Геометрическое доказательство формулы Рёдсета для чисел Фробениуса

А. В. Устинов*

Посвящается 75-летию А. А. Карацубы

1 Введение

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа, взаимно простые в совокупности (наибольший общий делитель всех чисел равен 1). *Числом Фробениуса* $g(a_1, \ldots, a_n)$ называется наибольшее целое m, не представимое в виде

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = m, \tag{1}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — целые неотрицательные числа. *Модифицированное число Фробениуса*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) + a_1 + \ldots + a_n,$$

равно наибольшему целому m, не представимому в виде (1) с натуральными коэффициентами $x_1, \ldots, x_n$. Задача о нахождении $g(a_1, \ldots, a_n)$ (или $f(a_1, \ldots, a_n)$) называется *проблемой Фробениуса.*

При $n = 2$ известна формула приписываемая Сильвестру (см. [37], обсуждение истории вопроса см. в [31]): $f(a, b) = ab$. Если $n = 3$, то $f(a, b, c)$ находится с помощью цепных дробей (см. результаты Сельмера, Бейера и Рёдсета [32, 35]). Существуют и другие подходы к нахождению чисел Фробениуса с тремя аргументами (см. [31, глава 2], и более поздние результаты [20, 21]), однако с аналитической точки зрения наиболее удобной является формула Рёдсета (см. ниже). Она позволяет применить к исследованию чисел Фробениуса технику, используемую для изучения статистических свойств конечных цепных дробей (см., например, [6]). В частности, формула Рёдсета позволяет решить задачу Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса (то есть асимптотике в среднем, см. [13, задачи 1999-8, 2003-5], и [1]): $f(a, b, c) \sim \frac{8}{\pi}\sqrt{abc}$ (см. [7, 9]); в качестве следствия получить доказательство гипотезы Дейвисона из [17]: среднее значение нормированных чисел Фробениуса $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$ равно $8/\pi$; найти плотность распределения нормированных чисел Фробениуса (см. [8])

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, \sqrt{3}]; \\ \frac{12}{\pi}\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{4 - t^2}\right), & \text{если } t \in [\sqrt{3}, 2]; \\ \frac{12}{\pi^2}\left(t\sqrt{3}\arccos\frac{t + 3\sqrt{t^2 - 4}}{4\sqrt{t^2 - 3}} + \frac{3}{2}\sqrt{t^2 - 4}\log\frac{t^2 - 4}{t^2 - 3}\right), & \text{если } t \in [2, +\infty). \end{cases}$$

*Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МД-2339.2010.1, фонда «Династия», фонда РФФИ, гранты № 11-01-12004-офи-м-2011, 10-01-98001-р-сибирь-а, 09-01-00371-а, проекта ДВО № 09-I-П4-03

Существование этой плотности было установлено ранее Бургейном и Синаем в работе [2] (см. также [36]).

При $n \geqslant 4$ формулы для нахождения $f(a_1, \ldots, a_n)$ известны лишь для некоторых частных случаев, вероятно наиболее общим является результат о цепных последовательностях [4, 5]. Доказано, что для фиксированного n число Фробениуса можно вычислить за полиномиальное время (см. [26]), а при произвольном n нахождение $f(a_1, \ldots, a_n)$ становится NP-трудной задачей (см. [27]).

За последнее время ряд результатов о статистических свойствах чисел Фробениуса с произвольным числом аргументов был получен методами геометрии чисел (см. [11, 12]) и методами эргодической теории (см. [28, 29]); соответствующие экспериментальные данные можно найти в [3] и [29]. В связи с этим представляется интересным геометрическая интерпретация формулы Рёдсета, предлагаемая в настоящей статье. Можно надеяться, что она поспособствовует пониманию задачи и в большей размерности, когда ситуация становится существенно сложнее (см. [19]). Геометрическую интерпретацию цепных дробей для изучения чисел Фробениуса предлагалось использовать в статье [14], однако явные формулы там получены не были.

Представленное доказательство формулы Рёдсета использует несколько простых утверждений (см. свойства L-образных диаграмм и леммы 1–2), которые хорошо известны. Наряду с их короткими доказательствами (которые не оригинальны, а приведены лишь для удобства читателя) в статье даны ссылки на статьи, где эти утверждения независимо появлялись. Ссылки призваны проиллюстрировать связи между разными задачами и отчасти дополняют исторические комментарии из книги [31].

2 Двухконтурные сети

При нахождении числа Фробениуса $f(a, b, c)$ можно избавляться от общих делителей аргументов по формуле Джонсона из [25]

$$f(da, db, c) = df(a, b, c). \tag{2}$$

Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$.

Тройке (a, b, c) поставим в соответствие *двухконтурную сеть* — ориентированный граф с a вершинами 0, 1, 2, ..., $a-1$ и ребрами двух типов $j \to j+b \pmod a$ и $j \to j+c \pmod a$ с весами (длинами) w_b и w_c соответственно. Для решения задачи Фробениуса нужно выбрать $w_b = b$ и $w_c = c$ (ребра первого типа требуют для своего прохождения времени b, а второго типа — времени c). Каждому маршруту, который начинается в нулевой вершине и за время $t(x, y) = bx + cy$ проходит x ребер длины b и y ребер длины c, будем ставить в соответствие клетку $K(x, y)$ (координаты клетки — это координаты ее левого нижнего угла) с числом $n(x, y) = t(x, y) \pmod a$ — номером конечной вершины маршрута.

Для описания основных параметров двухконтурной сети (таких как диаметр, среднее расстояние между вершинами, длина кратчайшего цикла, ...) необходимо описание кратчайших маршрутов между вершинами. Из-за наличия очевидной симметрии, достаточно ограничиться маршрутами, начинающимися в нулевой вершине. Полное описание задается L-образной диаграммой (она имеет форму прямоугольника с вырезанным фрагментом в правой верхней части, см. рис. 2–4), которая строится с помощью следующего правила.

Моменты времени $t(x,y)$ $(x, y \geqslant 0)$ упорядочиваются в порядке возрастания $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j < \ldots$ и для каждого $t_j = t(x,y)$, при условии, что число $n(x,y)$ в диаграмме отсутствует, к диаграмме добавляется клетка $K(x,y)$ с числом $n(x,y)$; если можно добавить сразу несколько клеток, то добавляется клетка с наименьшей ординатой.

Другими словами, если число $n = n(x,y)$ записано в клетке $K(x,y)$, то кратчайший путь $0 \to n$ проходит через x ребер длины b и y ребер длины c. Поскольку $(a,b) = (a,c) = 1$, то каждая вершина графа достижима, и диаграмма (будем в дальнейшем обозначать её $\mathcal{L}$) состоит в точности из a клеток.

На рис. 1 изображена двухконтурная сеть, построенная по числам $a = 7$, $b = 3$, $c = 5$. Сплошные стрелки имеют длину $b = 3$, а пунктирные — длину $c = 5$. На рис. 2 внизу изображена соответствующая диаграмма $\mathcal{L}$, а наверху диаграмма с временами кратчайших маршрутов.

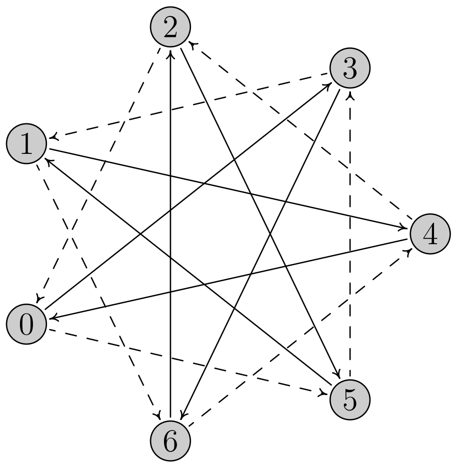


Рис. 1

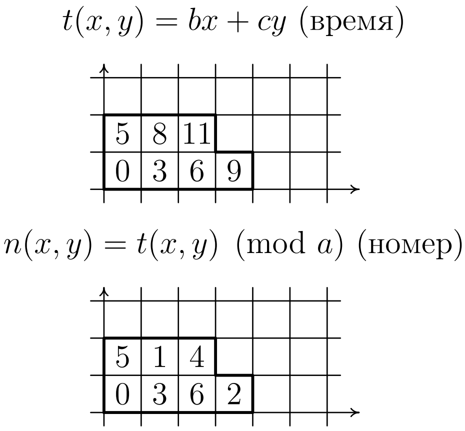


Рис. 2

Двухконтурные сети появились в работе [38] в связи с задачей о построении многомодульных структур памяти, и стали объектом интенсивного изучения, см. обзоры [23, 15, 24]. Однако еще раньше L-образные диаграммы возникли в связи с проблемой Фробениуса в [16] и неоднократно использовались разными авторами (см. [35, 32, 30, 33, 20, 21, 19, 14, 10]).

Перечислим простейшие свойства получающихся диаграмм.

1°. Если клетка $K(x,y)$ не лежит в диаграмме $\mathcal{L}$, то и все клетки из угла $\bigcup\limits_{u,v \geqslant 0} K(x+u, y+v)$ не лежат в $\mathcal{L}$.

2°. Если $K(x,y) \notin \mathcal{L}$, но $K(x-1,y) \in \mathcal{L}$, то число $n(x,y)$ встречается в первом столбце диаграммы $\mathcal{L}$.

3°. Если $K(x,y) \notin \mathcal{L}$, но $K(x,y-1) \in \mathcal{L}$, то число $n(x,y)$ встречается в первой строке диаграммы $\mathcal{L}$.

4°. Если $K(x,y) \notin \mathcal{L}$, но $K(x-1,y) \in \mathcal{L}$ и $K(x,y-1) \in \mathcal{L}$, то $n(x,y) = 0$.

Они вытекают из правила заполнения диаграммы.

Первое свойство равносильно тому, что если $K(x,y) \in \mathcal{L}$, то, для всех u, v в пределах $0 \leqslant u \leqslant x$, $0 \leqslant v \leqslant y$ клетки $K(x-u, y-v)$ лежат в $\mathcal{L}$.

Для проверки второго свойства предположим, что значение $n(x, y)$ встретилось в клетке $K(x', y') \in \mathcal{L}$, которая не стоит в первом столбце. Тогда $K(x-1, y)$, $K(x'-1, y') \in \mathcal{L}$, и $n(x-1, y) = n(x'-1, y')$, что противоречит правилу заполнения (числа не могут повторяться).

Третье свойство аналогично второму.

Четвертое свойство следует из второго и третьего: число $n(x, y)$ должно встречаться в первой строке и в первом столбце, то есть $n(x, y) = n(0, 0) = 0$.

Свойства построенной диаграммы тесно связаны со свойствами решетки

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : bx + cy \equiv 0 \pmod a\}.$$

Лемма 1. *Диаграмма, полученная в результате применения вышеописанного правила, имеет L-образную форму. Сдвиги $\mathcal{L}$ на векторы решетки Λ замощают всю плоскость. Стороны диаграммы однозначно определяются любыми двумя из тройки векторов (см. рис. 3) $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BG}$ ($\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BG}$). Координаты векторов $\overrightarrow{OD} = (x_0, y_0)$, $\overrightarrow{AF} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{BG} = (x_2, y_2)$ характеризуются следующими условиями.*

$\overrightarrow{OD}$: *x_0, $y_0 > 0$, $(x_0, y_0) \in \Lambda$, $t(x_0, y_0) = \min\limits_{\substack{x,y>0\\(x,y)\in\Lambda}} t(x, y)$; если минимальное значение формы $t(x, y)$ достигается в нескольких точках, то в качестве (x_0, y_0) выбирается точка с наименьшей ординатой.*

$\overrightarrow{AF}$: *x_1 — наименьшее натуральное число, для которого существует такое $y_1 \geqslant 0$, что $(x_1, -y_1) \in \Lambda$ и $t(0, y_1) < t(x_1, 0)$.*

$\overrightarrow{BG}$: *y_2 — наименьшее натуральное число, для которого существует такое $x_2 \geqslant 0$, что $(x_2, -y_2) \in \Lambda$ и $t(x_2, 0) \leqslant t(0, y_2)$.*

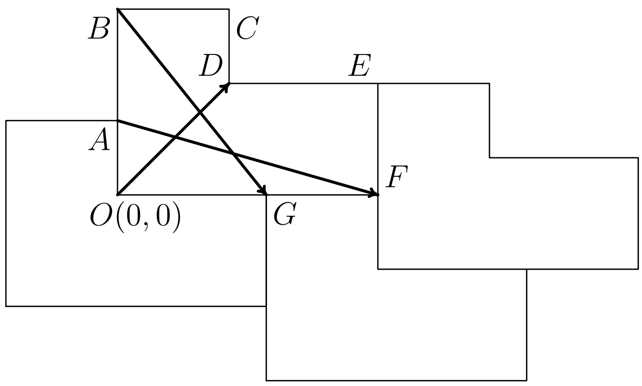


Рис. 3

Доказательство. (См. [22, 38, 34, 14, 10].) Согласно свойству 1°, диаграмма имеет вид «лестницы», состоящей из прямоугольных ступеней. По свойству 4° может существовать только одна клетка $K(x, y) \notin \mathcal{L}$, для которой $K(x-1, y) \in \mathcal{L}$ и $K(x, y-1) \in \mathcal{L}$. Действительно, если найдутся две такие клетки $K(x_1, y_1)$ и $K(x_2, y_2)$, то $n(x_1, y_1) = n(x_2, y_2) = 0$, значит, и $n(x_1 - 1, y_1) = n(x_2 - 1, y_2)$, а это противоречит предположению, что $K(x_1 - 1, y_1) \in \mathcal{L}$ и $K(x_2 - 1, y_2) \in \mathcal{L}$. Следовательно, «лестница» состоит не более чем из двух ступеней, и диаграмма имеет L-образную форму.

Каждое число от 0 до $a - 1$ входит в диаграмму ровно по одному разу. Поэтому перенося $\mathcal{L}$ на векторы решетки Λ получим замощение всей плоскости. Учитывая, что

$n(x_1, y_1) = n(x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \Lambda$, характеристические свойства векторов $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BG}$ следуют из свойств 2° и 3° соответственно. Характеристические свойства вектора $\overrightarrow{OD}$ следуют из правила заполнения диаграммы. $\square$

Замечание 1. В некоторых случаях L-образная диаграмма может вырождаться в прямоугольник. Поскольку площадь диаграммы равна a, вырожденный случай соответствует равенству $x_1 y_2 = a$. Отсюда, перемножая сравнения $bx_1 \equiv cy_1 \pmod{a}$, $cy_2 \equiv bx_2 \pmod{a}$, получаем, что $y_1 x_2 \equiv 0 \pmod{a}$. Но $0 \leqslant y_1 < y_2$, $0 \leqslant x_2 < x_1$, то есть $0 \leqslant y_1 x_2 < x_1 y_2 = a$. Значит, $y_1 x_2 = 0$. Если $y_1 = 0$, то $x_1 = a$, что возможно только при выполнении условия $b(a-1) \leqslant c$ $(t(a-1, 0) \leqslant t(0, 1))$. Если же $x_2 = 0$, то $y_2 = a$, что бывает только если $c(a-1) \leqslant b$ $(t(0, a-1) \leqslant t(1, 0))$. С точки зрения нахождения числа Фробениуса описанные случаи не представляют интереса, поскольку в первом $g(a, b, c) = g(a, b) = ab - a - b$, а во втором — $g(a, b, c) = g(a, c) = ac - a - c$.

Чтобы лемма 1 оставалась справедливой и в вырожденных случаях, нужно считать, что для прямоугольной диаграммы точка D определяется равенством $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BG}$. Тогда характеристическое свойство вектора $\overrightarrow{OD}$ будет следовать из явного вида векторов $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BG}$.

Лемма 2. *Пусть $C = (x_C, y_C)$, $E = (x_E, y_E)$. Тогда*

$$f(a, b, c) = \max\{t(x_C, y_C), t(x_E, y_E)\}.$$

Доказательство. (См. [16, 34, 14].) Для целых чисел n в пределах $0 \leqslant n \leqslant a-1$ определим функцию $t(n)$ как время достижения вершины n: $t(n(x, y)) = t(x, y)$ $(K(x, y) \in \mathcal{L})$. Диаметр двухконтурной сети выражается через координаты точек C и E:

$$D = \max_{0 \leqslant n \leqslant a-1} t(n) = \max_{K(x,y) \in \mathcal{L}} t(x, y) = \max\{t(x_C - 1, y_C - 1), t(x_E - 1, y_E - 1)\}.$$

Число $m \equiv n \pmod{a}$ $(0 \leqslant n < a)$ представимо в виде $m = bx + cy + az$ $(x,\ y,\ z \geqslant 0)$ тогда и только тогда, когда $m \geqslant t(n)$. Поэтому

$$g(a, b, c) = \max_{0 \leqslant n \leqslant a-1} t(n) - a = D - a = \max\{t(x_C, y_C), t(x_E, y_E)\} - a - b - c,$$

что равносильно утверждению леммы. $\square$

Замечание 2. Лемма 2 остается справедливой и при более слабом первоначальном предположении, что $(a, b, c) = 1$. При $(d, a) = 1$ два ориентированных графа с a вершинами и ребрами вида $j \to j + b \pmod{a}$, $j \to j + c \pmod{a}$ (в первом графе) и $j \to j + db \pmod{a}$ и $j \to j + dc \pmod{a}$ (во втором графе) изоморфны. Если сравнить диаметры соответствующих двухконтурных сетей и воспользоваться леммой 2, то получится формула Джонсона (2): $f(a, db, dc) = df(a, b, c)$.

3 Формула Рёдсета

Пусть a, b, c — натуральные числа, $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$ и l — решение сравнения $bl \equiv c \pmod{a}$, лежащее в пределах $1 \leqslant l \leqslant a$. Формула Рёдсета для $f(a, b, c)$ основана на разложении числа a/l в приведенную регулярную цепную дробь

$$\frac{a}{l} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots - \cfrac{1}{a_m}} \qquad (a_1, \ldots, a_m \geqslant 2).$$

Определим последовательности $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ $(0 \leqslant j \leqslant m+1)$ условиями

$$s_{m+1} = 0, s_m = 1, \quad q_0 = 0,\ q_1 = 1,$$
$$s_{j-1} = a_j s_j - s_{j+1}, \quad q_{j+1} = a_j q_j - q_{j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

Тогда (см. [32]) $s_0 = q_{m+1} = a$, $s_1 = l$, $q_m = l^{-1} \pmod a$, последовательность $\{s_j\}$ монотонно убывает, $\{q_j\}$ — монотонно возрастает и

$$0 = \frac{s_{m+1}}{q_{m+1}} < \frac{s_m}{q_m} < \ldots < \frac{s_1}{q_1} < \frac{s_0}{q_0} = \infty.$$

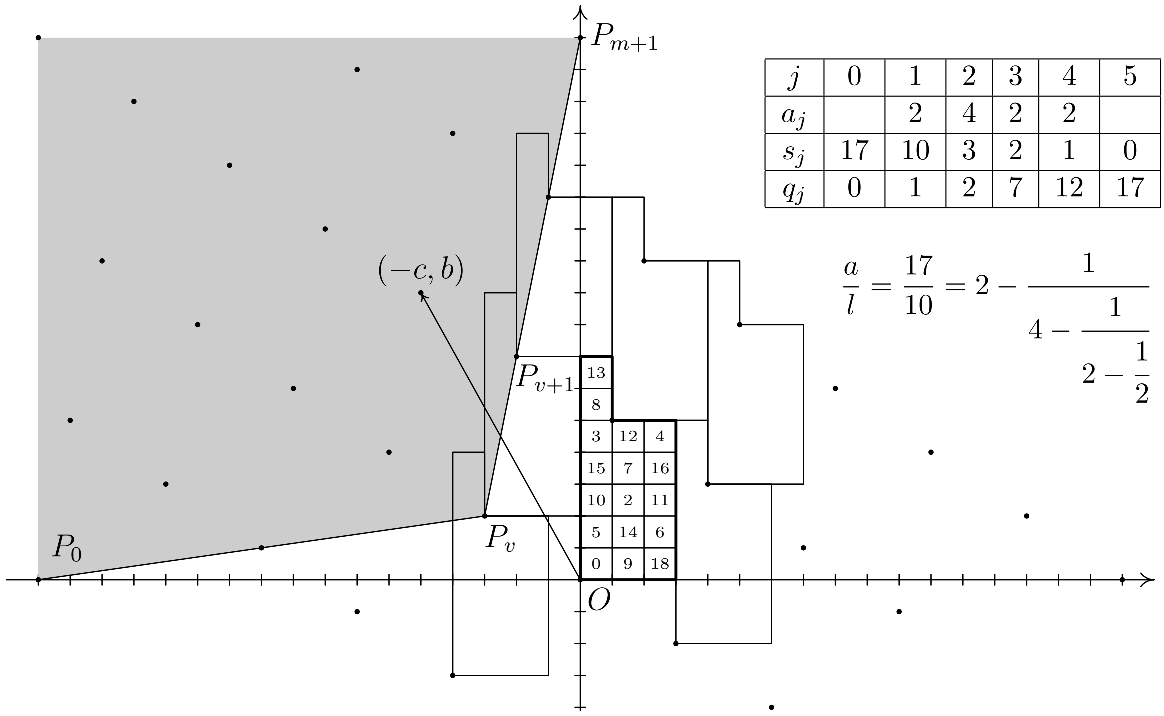
Значит, однозначно определен номер v, для которого $s_{v+1}/q_{v+1} \leqslant c/b < s_v/q_v$. Рёдсет доказал, что координаты точек C и E, определяющих стороны диаграммы $\mathcal{L}$ (см. рис. 3) имеют вид $C = (s_v - s_{v+1}, q_{v+1})$, $E = (s_v, q_{v+1} - q_v)$. В совокупности с леммой 2 это позволяет найти число Фробениуса $f(a,b,c)$.

Теорема 1 (Рёдсет, 1978)**.** *Справедлива формула*

$$f(a,b,c) = bs_v + cq_{v+1} - \min\{bs_{v+1}, cq_v\}.$$

Последовательности $\{s_j\}$, $\{q_j\}$ (см. [7]) имеют следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим выпуклые оболочки ненулевых точек решетки Λ, лежащих в I и II координатных четвертях. Границы этих оболочек будем называть парусами и обозначать Π_+ и Π_- соответственно. Точки $P_n = (q_n, s_n)$ $(0 \leqslant n \leqslant m+1)$ — это точки решетки Λ, лежащие на Π_-. При любом n $(1 \leqslant n \leqslant m+1)$ векторы $e_n = (q_n, s_n)$ и $e_{n-1} = (q_{n-1}, s_{n-1})$ образуют базис решетки Λ. Совокупность вершин парусов Π_+ и Π_+ описывается последовательностями, аналогичными $\{s_j\}$ и $\{q_j\}$, но построенным по разложению a/l в классическую цепную дробь. Векторы, соединяющие начало координат с вершинами Π_+ составляют Π_- и наоборот. В частности, точки $e_n - e_{n-1} = (q_n - q_{n-1}, s_n - s_{n-1})$ являются вершинами паруса Π_+.

На рисунке 4 изображен пример для $a = 17$, $b = 9$, $c = 5$ $(l = 10)$.



j	0	1	2	3	4	5
a_j		2	4	2	2	
s_j	17	10	3	2	1	0
q_j	0	1	2	7	12	17

$$\frac{a}{l} = \frac{17}{10} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2}}}$$

Рис. 4

4 Доказательство формулы Рёдсета

Лемма 3. *Пусть точка пересечения вектора $(-c, b)$ с парусом Π_- лежит на полуинтервале $(P_v, P_{v+1}]$ $(0 \leqslant v \leqslant m)$. Тогда векторы $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BG}$, определяющие форму L-образной диаграммы, имеют вид $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{P_vP_{v+1}}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{P_vO}$ и $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{P_{v+1}O}$, то есть*

$$\overrightarrow{OD} = (s_v - s_{v+1}, q_{v+1} - q_v), \quad \overrightarrow{AF} = (s_v, -q_v), \quad \overrightarrow{BG} = (s_{v+1}, -q_{v+1}).$$

Доказательство. Среди точек решетки Λ, лежащих строго внутри первой координатной четверти, точка $D(x_0, y_0)$ характеризуется тем, что линейная форма $t(x, y) = bx + cy$ в точке D принимает наименьшее возможное значение. (Если минимальное значение достигается сразу в нескольких точках, то, в соответствии с правилом, точка D выбирается так, чтобы ее ордината была как можно меньше.) Точка D должна лежать на парусе Π_+, значит, для некоторого номера j будет выполняться равенство $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{P_jP_{j+1}}$ $(0 \leqslant j \leqslant m)$. Условие минимальности формы $t(x, y)$ равносильно тому, что среди всех векторов вида $\overrightarrow{P_jP_{j+1}}$ нужно выбрать тот, проекция которого на вектор (b, c) имеет наибольшую длину. Это будет вектор $\overrightarrow{P_vP_{v+1}}$, поскольку двигаясь по парусу Π_+ снизу вверх, мы приходим в точку D вдоль вектора, который ниже $(-c, b)$ (на рис. 4 это вектор $\overrightarrow{OP_v}$), а выходим из нее вдоль вектора, который уже не ниже $(-c, b)$ (на рис. 4 это вектор $\overrightarrow{OP_{v+2}}$).

Условие $t(0, y_1) < t(x_1, 0)$ может быть переписано в виде $y_1/x_1 < b/c$. По лемме 1, для доказательства равенства $-\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OP_v}$ нужно проверить следующее утверждение: все точки решетки Λ, лежащие выше оси Ox, строго ниже луча $(-c, b)$ и отличные от P_v, лежат левее P_v. Для точек ниже луча OP_v это очевидно, а для точек внутри угла P_vOP_{v+1} следует из того, что они представимы в виде $x\overrightarrow{OP_v} + y\overrightarrow{OP_{v+1}}$, где $y \geqslant 0$

и $x \geqslant 1$ (последнее неравенство вытекает из того, что рассматриваемые точки лежат строго ниже вектора $(-c, b)$, а, значит, и строго ниже вектора $\overrightarrow{OP_{v+1}}$).

Аналогично для доказательства равенства $-\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OP_{v+1}}$ нужно проверить следующее: все точки решетки Λ, лежащие правее оси Oy, не ниже луча $(-c, b)$ и отличные от P_{v+1}, лежат выше P_{v+1}. Для точек правее луча OP_{v+1} это очевидно, а для точек внутри угла P_vOP_{v+1} следует из их представления в виде $x\overrightarrow{OP_v} + y\overrightarrow{OP_{v+1}}$, где $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 1$ (вектор $(-c, b)$ строго выше вектора $\overrightarrow{OP_v}$). □

Доказательство теоремы Рёдсета. По лемме 3 точки C и E имеют координаты $C = (s_v - s_{v+1}, q_{v+1})$, $C = (s_v, q_{v+1} - q_v)$. Подставляя их в лемму 2, получаем требуемую формулу для чисел Фробениуса.

Замечание 3. Формулы из леммы 3 позволяют описывать и другие диофантовы свойства тройки (a, b, c) (и соответствующие характеристики двухконтурной сети). Например, можно найти величину $N(a, b, c)$, которая при $(a, b, c) = 1$ равна количеству натуральных m не представимых в виде $m = ax + by + cz$, $(x, y, z \geqslant 0)$. Число $N(a, b, c)$ (его естественно было бы называть *числом Сильвестра*, так как задача [37] была посвящена именно нахождению $N(a, b)$) отвечает за среднее расстояние между вершинами двухконтурной сети (см. [34] и [31, теорема 5.3.1]). Как доказал Рёдсет, *модифицированное число Сильвестра*

$$S(a, b, c) = N(a, b, c) + \frac{a + b + c - 1}{2}$$

как и $f(a, b, c)$ удовлетворяет соотношению (см. [33, лемма 1])

$$S(da, db, c) = d \cdot S(a, b, c),$$

и при $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$ (см. [33, теорема 2])

$$2S(a, b, c) = bs_v + cq_{v+1} - s_{v+1}q_v(b(s_v - s_{v+1}) + c(q_{v+1} - q_v))/a.$$

Также получается, что на неотрицательных нетривиальных решений сравнения $bx + cy \equiv 0 \pmod{a}$ $(x, y \geqslant 0)$, наименьшее значение формы $t(x, y) = bx + cy$ (которое отвечает за длину кратчайшего цикла) равно $b(s_v - s_{v+1}) + c(q_{v+1} - q_v)$. Меняя между собой аргументы a, b, c, таким образом можно найти элементы *матрицы Джонсона*, которая также позволяет находить числа Фробениуса [25, теорема 4]. Она является более симметричным инструментом, чем формула Рёдсета, и удобна при использовании метода производящих функций (см. [18, 20, 21]).

Список литературы

[1] Арнольд В. И. *Экмпериментальное наблюдение математических фактов.* — М.: МЦНМО, 2006.

[2] Бургейн Ж., Синай Я. Г. Предельное поведение больших чисел Фробениуса. — *Успехи мат. наук*, **62**:4 (2007), 77—90.

[3] Воробьев И. С. Экспериментальное исследование проблемы Фробениуса для трех аргументов. — Дальневост. матем. журн., **11**:1 (2011), 3—9.

[4] Кан И. Д. К проблеме Фробениуса. — *ФПМ*, 1997, 3, 821–835.

[5] Кан И. Д. Проблема Фробениуса для классов полиномиальной разрешимости, — *Матем. заметки*, 70:6 (2001), 845–853.

[6] Устинов А. В. *Приложения сумм Клостермана в арифметике и геометрии.* — LAMBERT Academic Publishing, 2011.

[7] Устинов А. В. Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами. — *Мат. сборник*, **200**:4 (2009), 131–160.

[8] Устинов А. В. О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами. — *Известия РАН*, **74**:5 (2010), 145–170.

[9] Фроленков Д. А. Среднее значение чисел Фробениуса с тремя аргументами . — *Известия РАН. Серия математическая*, (в печати), arXiv:1103.5427v1.

[10] Aicardi F. On the geometry of the Frobenius problem. — *Funct. Anal. Other Math.*, 2009, 2, 111–127.

[11] Aliev I., Henk M. Integer knapsacks: average behavior of the Frobenius numbers. — *Mathematics of Operational Research* **34**: 3 (2009), 698–705.

[12] Aliev I., Henk M., Hinrichs A. Expected Frobenius numbers. — *Journal of Combinatorial Theory, series A*; **118**: 2 (2011), 525–531.

[13] Arnold V. *Arnold's Problems.* — Springer, 2005.

[14] Arnold V. I. Geometry of continued fractions associated with Frobenius numbers. — *Funct. Anal. Other Math.*, 2009, 2, 129–138.

[15] Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F. Distributed Loop Computer Networks: A Survey. — *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 1995, 24, 2–10

[16] Brauer A., Shockley J. E. On a problem of Frobenius. — *J. Reine Angew. Math.*, 1962, 211, 215–220.

[17] Davison J. L. On the linear Diophantine problem of Frobenius. — *J. Number Theory*, 48 (1994), 353–363.

[18] Denham G. Short generating functions for some semigroup algebras. — *Electron. J. Comb.*, 10 (2003), Research paper 36, 7 pages.

[19] Einstein D., Lichtblau D., Strzebonski A., Wagon S. Frobenius numbers by integer-linear programming *INTEGERS*, 2008.

[20] Fel L. G. Frobenius problem for semigroups $S(d_1, d_2, d_3)$. — *Funct. Anal. Other Math.*, 2006, 1 (2), 119–157.

[21] Fel L. G. Analytic representations in the three-dimensional Frobenius problem. — *Funct. Anal. Other Math.*, 2006, 2 (1), 27–44.

[22] Hofmeister G.R. Zu einem Problem von Frobenius. — *Norske Videnskabers Selskabs Skrifter*, 5 (1966), 1—37; *Math. Rev.* 34 (1967) # 5792.

[23] Hwang F. K. A survey on double loop networks. — *Reliability of computer and communication networks (New Brunswick, NJ, 1989), Amer. Math. Soc.*, 1991, 5, 143–151.

[24] Hwang F. K. A complementary survey on double-loop networks. — *Theoret. Comput. Sci.*, 2001, 263, 211–229.

[25] Johnson S. M. A linear diophantine problem. — *Canad. J. Math.*, 12 (1960), 390–398.

[26] Kannan R. Lattice Translates of a Polytope and the Frobenius Problem — *Combinatorica*, 12(2), 1992, 161–177.

[27] Karp R. M. Reducibility Among Combinatorial Problems — *Complexity of Computer Computations*, R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds, Plenum, New York, 1972, 85–103.

[28] Marklof J. The asymptotic distribution of Frobenius numbers — *Inventiones Mathematicae*, 2010, 181, 179–207.

[29] Marklof J., Strömbergsson A. Diameters of random circulant graphs. — ArXiv e-prints 1103.3152, 2011.

[30] Nijenhuis M. A minimal-path algorithm for the 'money changing problem'. — *Am. Math. Monthly* 86 (1979), 832–838. Correction in ibid., 87 (1980), 377.

[31] Ramirez Alfonsin J. L. *The Diophantine Frobenius problem.* — Oxford University Press, 2005.

[32] Rödseth Ö. J. On a linear Diophantine problem of Frobenius. — *J. Reine Angew. Math.*, 301 (1978), 171–178.

[33] Rödseth Ö. J. Weighted multi-connected loop networks. — *Discrete Math.*, 1996, 148, 161–173.

[34] Selmer E.S. On the linear Diophantine problem of Frobenius. — *J. Reine Angew. Math.*, 1977, 293/294, 1–17.

[35] Selmer E.S., Beyer O. On the linear diophantine problem of Frobenius in three variables. — *J. Reine Angewandte Math.*, 301 (1978), 161–170.

[36] Shchur V., Sinai Ya., Ustinov A. Limiting distribution of Frobenius numbers for $n = 3$. — *Journal of Number Theory*, **129** (2009), 11, 2778–2789.

[37] Sylvester J.J. Problem 7382. — *Educational Times* 37 (1884), 26; reprinted in: Mathematical questions with their solution, *Educational Times* (with additional papers and solutions) 41 (1884), 21.

[38] Wong C. K., Coppersmith D. A combinatorial problem related to multimodule memory organizations. — *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1974, 21, 392–402.