-4(x^2+1)}}{x}$$
приходим к ответу
$$J_1 = \frac{\tau}{\sqrt{3}}\arccos\frac{\tau+3\sqrt{\tau^2-4}}{4\sqrt{\tau^2-3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2-4}\log\frac{\tau^2-4}{\tau^2-3}.$$

Интеграл J_2 запишем в виде
$$J_2 = \int_{\frac{2}{3}(\tau-\sqrt{\tau^2-3})}^{\beta_1} d\beta \int_{\alpha_1(\beta)}^{\alpha_2(\beta)} \frac{d\alpha}{\alpha+\beta-\tau} = \\ = \int_{\frac{2}{3}(\tau-\sqrt{\tau^2-3})}^{\beta_1} \left(\log(\alpha_2(\beta)+\beta-\tau) - \log(\alpha_1(\beta)+\beta-\tau)\right) d\beta,$$
где
$$\alpha_{1,2}(\beta) = \frac{2\tau - \beta \mp \sqrt{-3\beta^2+4\beta\tau-4}}{2}.$$
Первообразную подынтегральной функции можно указать явно:
$$\int \left(\log(\alpha_2(\beta)+\beta-\tau) - \log(\alpha_1(\beta)+\beta-\tau)\right) d\beta = F_0(\beta),$$
где
$$F_0(\beta) = (\beta_1-\beta)\log(\beta_1-\beta) + (\beta_2-\beta)\log(\beta_2-\beta) + \frac{\tau}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3\beta-2\tau}{2\sqrt{\tau^2-3}} + \\ + 2\beta\log\frac{\beta+\sqrt{-3\beta^2+4\beta\tau-4}}{2} - \beta_1\log\left(2\beta_1\tau - 4 + \beta(2\tau-3\beta_1) + \beta_1\sqrt{-3\beta^2+4\beta\tau-4}\right) - \\ - \beta_2\log\left(2\beta_2\tau - 4 + \beta(2\tau-3\beta_2) + \beta_2\sqrt{-3\beta^2+4\beta\tau-4}\right).$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, находим значение интеграла J_2:

$$F_0(\beta_1) = \frac{\sqrt{\tau^2-4}}{2}\log(\tau^2-4) - \tau\log 2 - \frac{\tau}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\tau+3\sqrt{\tau^2-4}}{4\sqrt{\tau^2-3}} - \beta_2\log(\tau^2-3),$$
$$F_0\left(\frac{2}{3}(\tau-\sqrt{\tau^2-3})\right) = -\frac{\pi\tau}{2\sqrt{3}} - \tau\log 2 - \frac{\tau}{2}\log(\tau^2-3),$$
$$J_2 = J_1 = \frac{\tau}{\sqrt{3}}\arccos\frac{\tau+3\sqrt{\tau^2-4}}{4\sqrt{\tau^2-3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2-4}\log\frac{\tau^2-4}{\tau^2-3}.$$

Значит,

$$p(\tau) = \frac{6J_1}{\zeta(2)} = \frac{12}{\pi^2}\left(\tau\sqrt{3}\arccos\frac{\tau+3\sqrt{\tau^2-4}}{4\sqrt{\tau^2-3}} + \frac{3}{2}\sqrt{\tau^2-4}\log\frac{\tau^2-4}{\tau^2-3}\right).$$

□

Доказательство теоремы . Подставляя в следствие 3 плотность $p(t)$, подсчитанную в лемме 11 приходим к утверждению теоремы с остаточным членом $O_\varepsilon(R(a,x_1,x_2,\tau)a^\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned}R(a,x_1,x_2,\tau) =& a^{-1/6}\tau^{5/3}x_1^{-1/2}x_2^{-1/2}(x_1+x_2) + a^{-1/4}\tau^{3/2}x_1^{-3/4}x_2^{-3/4}(x_1^{3/2}+x_2^{3/2}) + \\ &+ a^{-1/2}(x_1+x_2)(x_1^{-1/2}x_2^{-1/2}\tau + x_1^{-1}x_2^{-1}) \ll_{x_1,x_2,\tau} a^{-1/6}.\end{aligned}$$

□

9 Свойства плотности

График функции $p(t)$ изображен на рисунке 3.

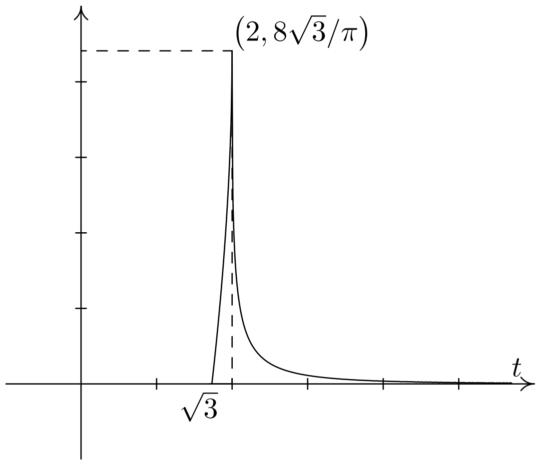

Рис. 3: график функции $p(t)$

Докажем основные свойства плотности.

Лемма 12. *Для функции $p(t)$ выполняются следующие соотношения:*

1°. *функция $p(t)$ возрастает на отрезке $[\sqrt{3}, 2]$, убывает на полуинтервале $[2, +\infty)$; $\lim\limits_{t\to 2-0} p'(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 2+0} p'(t) = -\infty$;*

2°. $p(t) = \frac{18}{\pi^2 t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right) \qquad (t\to\infty)$;

3°. $\int_0^\infty p(t)\,dt = 1$;

4°. $\int_0^\infty tp(t)\,dt = \frac{8}{\pi}$.

Доказательство. Свойства 1°–2° непосредственно вытекают из формулы для $p(t)$, доказанной в лемме 11.

Для доказательства свойства 3° заметим, что согласно лемме 9

$$\int_0^\infty p(t)\,dt = \frac{2}{\zeta(2)} \lim_{\tau\to\infty} \Phi(\tau) = \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_r^\infty \int_r^\infty \left[1 \leqslant \alpha\beta \leqslant 1 + r^2\right] d\alpha\, d\beta.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p(t)\,dt =& \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^1 \left((1+r^2)\log\left(1+\frac{1}{r^2}\right) - \log\frac{1}{r^2} - r^2\right)\frac{dr}{r} + \\ &+ \frac{2}{\zeta(2)} \int_1^\infty \left((1+r^2)\log\left(1+\frac{1}{r^2}\right) - 1\right)\frac{dr}{r} = \\ =& \frac{2}{\zeta(2)} \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{\zeta(2)}{4} + \log 2\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\zeta(2)}{4} - \log 2\right)\right) = 1.\end{aligned}$$

Для функции $tp(t)$ первообразная находится явно:

$$\begin{aligned}F_1(t) &= \int \pi t \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{4-t^2}\right) dt = \frac{\pi}{3}\left(\frac{t^3}{\sqrt{3}} + (4-t^2)^{3/2}\right), \\ F_2(t) &= \int t \left(t\sqrt{3}\arccos\frac{t+3\sqrt{t^2-4}}{4\sqrt{t^2-3}} + \frac{3}{2}\sqrt{t^2-4}\log\frac{t^2-4}{t^2-3}\right) dt = \\ &= \frac{t^3}{\sqrt{3}}\arccos\frac{t+3\sqrt{t^2-4}}{4\sqrt{t^2-3}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{t^2-4} + \frac{(t^2-4)^{3/2}}{2}\log\frac{t^2-4}{t^2-3}.\end{aligned}$$

При этом

$$F_1(\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3}, \quad F_1(2) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}, \quad F_2(2) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}, \quad F_2(\infty) = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty tp(t)\,dt = \frac{2}{\zeta(2)}\left(2\pi - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{8}{\pi}.$$

□

Следствие 4. *Из свойств функции $p(t)$ вытекает, что для почти всех троек чисел $(a,b,c) \in M_a(x_1,x_2)$ числа Фробениуса $f(a,b,c)$ имеют порядок $\sqrt{abc}$. В наиболее простом случае, когда $x_1 = x_2 = 1$, $a > \tau^{34+\varepsilon}$,*

$$\frac{1}{|M_a(x_1,x_2)|} \sum_{(a,b,c)\in M_a(x_1,x_2)} [f(a,b,c) > \tau\sqrt{abc}] = \frac{9}{\pi^2\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right).$$

10 Заключительные заечания

Отдельный интерес представляет собой функция $n(a,b,c)$, которая при $(a,b,c) = 1$ равна количеству натуральных m не представимых в виде

$$m = ax + by + cz \qquad (x,y,z \geqslant 0).$$

Вместе с функцией Фробениуса она характеризует работу двухконтурных сетей ($g(a,b,c)$ отвечает за максимальный диаметр сети, а $n(a,b,c)$ — за средний, см. [21], [17]). Модифицированная величина

$$N(a,b,c) = n(a,b,c) + \frac{a+b+c-1}{2}$$

как и $f(a,b,c)$ при $d \mid (a,b)$ удовлетворяет уравнению (см. [17, лемма 1])

$$N(a,b,c) = d \cdot N(a/d, b/d, c).$$

Для вычисления $N(a,b,c)$ Рёдсетом (см. [17, теорема 2]) доказана формула

$$2N(a,b,c) = bs_{n-1} + cq_n - s_n q_{n-1}(b(s_{n-1} - s_n) + c(q_n - q_{n-1}))/a, \tag{18}$$

как и (6), справедливая при $(a,b) = (a,c) = (b,c) = 1$, $s_n/q_n \leqslant c/b \leqslant s_{n-1}/q_{n-1}$. Метод, предложенный в настоящей статье, позволяет описать распределение значений $N(a,b,c)$ и других подобных функций. Вероятностная плотность

$$p(\alpha,\beta,r) = \frac{2}{\zeta(2)r}[r \leqslant \min\{\alpha,\beta\}, 1 \leqslant \alpha\beta \leqslant 1 + r^2],$$

возникающая в лемме 9, отвечает за совместное распределение троек (α,β,r), где

$$\alpha = \frac{u_1}{\sqrt{a/\xi}} = \frac{q_n}{\sqrt{a/\xi}}, \quad \beta = \frac{u_2}{\sqrt{a\xi}} = \frac{s_{n-1}}{\sqrt{a\xi}}, \quad r = \frac{v_2}{\sqrt{a\xi}} = \frac{s_n}{\sqrt{a\xi}}.$$

С помощью этой плотности можно записать функцию распределения для величин, зависящих от четверок $(q_n, s_{n-1}, q_{n-1}, s_n) = (u_1, u_2, v_1, v_2)$ и дополнительного параметра ξ, удовлетворяющих соотношению

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = f(u_2, u_1, v_2, v_1; 1/\xi).$$

Так для нормированных чисел Фробениуса $f(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = (u_2 + \xi u_1 - \min\{v_2, \xi v_1\})/\sqrt{a\xi}$. Числам $2N(a,b,c)/\sqrt{abc}$, согласно (18), соответствует

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2; \xi) = (u_2 + \xi u_1 - v_1 v_2 (u_2 - v_2 + \xi(u_1 - v_1))a^{-1})/\sqrt{a\xi},$$

что приводит к функции распределения

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(\tau) =& \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\alpha + \beta - (\alpha\beta - 1)\left(\alpha + \beta - r - \frac{\alpha\beta - 1}{r}\right) \leqslant \frac{\tau}{2}\right] p(\alpha,\beta,r)\, d\alpha\, d\beta\, dr = \\ =& \frac{2}{\zeta(2)} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_r^\infty \int_r^\infty \left[1 \leqslant \alpha\beta \leqslant 1 + r^2, \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta - 1}{r} + \frac{(\alpha - r)(\beta - r)(\alpha\beta - 1)}{r} \leqslant \frac{\tau}{2}\right] d\alpha\, d\beta.\end{aligned}$$

В аналогичной форме можно записать функции распределения для отношения $N(a,b,c)/f(a,b,c)$ (что в неявном виде дает ответ на вопрос Арнольда о математическом ожидании этого отношения, см. [8, задача 1999–9]) и псевдо–чисел Фробениуса с тремя аргументами, см. [18].

Список литературы

[1] Бургейн Ж., Синай Я. Г. Предельное поведение больших чисел Фробениуса. — *Успехи мат. наук*, **62**:4 (2007), 77—90.

[2] Быковский В. А. Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2), удовлетворяющих сравнению $a_1 a_2 \equiv l \pmod q$. — *Записки научных семинаров ЛОМИ* **112** (1981), 5–25.

[3] Устинов А. В. О статистических свойствах конечных цепных дробей. — *Записки научн. семин. ПОМИ*, **322** (2005), 186–211.

[4] Устинов А. В. О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции. — *Алгебра и анализ*, **20**: 5 (2008), 186–216.

[5] Устинов А. В. О статистических свойствах элементов цепных дробей. — *ДАН*, **424**: 4 (2009), 459–461.

[6] Устинов А. В. Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами. — *Мат. сборник*, **200**:4 (2009), 131–160.

[7] Aliev I., Henk M. Integer knapsacks: average behavior of the Frobenius numbers. — *Mathematics of Operational Research* (accepted, see ArXiv: 0810.0234).

[8] Arnold V. *Arnold's Problems.* — Springer, 2005.

[9] Davison J. L. On the linear Diophantine problem of Frobenius. — *J. Number Theory*, 48 (1994), 353–363.

[10] Estermann T. On Kloosterman's sum. — *Mathematika*, v. 8 (1961), 83–86.

[11] Johnson S. M. A linear diophantine problem. — *Canad. J. Math.*, 12 (1960), 390–398.

[12] Kannan R. Lattice translates of a polytope and the Frobenius problem. — *Combinatorica*, **12** (1992), 161–177.

[13] Karp R. M. Reducibility Among Combinatorial Problems — *Complexity of Computer Computations*, R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds, Plenum, New York, 1972, 85–103.

[14] Marklof J. The asymptotic distribution of Frobenius numbers, 2009, arXiv.org: 0902.3557.

[15] Ramirez Alfonsin J. L. *The Diophantine Frobenius problem.* — Oxford University Press, 2005.

[16] Rödseth Ö. J. On a linear Diophantine problem of Frobenius. — *J. Reine Angew. Math.*, 301 (1978), 171–178.

[17] Rödseth Ö. J. Weighted multi–connected loop networks. — *Discrete Math.*, 148 (1996), 161–173.

[18] Rosales J. C., García–Sánchez P. A. Numerical semigroups with embedding dimension three. — *Arch. Math. (Basel)*, 83 (2004), 488–496.

[19] Selmer E.S., Beyer O. On the linear diophantine problem of Frobenius in three variables. — *J. Reine Angewandte Math.*, 301 (1978), 161–170.

[20] Sylvester J.J. Problem 7382. — *Educational Times* 37 (1884), 26; reprinted in: Mathematical questions with their solution, *Educational Times* (with additional papers and solutions) 41 (1884), 21.

[21] Wong C. K., Coppersmith, D. A combinatorial problem related to multimodule memory organizations. — *J. Assoc. Comput. Mach.*, 21 (1974), 392–402.