

© А. В. Устинов¹

О статистиках Гаусса — Кузьмина в коротких интервалах

В статье исследуются статистики Гаусса — Кузьмина для рациональных чисел a/b , где b фиксировано, $1 \leq a \leq b$, $(a, b) = 1$. Для среднего значения статистик Гаусса — Кузьмина доказывается асимптотическая формула, уточняющая ранее известный результат, аналогичный теореме Портера.

Ключевые слова: алгоритм Евклида, цепные дроби, суммы Клостермана, статистики Гаусса — Кузьмина.

1. Введение

Важными характеристиками рационального числа, записанного в виде конечной цепной дроби

$$\frac{a}{b} = t_0 + \frac{1}{t_1 + \frac{1}{t_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{t_s + \frac{1}{1}}}}} = [t_0; t_1, \dots, t_s, 1]$$

(t_0 — целое, t_1, \dots, t_s — натуральные), являются статистики Гаусса — Кузьмина, которые для действительного $x \in [0, 1]$ задаются равенством

$$s_x(a/b) = \#\{j : 0 \leq j \leq s, [0; t_{j+1}, \dots, t_s, 1] \leq x\}.$$

Например, через статистики Гаусса — Кузьмина выражается длина различных вариантов алгоритма Евклида, примененного к паре чисел (a, b) (см. [5, 6]). К статистическим свойствам конечных цепных дробей сводится задача Синая о траекториях частиц в двумерной кристаллической решетке (см. [2]) и исследование статистических свойств чисел Фробениуса с тремя аргументами (см. [7]).

Для среднего значения статистик Гаусса — Кузьмина известна асимптотическая формула (см. [4]), обобщающая результат Портера [11]:

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{a=1}^b s_x(a/b) = \frac{2 \log b}{\zeta(2)} \log(1+x) + C_P(x) + O_{\varepsilon, x}(b^{-1/6+\varepsilon}), \quad (1)$$

¹Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: ustinov.alexey@gmail.com

где

$$C_P(x) = \frac{2 \log(1+x)}{\zeta(2)} \left(2\gamma - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(1+x)}{2} + \log x - 1 \right) + \frac{2}{\zeta(2)} (h_1(x) + h_2(x)) + \frac{x^2}{x+1},$$

а функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ задаются абсолютно сходящимися сингулярными рядами (первая из них известна как функция Лохса, см. [9, 10])

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^n \frac{x}{n+mx} - \log(1+x) \right), \quad h_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{\frac{n}{x} \leq m < \frac{n}{x+n}} \frac{1}{m} - \log(1+x) \right).$$

При этом оценка остаточного члена становится равномерной по x в предположении, что $x \in [c, 1]$ для некоторого фиксированного $c > 0$.

Рассмотрим статистики, которые отвечают за попадание в более узкие интервалы

$$s_{\alpha, \beta}(a/b) = s_{\beta}(a/b) - s_{\alpha}(a/b) \quad (0 \leq \alpha < \beta \leq 1).$$

Тогда при $0 < c \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ для суммы

$$\Psi_{\alpha, \beta}^*(b) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq b \\ (a, b) = 1}} s_{\alpha, \beta}(a/b)$$

из формулы (1), очевидно, следует равенство

$$\frac{\Psi_{\alpha, \beta}^*(b)}{\varphi(b)} = \frac{2 \log b}{\zeta(2)} \log \frac{1+\beta}{1+\alpha} + C_P(\beta) - C_P(\alpha) + O_{\varepsilon, c}(b^{-1/6+\varepsilon}).$$

Оказывается, что если разность $\beta - \alpha$ достаточно мала, то остаточный член в последнем равенстве допускает уточнение.

Теорема. Пусть $b \geq 1$, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, $\Delta = \beta - \alpha$. Тогда

$$\frac{\Psi_{\alpha, \beta}^*(b)}{\varphi(b)} = \frac{2 \log b}{\zeta(2)} \log \frac{1+\beta}{1+\alpha} + C_P(\beta) - C_P(\alpha) + O_{\varepsilon}(R(b; \alpha, \beta) b^{\varepsilon}),$$

где

$$R(b; \alpha, \beta) = b^{-1/6} \Delta^{1/2} \beta^{1/2} + b^{-1/4} (\Delta^{-5/4} \beta^{5/2} + \Delta^{5/4} \alpha^{-3/2} \beta^{-5/2}).$$

Применение этой теоремы позволяет подсчитывать статистики Гаусса — Кузьмина в коротких интервалах (и частоту появления больших неполных частных) с точностью большей, чем в формуле (1).

Следствие 1. Пусть $b \geq 1$, $0 < c \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, $\Delta = \beta - \alpha$, $b^{-1/15+\varepsilon_0} \ll \Delta \ll b^{-\varepsilon_0}$ ($0 < \varepsilon_0 < 1/30$). Тогда

$$\frac{\Psi_{\alpha, \beta}^*(b)}{\varphi(b)} = \frac{2 \log b}{\zeta(2)} \log \frac{1+\beta}{1+\alpha} + C_P(\beta) - C_P(\alpha) + O_{\varepsilon, c}(b^{-1/6+\varepsilon} \Delta^{1/2} + b^{-1/4+\varepsilon} \Delta^{-5/4}).$$

Следствие 2. Пусть $b \geq 1$. Тогда для N_k — количества появлений неполного частного k в разложении чисел a/b ($1 \leq a \leq b$, $(a, b) = 1$) в цепные дроби — справедлива асимптотическая формула

$$\frac{N_k}{\varphi(b)} = \frac{2 \log b}{\zeta(2)} \log \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right) + C_P \left(\frac{1}{k} \right) - C_P \left(\frac{1}{k+1} \right) + O_{\varepsilon}(b^{-1/6+\varepsilon} k^{-3/2} + b^{-1/4+\varepsilon} k^{3/2}),$$

которая уточняет равенство (1) при $b^{\varepsilon_0} \ll k \ll b^{1/18-\varepsilon_0}$ ($0 < \varepsilon_0 < 1/36$).

2. Следствия из оценок сумм Клостермана

Пусть q — натуральное число, a — целое число и f — неотрицательная функция. Обозначим через $T[f]$ число решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$, лежащих в области $P_1 < x \leq P_2$, $0 < y \leq f(x)$:

$$T[f] = \sum_{P_1 < x \leq P_2} \sum_{0 < y \leq f(x)} \delta_q(xy - a).$$

Здесь и далее $\delta_q(n)$ — характеристическая функция делимости на q :

$$\delta_q(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

Как показано в статье Быковского [1], вычисление $T[f]$ сводится к нахождению суммы

$$S[f] = \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leq P_2} \mu_{q,a}(x) f(x), \quad (2)$$

где $\mu_{q,a}(x)$ — число решений сравнения $xy \equiv a \pmod{q}$ относительно переменной y , лежащей в пределах $1 \leq y \leq q$.

Приведем упрощенный результат работы [4] (уточняющий теорему 1 из [1]). Он основан на оценках сумм Клостермана

$$K_q(l, m, n) = \sum_{x,y=1}^q \delta_q(xy - l) e^{2\pi i \frac{mx+ny}{q}}$$

и методе ван дер Корпута оценки тригонометрических сумм. Для них справедливо неравенство

$$|K_q(l, m, n)| \leq \sigma_0(q) \cdot \sigma_0((l, m, n, q)) \cdot (lm, ln, mn, q)^{1/2} \cdot q^{1/2},$$

обобщающее результат Эстермана [8]

$$|K_q(\pm 1, m, n)| \leq \sigma_0(q) \cdot (m, n, q)^{1/2} \cdot q^{1/2}.$$

Лемма. Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geq 2$, на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для некоторых $A > 0$, $w \geq 1$

$$\frac{1}{A} \leq |f''(x)| \leq \frac{w}{A}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T[f] = S[f] + R[f],$$

где $S[f]$ определено равенством (2),

$$R[f] \ll_{w,\varepsilon} (PA^{-1/3} + A^{1/2}D + q^{1/2})P^\varepsilon + P\delta_q(a)$$

и $D = (a, q)$.

3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы. Будем предполагать, что $\varepsilon < 1/6$. Обозначим через $T_{\alpha,\beta}(b)$ число решений уравнения

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = b \quad (3)$$

относительно неизвестных m_1, m_2, n_1, n_2 , связанных неравенствами

$$1 \leq m_1 \leq n_1, \quad \alpha n_2 \leq m_2 \leq \beta n_2.$$

Через $T_{\alpha,\beta}^*(b)$ обозначим число решений уравнения (3), в котором

$$1 \leq m_1 \leq n_1, \quad (m_1, n_1) = 1, \quad \alpha n_2 \leq m_2 \leq \beta n_2.$$

Для суммы

$$\Psi_{\alpha,\beta}(b) = \sum_{a=1}^b s_{\alpha,\beta}(a/b)$$

справедливо равенство (см. доказательство леммы 3 в работе [3])

$$\Psi_{\alpha,\beta}(b) = 2T_{\alpha,\beta}^*(b) + b \left(\frac{\beta^2}{\beta+1} - \frac{\alpha^2}{\alpha+1} \right) + O(1). \quad (4)$$

Величины $\Psi_{\alpha,\beta}(b)$ и $T_{\alpha,\beta}(b)$ связаны с $\Psi_{\alpha,\beta}^*(b)$ и $T_{\alpha,\beta}^*(b)$ формулой обращения Мебиуса

$$\Psi_{\alpha,\beta}^*(b) = \sum_{d|b} \mu(d) \Psi_{\alpha,\beta}(b/d), \quad T_{\alpha,\beta}^*(b) = \sum_{d|b} \mu(d) T_{\alpha,\beta}(b/d). \quad (5)$$

Для вычисления $T_{\alpha,\beta}(b)$ введем параметр U предполагая, что $U \leq b^{1/2}$ и b/U — полуцелое число. Разобьем все решения уравнения (3) на две группы. К первой отнесем те, для которых $n_1 < U$, а ко второй — все остальные. Соответственно такому разбиению, $T_{\alpha,\beta}(b)$ представится в виде

$$T_{\alpha,\beta}(b) = T_1(b, U) + T_2(b, U). \quad (6)$$

Найдем сначала асимптотическую формулу для $T_1(b, U)$. Заметим, что при фиксированном $n_1 = q$ переменные m_1 и m_2 удовлетворяют сравнению $m_1 m_2 \equiv b \pmod{q}$. Для известных n_1, m_1 и m_2 значение n_2 находится однозначно: $n_2 = \frac{b - m_1 m_2}{q}$. Ограничения $\alpha n_2 < m_2 \leq \beta n_2$ равносильны неравенствам

$$\frac{\alpha b}{q + \alpha m_1} = g_q(m_1) < m_2 \leq \frac{\beta b}{q + \beta m_1} = f_q(m_1).$$

Таким образом, задача сводится к подсчету числа решений сравнения $m_1 m_2 \equiv b \pmod{q}$, в котором переменные удовлетворяют ограничениям

$$0 < m_1 \leq q, \quad g_q(m_1) < m_2 \leq f_q(m_1).$$

Применим лемму с $P_1 = 0, P_2 = q, f = f_q$. С учетом того, что

$$f_q''(m_1) \asymp \frac{\beta^3 b}{q^3}, \quad g_q''(m_1) \asymp \frac{\alpha^3 b}{q^3},$$

находим

$$T[f_q] - T[g_q] = S[f_q - g_q] + R[f_q] + R[g_q],$$

где

$$R[f_q] + R[g_q] \ll_\varepsilon (\beta b^{1/3} + q^{3/2} b^{-1/2} \alpha^{-3/2}(b, q) + q^{1/2}) b^\varepsilon + q \delta_q(b).$$

Отсюда

$$T_1(b, U) = \sum_{q < U} (T[f_q] - T[g_q]) = S_1(b, U) + R_1(b, U) + O_\varepsilon(b^{1/2+\varepsilon}), \quad (7)$$

где

$$S_1(b, U) = \sum_{q < U} S[f_q - g_q] = \sum_{q < U} \frac{1}{q} \sum_{m_1 \leq q} \mu_{q,b}(m_1) (f_q(m_1) - g_q(m_1)),$$

$$R_1(b, U) = \sum_{q < U} (R[f_q] + R[g_q]) \ll_\varepsilon (\beta b^{1/3} U + U^{3/2} + U^{5/2} b^{-1/2} \alpha^{-3/2}) b^\varepsilon. \quad (8)$$

Для нахождения $T_2(b, U)$ воспользуемся тем, что при фиксированном $n_2 = q$ переменные m_1 и m_2 удовлетворяют сравнению $m_1 m_2 \equiv b \pmod{q}$. Для известных $n_2 = q$, m_1 и m_2 значение n_1 определяется однозначно: $n_1 = \frac{b - m_1 m_2}{q}$. Ограничение $\max\{m_1, U\} \leq n_1$ равносильно неравенству

$$m_1 \leq \min \left\{ \frac{b}{m_2 + q}, \frac{b - Uq}{m_2} \right\} = h_q(m_2).$$

Применим лемму к функции h_q на интервале $(\alpha q, \beta q]$. Тогда получим

$$T[h_q] = S[h_q] + R[h_q] + O(b^{1+\varepsilon} U^{-1}),$$

где

$$S[h_q] = \frac{1}{q} \sum_{\alpha q < m_2 \leq \beta q} \mu_{q,b}(m_2) h_q(m_2),$$

$$R[h_q] \ll_\varepsilon (\Delta b^{1/3} + \Delta q U (b - Uq)^{-2/3} + q^{3/2} (b - Uq)^{-1/2}(b, q) + q^{1/2}) b^\varepsilon + q \delta_q(b).$$

Отсюда

$$T_2(b, U) = \sum_{q < b/U} T[h_q] = S_2(b, U) + R_2(b, U) + O_\varepsilon(b^{1/2+\varepsilon}), \quad (9)$$

где

$$S_2(b, U) = \sum_{q < b/U} S[h_q] = \sum_{q < b/U} \frac{1}{q} \sum_{\alpha q < m_2 \leq \beta q} \mu_{q,b}(m_1) h_q(m_1),$$

$$R_2(b, U) \ll \sum_{q < b/U} R[h_q] \ll_\varepsilon (b^{4/3} \Delta U^{-1} + b^2 U^{-5/2}) b^\varepsilon. \quad (10)$$

Складывая равенства (7) и (9), с учетом оценок (8) и (10) получаем асимптотическую формулу

$$T_{\alpha,\beta}(b) = S_1(b, U) + S_2(b, U) + O_\varepsilon \left((\beta b^{1/3} U + b^{4/3} \Delta U^{-1} + b^2 U^{-5/2} + U^{5/2} b^{-1/2} \alpha^{-3/2}) b^\varepsilon \right).$$

При $U = \frac{b}{[\beta^{1/2} b^{1/2} \Delta^{-1/2}] + \frac{1}{2}}$ она принимает вид

$$T_{\alpha,\beta}(b) = S_1(b, U) + S_2(b, U) + O_\varepsilon \left((b^{5/6} \Delta^{1/2} \beta^{1/2} + b^{3/4} \Delta^{-5/4} \beta^{5/2} + b^{3/4} \Delta^{5/4} \alpha^{-3/2} \beta^{-5/2}) b^\varepsilon \right).$$

Утверждение теоремы получается подстановкой последней формулы в (4) и (5). Главный член вычисляется так же, как и в работе [4]. При этом получается остаток $O_\varepsilon(b^{1/2+\varepsilon})$, который не превосходит уже имеющегося остаточного члена.

Первое следствие непосредственно вытекает из доказанной теоремы.

Для доказательства следствия 2 заметим, что $N_k = \Psi_{\alpha,\beta}^*(b)$ при $\alpha = 1/(k+1)$ и $\beta = 1/k$. Поэтому, подставляя эти параметры в утверждение теоремы ($\Delta = \frac{1}{k(k+1)} \asymp k^{-2}$), приходим к нужной асимптотической формуле.

Список литературы

- [1] В. А. Быковский, “Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2) , удовлетворяющих сравнению $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$ ”, *Записки научных семинаров ЛОМИ*, **112**, (1981), 5–25.
- [2] В. А. Быковский, А. В. Устинов, “Статистика траекторий частиц в неоднородной задаче Синая для двумерной решетки”, *Известия РАН*, **73**:4, (2009), 17–36.
- [3] А. В. Устинов, “О статистических свойствах конечных цепных дробей”, *Записки научн. семин. ЛОМИ*, **322**, (2005), 186–211.
- [4] А. В. Устинов, “О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod{q}$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20**:5, (2008), 186–216.
- [5] А. В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с выбором минимального по модулю остатка”, *Мат. заметки*, **85**:1, (2009), 153–156.
- [6] А. В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными”, *Мат. заметки*, **88**:4, (2010), 594–604.
- [7] А. В. Устинов, “О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Мат. сборник*, **200**:4, (2010), 131–160.
- [8] T. Estermann, “On Kloosterman’s sum”, *Mathematika*, **8**, (1961), 83–86.
- [9] G. Lochs, “Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmässigen Kettenbrüche”, *Monatsh. Math.*, **65**, (1961), 27–52.
- [10] H. Petersson, “Über eine Funktion von G. Lochs und die Diskriminante der elliptischen Funktionen”, *Monatsh. Math.*, **67**, (1963), 243–258.
- [11] J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1, (1975), 20–28.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 01 ноября 2010 г.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МД-2339.2010.1, фонда «Династия», фонда РФФИ, гранты № 09-01-12129офи-м, 10-01-98001-р-сибирь-а, 09-01-00371-а, проекта ДВО № 09-И-П4-03

Ustinov A. V. On Gauss — Kuz’min statistics in short intervals. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 1. P. 93–98.

ABSTRACT

The article is devoted to investigation of Gauss — Kuz’min statistics for rational numbers a/b , where b is fixed, $1 \leq a \leq b$, $(a, b) = 1$. New asymptotic formula for the mean value of Gauss — Kuz’min statistics is proved. It sharpens previous result which is similar to the Porter’s theorem.

Key words: *Euclidean algorithm, continued fractions, Kloosterman sums, Gauss — Kuz’min statistics.*