УДК 517.524, 511.622, 511.37, 517.958:530.145.86

А. В. Устинов

Спиновые цепочки и задача Арнольда о статистиках Гаусса — Кузьмина для квадратичных иррациональностей

В статье доказываются новые результаты, связанные с теоретико-числовой моделью спиновых цепочек. Решается задача Арнольда о статистиках Гаусса — Кузьмина для квадратичных иррациональностей.

Библиография: 24 названий.

Ключевые слова: цепные дроби, суммы Клостермана, квадратичные иррациональности.

§ 1. Введение

В работе [1] была предложена теоретико-числовая модель спиновых цепочек, основанная на рядах Фарея (дальнейшие результаты см. в [2, 3, 4]). В этой модели конечной цепочке из спинов, каждый из которых может быть направлен вверх "$\uparrow$" или вниз "$\downarrow$" ставится в соответствие произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

по правилу $\uparrow= A$, $\downarrow= B$. Например

$$\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow=\uparrow^3\downarrow^2\uparrow^4= A^3B^2A^4.$$

Энергией данной конфигурации называется величина

$$E(\uparrow^{a_1}\downarrow^{a_2}\uparrow^{a_3}\ldots)=\log\left(\mathrm{T}r\left(A^{a_1}B^{a_2}A^{a_3}\ldots\right)\right).$$

Пусть G — свободный мультипликативный моноид, порожденный матрицами A и B. С физической точки зрения представляет интерес асимптотическое поведение числа конфигураций с фиксированной энергией

$$\Phi(N)=\left|\left\{C\in G:\mathrm{T}r\,C=N\right\}\right|\qquad(N\geqslant 3)$$

и числа конфигураций, в которых энергия не превосходит заданной величины

$$\Psi(N)=\left|\left\{C\in G:3\leqslant\mathrm{T}r\,C\leqslant N\right\}\right|=\sum_{3\leqslant n\leqslant N}\Phi(n).$$

Работа выполнена при поддержке фонда «Династия» и фонда РФФИ, грант № 11-01-12004-офи-м-2011

В работе [1] была высказана гипотеза, утверждающая, что

$$\Phi(N) \sim \frac{N}{2}\log N, \tag{1.1}$$

в то же время в [3] была доказана асимптотическая формула

$$\Psi(N) = \frac{N^2\log N}{\zeta(2)} + O(N^2\log\log N). \tag{1.2}$$

Гипотеза (1.1) была опровергнута в работе [4]. Оказалось, что арифметическая функция $\Phi(N)(N\log N)^{-1}$ имеет гладкое предельное распределение. В статье [5] для величины $\Psi(N)$ была получена двучленная асимптотическая формула

$$\Psi(N) = N^2(c_1\log N + c_0) + O_\varepsilon\left(N^{\frac{7}{4}+\varepsilon}\right), \tag{1.3}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\zeta(2)}, \quad c_0 = \frac{1}{\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right).$$

Задачи об асимптотическом поведении функций $\Phi(N)$ и $\Psi(N)$ тесно связаны с распределением квадратичных иррациональностей и соответствующих им замкнутых геодезических на модулярной поверхности (см. [6, 5]). Для приведенной квадратичной иррациональности ω (имеющей чисто периодическое представление в виде цепной дроби) через $\rho(\omega)$ будем обозначать длину, которая определяется как длина соответствующей замкнутой геодезической. В статье [6] было доказано, что

$$\sum_{\rho(\omega)<x} 1 \sim \frac{e^x\log 2}{2\zeta(2)} \tag{1.4}$$

С помощью соответствия между приведенными квадратичными иррациональностями и конечными произведениями матриц A и B (см. [3]) в работе [5] была получена асимптотическая формула с явной оценкой остаточного члена

$$\sum_{\rho(\omega)<x} 1 = \frac{e^x\log 2}{2\zeta(2)} + O_\varepsilon\left(e^{(\frac{7}{8}+\varepsilon)x}\right). \tag{1.5}$$

В настоящей статье доказывается асимптотическая формула

$$\Psi(N) = N^2(c_1\log N + c_0) + O(N^{3/2}\log^4 N), \tag{1.6}$$

уточняющая равенство (1.3). В качестве следствия промежуточных результатов получается формула, уточняющая (1.5):

$$\sum_{\rho(\omega)<x} 1 = \frac{e^x\log 2}{2\zeta(2)} + O\left(x^4 e^{\frac{3}{4}x}\right).$$

Равенство (1.6) является частным случаем более общего результата о статистиках Гаусса — Кузьмина для спиновых цепочек (см. теоремы 1, 2). В качестве еще одного следствия этого результата получается решение задачи

Арнольда (см. [7; задача 1993–11]) о статистических свойствах неполных частных квадратичных иррациональностей. Пусть $x, y \in [0,1]$ — действительные числа и

$$r(x,y;N) = \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{R}\\ \varepsilon_0(\omega)\leqslant N}} [\omega \leqslant x,\ -1/\omega^* \leqslant y].$$

Здесь $\mathcal{R}$ — множество приведенных квадратичных иррациональностей, $\varepsilon_0(\omega)$ — фундаментальное решение уравнения Пелля

$$X^2 - \Delta Y^2 = 4,$$

$\Delta = B^2 - 4AC$, где $AX^2 + BX + C$ — минимальный многочлен ω, ω^* — сопряженное с ω число, $[A]$ означает 1, если утверждение A истинно, и 0 в противном случае. Тогда (см. теорему 3)

$$r(x,y;N) = \frac{\log(1+xy)}{2\zeta(2)} N^2 + O(N^{3/2}\log^4 N).$$

То есть статистики Гаусса — Кузьмина для квадратичных иррациональностей описываются той же функцией распределения $\log_2(1+xy)$ и соответствующей ей плотностью

$$\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{1}{(1+xy)^2},$$

что и статистики Гаусса — Кузьмина для рациональных и почти всех действительных чисел.

Доказательства теорем будут основаны на подходе, предложенном в работе [5].

Автор благодарит рецензента за указания на неточности в первоначальной версии статьи.

§ 2. Применение оценок сумм Клостермана

Основным инструментом для решения задач, сводящихся к распределению решений сравнения $xy \equiv \pm 1 \pmod q$ является следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть q — натуральное число, $0 \leqslant P_1, P_2 \leqslant q$. Тогда (при любом выборе знака в символе “$\pm$”)*

$$\sum_{0<x\leqslant P_1}\sum_{0<y\leqslant P_2} \delta_q(xy\pm 1) = \frac{\varphi(q)}{q^2}P_1P_2 + O(\psi_1(q)), \tag{2.1}$$

где $\psi_1(q) = \sigma_0(q)\log^2(q+1)q^{1/2}$.

Доказательство см., например, в [8].

Аналогичным образом может быть доказана асимптотическая формула для числа решений сравнения $xy \equiv \pm 1 \pmod q$ под графиком простейшей линейной функции.

Лемма 2.2. *Пусть q — натуральное число, $0 \leqslant P_1, P_2 \leqslant q$, a — целое и $f(x) = a \pm x$ — линейная функция, для которой $0 \leqslant f(P_1),\ f(P_2) \leqslant q$. Тогда для суммы*

$$S_f(P_1, P_2) = \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \sum_{0 < y \leqslant f(x)} \delta_q(xy \pm 1)$$

при любом выборе знака в символе "$\pm$" справедлива асимптотическая формула

$$S_f(P_1, P_2) = \frac{\varphi(q)}{q^2} \int\limits_{P_1}^{P_2} f(x)dx + O(\psi_2(q)),$$

где $\psi_2(q) = \sigma_0(q) \log(q+1)(\sigma_0(q) + \log(q+1))q^{1/2}$.

Доказательство. Будем предполагать, что $f(x) = a + x$. В случае, когда $f(x) = a - x$ доказательство проводится аналогично. Разложим функцию

$$F(x, y) = [P_1 < x \leqslant P_2,\ 0 < y \leqslant f(x)]$$

в конечный ряд Фурье

$$F(x, y) = \sum_{-q/2 < m, n \leqslant q/2} \widehat{F}(m, n) e^{2\pi i \frac{mx+ny}{q}}$$

с коэффициентами Фурье

$$\widehat{F}(m, n) = \frac{1}{q^2} \sum_{x,y=1}^{q} F(x, y) e^{-2\pi i \frac{mx+ny}{q}}.$$

Тогда данная сумма может быть переписана в виде

$$S_f(P_1, P_2) = \sum_{x,y=1}^{q} F(x, y)\delta_q(xy \pm 1) = \sum_{-q/2 < m, n \leqslant q/2} \widehat{F}(m, n) K_q(m, \mp n),$$

где

$$K_q(m, n) = \sum_{x,y=1}^{q} \delta_q(xy - 1) e^{2\pi i \frac{mx+ny}{q}}$$

— суммы Клостермана. Выделяя слагаемое с $m = n = 0$, получаем равенство

$$S_f(P_1, P_2) = \frac{\varphi(q)}{q^2} \int\limits_{P_1}^{P_2} f(x)dx + O(1) + R, \tag{2.2}$$

где

$$R = \sum_{-q/2 < m, n \leqslant q/2}{}' \widehat{F}(m, n) K_q(m, \mp n).$$

Здесь и далее штрих в суммах означает, что пропускается слагаемое, в котором все переменные суммирования равны нулю.

Пользуясь оценкой сумм Клостермана (см. [9])

$$|K_q(m,n)| \leqslant \sigma_0(q)(q,m,n)^{1/2}q^{1/2},$$

для остатка R получаем неравенства

$$|R| \leqslant \sigma_0(q)q^{1/2} \sideset{}{'}\sum_{-q/2<m,n\leqslant q/2} \widehat{F}(m,n)(q,m,n)^{1/2} \leqslant \sigma_0(q)q^{1/2}(R_1+R_2+R_3+R_4), \tag{2.3}$$

где

$$R_1 = \sideset{}{'}\sum_{-q/2<m\leqslant q/2} |\widehat{F}(m,0)|(m,q), \qquad R_2 = \sideset{}{'}\sum_{-q/2<n\leqslant q/2} |\widehat{F}(0,n)|(n,q),$$

$$R_3 = \sideset{}{'}\sum_{-q/2<m\leqslant q/2} |\widehat{F}(m,-m)|(m,q), \quad R_4 = \sideset{}{'}\sum_{-q/2<m\leqslant q/2} \sideset{}{'}\sum_{\substack{-q/2<n\leqslant q/2\\ m+n\neq 0,q}} |\widehat{F}(m,n)|(n,m,q)^{1/2}.$$

Оценим коэффициенты Фурье функции F. Если $n=0$, то

$$\widehat{F}(m,0) = \frac{1}{q^2}\sum_{P_1<x\leqslant P_2}(a+x)e^{-2\pi i\frac{mx}{q}},$$

$$\left|\sum_{P_1<x\leqslant P_2} e^{-2\pi i\frac{mx}{q}}\right| = \left|\frac{e^{-2\pi i\frac{m(P_2-P_1)}{q}}-1}{e^{-2\pi i\frac{m}{q}}-1}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi m}{q}\right|} \leqslant \frac{q}{|m|},$$

$$\left|\sum_{0<x\leqslant P} xe^{-2\pi i\frac{mx}{q}}\right| = \left|\frac{Pe^{-2\pi i\frac{m(P+1)}{q}}}{e^{-2\pi i\frac{m}{q}}-1} - \frac{e^{-2\pi i\frac{m}{q}}(e^{-2\pi i\frac{mP}{q}}-1)}{(e^{-2\pi i\frac{m}{q}}-1)^2}\right| \leqslant \frac{Pq}{|m|}+\frac{q^2}{|m|^2} \ll \frac{q^2}{|m|},$$

$$R_1 \ll \sum_{m=1}^{q}\frac{(m,q)}{m} \leqslant \sum_{d|q} d\sum_{\substack{m=1\\ d|m}}^{q}\frac{1}{m} \ll \sigma_0(q)\log(q+1).$$

Если $n\neq 0$, то

$$\widehat{F}(m,n) = \frac{1}{q^2}\cdot\frac{e^{-2\pi i\frac{n}{q}}}{e^{-2\pi i\frac{n}{q}}-1}\left(e^{-2\pi i\frac{na}{q}}\sum_{P_1<x\leqslant P_2} e^{-2\pi i\frac{(m+n)x}{q}} - \sum_{P_1<x\leqslant P_2} e^{-2\pi i\frac{mx}{q}}\right). \tag{2.4}$$

Поэтому при $m=0$

$$\widehat{F}(0,n) \ll \frac{1}{q^2}\cdot\frac{q}{|n|}\left(\frac{q}{|n|}+q\right) \ll \frac{1}{|n|},$$

и остаток R_2 оценивается так же, как и остаток R_1:

$$R_2 \ll \sum_{n=1}^{q}\frac{(n,q)}{n} \ll \sigma_0(q)\log(q+1).$$

Если $m+n=0$ и $m\neq 0$, то, по формуле (2.4),

$$|\widehat{F}(m,-m)| \ll \frac{1}{q^2}\cdot\frac{q}{|m|}\left(q+\frac{q}{|m|}\right) \ll \frac{1}{|m|}.$$

Следовательно, для остатка R_3 получается та же оценка:

$$R_3 \ll \sum_{m=1}^{q} \frac{(m,q)}{m} \ll \sigma_0(q)\log(q+1).$$

В оставшихся случаях ($m \neq 0$, $n \neq 0$, $m+n \neq 0, q$) по формуле (2.4)

$$|\widehat{F}(m,n)| \leqslant \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi n}{q}\right|} \left(\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi(m+n)}{q}\right|} + \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi m}{q}\right|} \right) \ll$$
$$\ll \frac{1}{|n|}\left(\frac{1}{|m+n|} + \frac{1}{|q-m-n|} + \frac{1}{|q+m+n|} + \frac{1}{|m|} \right).$$

В частности, если m и n имеют разные знаки, то

$$|\widehat{F}(m,n)| \ll \frac{1}{|n| \cdot |m-n|},$$

а если одинаковые, — то

$$|\widehat{F}(m,n)| \ll \frac{1}{|n|}\left(\frac{1}{q-|m|-|n|} + \frac{1}{|m|} \right).$$

Поэтому $R_4 \ll R_{4,1} + R_{4,2}$, где

$$R_{4,1} = \sum_{\substack{m,n \leqslant q/2 \\ m \neq n}} \frac{(m,n,q)^{1/2}}{n \cdot |m-n|}, \qquad R_{4,2} = \sum_{\substack{m,n \leqslant q/2 \\ m+n \neq q}} \frac{(m,n,q)^{1/2}}{n}\left(\frac{1}{q-m-n} + \frac{1}{m} \right).$$

Вводя переменные $d = (m,n,q)$, $m_1 = md^{-1}$, $n_1 = nd^{-1}$, для первой суммы получаем оценку

$$R_{4,1} \ll \sum_{d|q} d^{1/2} \sum_{\substack{m,n \leqslant q/2 \\ m \neq n, d|(m,n)}} \frac{1}{n \cdot |m-n|} \ll \sum_{d|q} \frac{1}{d^{3/2}} \sum_{\substack{m_1,n_1 \leqslant q \\ m_1 \neq n_1}} \frac{1}{n_1 \cdot |m_1-n_1|} \ll$$
$$\ll \sum_{\substack{m_1,n_1 \leqslant q \\ m_1 \neq n_1}} \frac{1}{n_1 \cdot |m_1-n_1|} \ll \log^2(q+1).$$

Вторая сумма оценивается аналогично первой:

$$R_{4,2} \ll \sum_{d|q} d^{1/2} \sum_{\substack{m,n \leqslant q/2 \\ m+n \neq q, d|(m,n)}} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{q-m-n} + \frac{1}{m} \right) \ll$$
$$\ll \sum_{d|q} \frac{1}{d^{3/2}} \sum_{\substack{m_1,n_1 \leqslant q/(2d) \\ m_1+n_1 \neq q/d}} \frac{1}{n_1}\left(\frac{1}{q/d-m_1-n_1} + \frac{1}{m_1} \right) \ll$$
$$\ll \sum_{\substack{m_1,n_1 \leqslant q/(2d) \\ m_1+n_1 \neq q/d}} \frac{1}{n_1}\left(\frac{1}{q/d-m_1-n_1} + \frac{1}{m_1} \right) \ll \log^2(q+1).$$

Значит, $R_4 \ll \log^2(q+1)$.

Подставляя оценки остатков R_1, R_2, R_3, R_4 в формулу (2.3), приходим к соотношению

$$R \ll \sigma_0(q)\log(q+1)(\sigma_0(q)+\log(q+1))q^{1/2} = \psi_2(q),$$

что с учетом равенства (2.2) приводит к утверждению леммы.

§ 3. Спиновые цепочки и цепные дроби

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(S) & p'(S) \\ q(S) & q'(S) \end{pmatrix}$$

с определителем ± 1, у которых

$$1 \leqslant q \leqslant q', \quad 0 \leqslant p \leqslant q, \quad 1 \leqslant p' \leqslant q'.$$

Оно разбивается на два непересекающихся множества $\mathcal{M}_+$ и $\mathcal{M}_-$, состоящее из матриц с определителями $+1$ и -1 соответственно. Элементы множества $\mathcal{M}$ образуют полугруппу по умножению и находятся во взаимно однозначном соответствии с (непустыми) наборами натуральных чисел, которое строится по правилу (см. [10])

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Обратное отображение строится исходя из равенств

$$\frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_{n-1}], \qquad \frac{p'}{q'} = [0; a_1, \ldots, a_n],$$
$$\frac{p}{p'} = [0; a_n, \ldots, a_2], \qquad \frac{q}{q'} = [0; a_n, \ldots, a_1].$$

Как и в статьях [5, 3], для вычисления функции $\Psi(N)$ будем отдельно рассматривать произведение матриц $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ четной и нечетной длины. Для определенности будем предполагать, что произведения начинаются с матрицы B. Следуя обозначениям работы [5], определим множества

$$W_{ev}(N) = \big\{(a_1, \ldots, a_{2m}) \in \mathbb{N}^{2m} : \ m \geqslant 1,\ \mathrm{Tr}(B^{a_1}A^{a_2}\ldots B^{a_{2m-1}}A^{a_{2m}}) \leqslant N\big\},$$
$$W_{odd}(N) = \big\{(a_1, \ldots, a_{2m+1}) \in \mathbb{N}^{2m+1} : \ m \geqslant 1,\ \mathrm{Tr}(B^{a_1}A^{a_2}\ldots A^{a_{2m}}B^{a_{2m+1}}) \leqslant N\big\}.$$

Набору натуральных чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ будем ставить в соответствие цепную дробь $[0; a_1, \ldots, a_n]$ и последовательность подходящих дробей $p_k/q_k = [0; a_1, \ldots, a_k]$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Из свойств цепных дробей следуют равенства

$$JB^{a_1}A^{a_2}\ldots B^{a_{2m-1}}A^{a_{2m}}J = J\begin{pmatrix} q_{2m} & q_{2m-1} \\ p_{2m} & p_{2m-1} \end{pmatrix}J = \begin{pmatrix} p_{2m-1} & p_{2m} \\ q_{2m-1} & q_{2m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_+,$$

$$JB^{a_1}A^{a_2}\ldots A^{a_{2m}}B^{a_{2m+1}} = J\begin{pmatrix} q_{2m} & q_{2m+1} \\ p_{2m} & p_{2m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{2m} & p_{2m+1} \\ q_{2m} & q_{2m+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_-,$$

где $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Поэтому величины

$$\Psi_{ev}(N) = |W_{ev}(N)|, \quad \Psi_{odd}(N) = |W_{odd}(N)|$$

можно также определять с помощью равенств

$$\Psi_{ev}(N) = \left|\left\{S \in \mathcal{M}_+ : \mathrm{T}r(S) = p(S) + q'(S) \leqslant N\right\}\right|$$
$$\Psi_{odd}(N) = \left|\left\{S \in \mathcal{M}_- : \ p(S) > 0,\, p'(S) + q(S) \leqslant N\right\}\right|.$$

При этом, согласно предположению, что рассматриваются только произведения, начинающиеся с матрицы B,

$$\Psi(N) = 2\bigl(\Psi_{ev}(N) + \Psi_{odd}(N)\bigr).$$

Для описания поведения неполных частных в цепных дробях для действительных чисел удобно использовать меру (см. [11])

$$d\lambda = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{du\,dv}{(1+uv)^2}.$$

Пусть действительное число $\alpha \in [0,1]$ задано бесконечной цепной дробью $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, и $p_n(\alpha)/q_n(\alpha) = [0; a_1, \ldots, a_n]$, $r_n(\alpha) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$. Тогда $\alpha = [0; a_1, \ldots, a_n + r_n(\alpha)]$, $q_{n-1}(\alpha)/q_n(\alpha) = [0; a_n, \ldots, a_1]$, и поведение элементов цепной дроби вблизи номера n в среднем описывается функцией (статистикой Гаусса — Кузьмина, понимаемой в широком смысле)

$$F_n(x,y) = \int\limits_0^1 [r_n(\alpha) \leqslant x,\ q_{n-1}(\alpha)/q_n(\alpha) \leqslant y]\,d\alpha.$$

При этом

$$F_n(x,y) \to \log_2(1+xy) = \frac{1}{\log 2} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{du\,dv}{(1+uv)^2} \qquad (n \to \infty).$$

В частности, при $y = 1$ мы имеем дело с мерой Гаусса

$$d\mu = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{du}{1+u}$$

и соответствующей ей функцией распределения $\log_2(1+x)$.

Рассматриваемая модель спиновых цепочек тесно связана с цепными дробями. Поэтому для описания свойств типичных конфигураций естественно ввести характеристики, аналогичные статистикам Гаусса — Кузьмина. Они будут характеризовать локальные свойства спиновых конфигураций.

Для действительных $x, y \in [0,1]$ положим

$$W_{ev}(x,y;N) = \left\{ \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_+ :\ p' \leqslant xq',\, q \leqslant yq',\, p + q' \leqslant N \right\}.$$

$$W_{odd}(x,y;N) = \left\{ \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_- :\ p > 0,\, p' \leqslant xq',\, q \leqslant yq',\, p' + q \leqslant N \right\}.$$

$$\Psi_{ev}(x,y;N)=|W_{ev}(x,y;N)|,\quad \Psi_{odd}(x,y;N)=|W_{odd}(x,y;N)|.$$

В частности $\Psi_{ev}(1,1;N)=\Psi_{ev}(N)$, $\Psi_{odd}(1,1;N)=\Psi_{odd}(N)$.

Арнольд высказал гипотезу (см. [7; задача 1993–11]), согласно которой у рациональных чисел и у квадратичных иррациональностей неполные частные в среднем ведут себя так же как и у почти всех действительных чисел. Для рациональных чисел в простейшем случае, когда усреднение происходит по дробям a/b, $1\leqslant a\leqslant b\leqslant R$ $(R\to\infty)$ это утверждение было доказано Лохсом (см. [12]). В случае, когда усреднения происходят по точкам сектора $1\leqslant a\leqslant b$, $a^2+b^2\leqslant R^2$ $(R\to\infty)$, как это предлагалось сделать в оригинальной постановке задачи, гипотеза была доказана Авдеевой и Быковским (см. [13, 14], а также [15, 8]). Знание статистик Гаусса — Кузьмина для конечных цепных дробей позволило решить задачу Синая о статистических свойствах траекторий частиц в двумерных кристаллических решётках (см. [16]), получить новые результаты о поведении в среднем различных вариантов алгоритма Евклида (см. [17, 18]) и найти плотность распределения нормированных чисел Фробениуса с тремя аргументами (см. [19]).

Оказывается, что величины $\Psi_{ev}(x,y;N)$ и $\Psi_{odd}(x,y;N)$ как функции x,y демонстрируют принципиально разное поведение. Четные цепочки (как и рациональные числа в задаче Арнольда) удовлетворяют закону Гаусса — Кузьмина, а нечетные — нет.

Связь поведения функции $\Psi_{ev}(N)$ с распределением квадратичных иррациональностей, отмеченная в работах [5, 3] позволяет доказать гипотезу Арнольда для квадратичных иррациональностей и уточнить асимптотическую формулу (1.5).

§ 4. Спиновые цепочки и статистики Гаусса — Кузьмина

Теорема 1. *Пусть $0\leqslant x,y\leqslant 1$, $N\geqslant 2$. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\Psi_{ev}(x,y;N)=\frac{\log(1+xy)}{2\zeta(2)}N^2+O(N^{3/2}\log^4 N) \tag{4.1}$$

с абсолютной константой в остаточном члене.

Доказательство. Преобразуем данную величину

$$\begin{aligned}\Psi_{ev}(x,y;N)&=\sum_{\left(\begin{smallmatrix} t & u\\ v & q\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}_+}[u\leqslant xq,\ v\leqslant yq,\ t+q\leqslant N]=\\ &=\sum_{u\leqslant xN}\sum_{q\geqslant u/x}\sum_{t\leqslant yu+1/q}\delta_u(tq-1)[t+q\leqslant N].\end{aligned} \tag{4.2}$$

Существует не более одного значения переменной t, лежащего в пределах $yu < t \leqslant yu + 1/q$. Поэтому при $t_y(u) = \lceil yu \rceil$

$$\sum_{u\leqslant xN}\sum_{q\geqslant u/x}\sum_{yu<t\leqslant yu+1/q}\delta_u(tq-1)[t+q\leqslant N] \ll$$
$$\ll \sum_{u\leqslant N}\sum_{q\leqslant N}\delta_u(t_y(u)q-1) \ll \sum_{u\leqslant N}\frac{N}{u} \ll N^{1+\varepsilon}.$$

Значит, сумму $\Psi_{ev}(x,y;N)$ можно записать в виде

$$\Psi_{ev}(x,y;N) = \sum_{u\leqslant xN}\sum_{t\leqslant yu}\sum_{q\geqslant u/x}\delta_u(tq-1)[t+q\leqslant N] + O(N). \tag{4.3}$$

Из равенства

$$\sum_{y=1}^{Y}\delta_q(xy-1) \ll \frac{Y}{q}+1$$

следует, что величина $\Psi_{ev}(x,y;N)$ допускает оценку

$$\Psi_{ev}(x,y;N) \ll \sum_{u\leqslant N}\sum_{t\leqslant yu}\sum_{q\leqslant N}\delta_u(tq-1) \ll \sum_{u\leqslant N} yu\frac{N}{u} \ll yN^2.$$

В силу симметричности $\Psi_{ev}(x,y;N)$ относительно x и y, будет также выполняться оценка

$$\Psi_{ev}(x,y;N) \ll xN^2.$$

Поэтому при $\min\{x,y\} \leqslant N^{-1/2}$

$$\Psi_{ev}(x,y;N) \ll N^{3/2}, \qquad \log(1+xy)N^2 \ll N^{3/2}$$

и формула (4.1) верна. Значит достаточно проверить справедливость равенства (4.1) в предположении, что $x \geqslant N^{-1/2}$. В формуле (4.3) к внутренней двойной сумме применим леммы 2.1 и 2.2. С учетом формулы (см. [20; гл. II, зад. 19])

$$\sum_{x=1}^{q}\sum_{y=1}^{Y}\delta_q(xy-1) = {\sum_{y=1}^{Y}}^{*} 1 = \frac{\varphi(q)}{q}Y + O(\sigma_0(q))$$

(здесь и далее знак звездочки означает, что переменная суммирования пробегает приведенную систему вычетов) получим равенство

$$\Psi_{ev}(x,y;N) = \sum_{u\leqslant xN}\left(\frac{\varphi(u)}{u^2}\int\limits_0^{yu}dt\int\limits_{u/x}^{\infty}[t+q\leqslant N]dq + O\Big(\frac{N}{u}\sigma_0(u)+\psi_2(u)\Big)\right) + O(N).$$

Из стандартных оценок

$$\sum_{u\leqslant M}\sigma_0(u) \ll M\log(M+1), \qquad \sum_{u\leqslant M}\sigma_0^2(u) \ll M\log^3(M+1)$$

следует, что

$$\Psi_{ev}(x,y;N)=\sum_{u\leqslant N/x}\frac{\varphi(u)}{u^2}\int\limits_0^{yu}dt\int\limits_{u/x}^{\infty}[t+q\leqslant N]dq+O\Big(N^{3/2}\log^4 N\Big).$$

Применяя тождество ($u=\delta u_1$)

$$\sum_{u\leqslant M}\frac{\varphi(u)}{u^2}f(u)=\sum_{\delta\leqslant M}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\sum_{u_1\leqslant M/\delta}\frac{f(\delta u_1)}{u_1} \tag{4.4}$$

и вводя переменные $\alpha=t/u=t/(\delta u_1)$, $\beta=q/u=q/(\delta u_1)$, приходим к асимптотической формуле

$$\Psi_{ev}(x,y;N)=\sum_{\delta\leqslant N}\mu(\delta)S(N/\delta)+O(N^{3/2}\log^4 N), \tag{4.5}$$

где

$$S(N)=\sum_{u\leqslant xN}u\int\limits_0^{y}d\alpha\int\limits_{1/x}^{\infty}[\alpha+\beta\leqslant Nu^{-1}]d\beta.$$

Представим сумму $S(N)$ в виде

$$S(N)=S_1(N)+S_2(N),$$

где

$$S_1(N)=\sum_{u\leqslant\frac{xN}{xy+1}}u\int\limits_0^{y}d\alpha\int\limits_{1/x}^{Nu^{-1}-\alpha}d\beta,$$

$$S_2(N)=\sum_{\frac{xN}{xy+1}<u\leqslant xN}u\int\limits_0^{Nu^{-1}-1/x}d\alpha\int\limits_{1/x}^{Nu^{-1}-\alpha}d\beta.$$

После вычисления интегралов

$$\int\limits_0^{y}d\alpha\int\limits_{1/x}^{Nu^{-1}-\alpha}d\beta=\Big(\frac{N}{u}-\frac{1}{x}\Big)y-\frac{y^2}{2},\qquad \int\limits_0^{Nu^{-1}-1/x}d\alpha\int\limits_{1/x}^{Nu^{-1}-\alpha}d\beta=\frac{1}{2}\Big(\frac{N}{u}-\frac{1}{x}\Big)^2$$

приходим к асимптотическим формулам

$$\begin{aligned}S_1(N)&=\frac{xy(3xy+2)}{4(xy+1)^2}N^2+O(N),\\ S_2(N)&=\frac{\log(xy+1)}{2}N^2-\frac{xy(3xy+2)}{4(xy+1)^2}N^2+O\Big(\frac{N}{x}\Big),\\ S(N)&=\frac{\log(xy+1)}{2}N^2+O\Big(\frac{N}{x}\Big).\end{aligned}$$

Согласно предположению, $x\geqslant N^{-1/2}$, следовательно $Nx^{-1}\ll N^{3/2}$. Поэтому, подставляя асимптотическую формулу для суммы $S(N)$ в равенство (4.5), получаем требуемое равенство для $\Psi_{ev}(x,y;N)$.

Теорема 2. *Пусть* $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, $N \geqslant 2$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\Psi_{odd}(x,y;N) =& \frac{N^2}{2\zeta(2)}\Big(\log N + \log\frac{xy}{x+y} + \gamma - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\Big) + \\ &+ O\big(N^{3/2}\log^4 N\big) + O\Big(\frac{x+y}{xy}N\log N\Big).\end{aligned}$$

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\Psi_{odd}(x,y;N) &= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & q\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}_-} [t>0,\, u\leqslant xq,\, v\leqslant yq,\, u+v\leqslant N] = \\ &= \sum_{t\leqslant N}\sum_{u,v\geqslant t}\delta_t(uv-1)\Big[v\geqslant \frac{t}{x}+\frac{1}{u},\, u\geqslant\frac{t}{y}+\frac{1}{v},\, u+v\leqslant N\Big] = \\ &= \sum_{t\leqslant \frac{xyN}{x+y}}\sum_{u\geqslant t/y}\sum_{v\geqslant t/x}\delta_t(uv-1)[u+v\leqslant N] + O(N\log N).\end{aligned}$$

Граница области, внутри которой меняются переменные u и v пересекает не более чем $O(N/t)$ квадратов вида $[at,(a+1)t]\times[bt,(b+1)t]$. Поэтому, применяя леммы 2.1 и 2.2, получим равенства

$$\begin{aligned}\Psi_{odd}(x,y;N) &= \sum_{t\leqslant \frac{xyN}{x+y}}\bigg(\frac{\varphi(t)}{t^2}\int\limits_{t/y}^{\infty}du\int\limits_{t/x}^{\infty}[u+v\leqslant N]dv + O\Big(\frac{N}{t}\psi_2(t)\Big)\bigg) + O(N\log N) = \\ &= \sum_{t\leqslant \frac{xyN}{x+y}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\int\limits_{t/y}^{\infty}du\int\limits_{t/x}^{\infty}[u+v\leqslant N]dv + O(N^{3/2}\log^4 N).\end{aligned}$$

Снова применяя тождество (4.4) и переходя к переменным $\alpha = u/t = u/(\delta t_1)$, $\beta = v/t = v/(\delta t_1)$ находим, что

$$\Psi_{odd}(x,y;N) = \sum_{\delta\leqslant\frac{xyN}{x+y}}\mu(\delta)T(N/\delta) + O(N^{3/2}\log^4 N), \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}T(N) &= \sum_{t\leqslant\frac{xyN}{x+y}} t\int\limits_{1/y}^{\infty}d\alpha\int\limits_{1/x}^{\infty}[\alpha+\beta\leqslant N/t]d\beta = \sum_{t\leqslant\frac{xyN}{x+y}}\frac{t}{2}\Big(\frac{N}{t}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\Big)^2 = \\ &= \frac{N^2}{2}\Big(\log N + \log\frac{xy}{x+y} + \gamma - \frac{3}{2}\Big) + O\Big(\frac{x+y}{xy}N\Big).\end{aligned}$$

Подставляя асимптотическую формулу для $T(N)$ в равенство (4.6) и применяя формулу

$$\sum_{\delta\leqslant M}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\log\delta = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + O\Big(\frac{\log(M+1)}{M}\Big),$$

приходим к утверждению теоремы.

Следствие 1. При $N \geqslant 2$

$$\Psi(N) = \frac{N^2}{\zeta(2)}\Big(\log N + \gamma - \log 2 - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\Big) + O(N^{3/2}\log^4 N).$$

Замечание 1. Сравнивая результаты теорем 1 и 2, можно сделать вывод, что четные и нечетные спиновые цепочки в среднем имеют принципиально разное строение. По-видимому их нужно отделять друг от друга и исследовать независимо. Главный член в теореме 2 в отличие от главного члена в теореме 1, не зависит от x и y поскольку он складывается из матриц $\left(\begin{smallmatrix} t & u \\ v & q \end{smallmatrix}\right)$, в которых $v = o(q)$ и $u = o(q)$.

§ 5. Статистики Гаусса — Кузьмина для квадратичных иррациональностей

Пусть $AX^2 + BX + C \in \mathbb{Z}[X]$ — минимальный многочлен квадратичной иррациональности ω $(A > 0, (A, B, C) = 1)$ и $\varDelta = B^2 - 4AC$. Сопряженное с ω число будем обозначать ω^*. В поле $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ число ω имеет *след* $\mathrm{tr}(\omega) = \omega + \omega^* = -B/A$ и *норму* $\mathcal{N}(\omega) = \omega\omega^* = C/A$. Квадратичная иррациональность ω называется *приведенной*, если она раскладывается в чисто периодическую цепную дробь

$$\omega = [0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n}] \tag{5.1}$$

с периодом $n = \mathrm{p}er(\omega)$. При этом, по теореме Галуа (см. [21]),

$$-1/\omega^* = [0; \overline{a_n, \ldots, a_1}].$$

Множество всех приведенных квадратичных иррациональностей будем обозначать через $\mathcal{R}$. *Длиной* числа $\omega \in \mathcal{R}$ называется величина $\rho(\omega) = 2\log\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(x_0 + \sqrt{\Delta}y_0)$ — фундаментальное решение уравнения Пелля

$$X^2 - \Delta Y^2 = 4.$$

Использование термина “длина” обусловлено тем, что на модулярной поверхности $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$, где $\mathbb{H} = \{(x, y) : \ y > 0\}$ — верхняя полуплоскость, паре квадратичных иррациональностей ω и ω^* соответствует замкнутая геодезическая (проекция геодезической, соединяющей ω и ω^*), длина которой в классической метрике $ds^2 = (dx^2 + dy^2)y^{-2}$ в точности равна $\rho(\omega)$ (см. [6], [22]).

Для приведенной квадратичной иррациональности $\omega = [0; \overline{a_1, \ldots, a_n}]$ положим

$$\mathrm{p}er_e(\omega) = \begin{cases} n, & \text{если } n = \mathrm{p}er(\omega) \text{ четно;} \\ 2n, & \text{если } n = \mathrm{p}er(\omega) \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Тогда фундаментальная единица может быть найдена по формуле Смита (см. [23], [24; § 2.4]).

$$\varepsilon_0^{-1}(\omega) = \omega T(\omega) T^2(\omega) \ldots T^{\mathrm{p}er_e(\omega)-1}(\omega),$$

где $T(\alpha)$ — отображение Гаусса: $T(\alpha) = \{1/\alpha\}$.

Для дальнейших вычислений понадобятся следующие свойства приведенных квадратичных иррациональностей и соответствующих им фундаментальных единиц.

1°. [3; предложение 2.1] Для любого натурального k

$$0 < \mathrm{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) - \varepsilon_0^k(\omega) < 1/2.$$

2°. [3; предложение 4.1] Если $\omega = [0; \overline{a_1, \ldots, a_{2m}}]$, $l = \mathrm{per}_e(\omega)$, $2m = kl$, то

$$\mathrm{T}r(B^{a_1} A^{a_2} \ldots A^{a_{2m}}) = \mathrm{t}r(\varepsilon_0^k(\omega)).$$

Пусть

$$r(N) = \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \varepsilon_0(\omega) \leqslant N}} 1 = \pi_0(2 \log N),$$

где $\pi_0(x)$ — число приведенных квадратичных иррациональностей, длина которых не превосходит x. Из доказательств предложений 4.3, 4.5 статьи [3] (см. также [5]) можно выделить следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Для любого целого $N \geqslant 2$*

$$r(N) = \Psi_{ev}(N) + O(N \log N).$$

Доказательство. Будем сначала предполагать, что $N \geqslant 2$ — действительное число. Согласно свойству 2°, отображение

$$(a_1, \ldots, a_{2m}) \mapsto (k, \omega),$$

которое набору натуральных чисел $(a_1, \ldots, a_{2m})$ ставит в соответствие квадратичную иррациональность $\omega = [0; \overline{a_1, \ldots, a_n}]$ и число $k = 2m/\mathrm{per}_e(\omega)$, является биекцией между множеством $W_{ev}(N)$ и множеством пар (k, ω), где $k \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathcal{R}$ и $\mathrm{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) \leqslant N$. Следовательно

$$\Psi_{ev}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \mathrm{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) \leqslant N}} 1 = \sum_{k \leqslant 2 \log N} \widetilde{r}_k(N), \tag{5.2}$$

где

$$\widetilde{r}_k(N) = \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \mathrm{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) \leqslant N}} 1.$$

Условие $k \leqslant 2 \log N$ можно наложить, поскольку для всех $\omega \in \mathcal{R}$ выполняется неравенство $\varepsilon_0(\omega) \geqslant \varepsilon_0(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 > e^{1/2}$.

Из равенства (5.2) следует, что $\widetilde{r}_1(N) \leqslant \Psi_{ev}(N) \ll N^2$. По свойству 1°

$$r\left(\left(N - \frac{1}{2}\right)^{1/k}\right) \leqslant \widetilde{r}_k(N) \leqslant r(N^{1/k}). \tag{5.3}$$

Поэтому $r(N) \ll N^2$, $\widetilde{r}_k(N) \ll N^{\frac{2}{k}}$ и

$$\sum_{2 \leqslant k \leqslant 2 \log N} \widetilde{r}_k(N) \ll \sum_{2 \leqslant k \leqslant 2 \log N} N^{\frac{2}{k}} \ll N \log N, \tag{5.4}$$

$$\Psi_{ev}(N) = \widetilde{r}_1(N) + O(N \log N).$$

Из (5.3) следует, что
$$r\Big(N-\frac{1}{2}\Big) \leqslant \widetilde{r}_1(N) \leqslant r(N).$$

Значит,
$$\Psi_{ev}(N)+O(N\log N) \leqslant r(N) \leqslant \Psi_{ev}\Big(N+\frac{1}{2}\Big)+O(N\log N).$$

Но для целых N выполняется равенство $\Psi_{ev}\big(N+\frac{1}{2}\big)=\Psi_{ev}(N)$, поэтому утверждение леммы вытекает из полученных оценок на величину $r(N)$.

Следствие 2. При $N \geqslant 2$
$$r(N)=\frac{\log 2}{2\zeta(2)}N^2+O(N^{3/2}\log^4 N).$$

Следствие 3. Пусть $x \geqslant 1$. Тогда
$$\sum_{\substack{\omega\in\mathcal{R}\\ \rho(\omega)\leqslant x}} 1=\frac{e^x\log 2}{2\zeta(2)}+O\big(x^4e^{\frac{3}{4}x}\big).$$

Чтобы вычислить статистики Гаусса — Кузьмина для приведенных квадратичных иррациональностей, для действительных $x,y\in[0,1]$ и $N\geqslant 2$ определим величину (предполагается, последовательность неполных частных продолжается на отрицательные номера по периодичности)
$$r(x,y;N)=\sum_{\substack{\omega\in\mathcal{R}\\ \varepsilon_0(\omega)\leqslant N}}\frac{1}{\mathrm{per}_e(\omega)}\sum_{j=1}^{\mathrm{per}_e(\omega)}\Big[[0;a_{j+1},a_{j+2},\ldots]\leqslant x,\ [0;a_j,a_{j-1},\ldots]\leqslant y]\Big]=$$
$$=\sum_{\substack{\omega\in\mathcal{R}\\ \varepsilon_0(\omega)\leqslant N}}\frac{1}{\mathrm{per}_e(\omega)}\sum_{j=1}^{\mathrm{per}_e(\omega)}\Big[\omega_j\leqslant x,\ -1/\omega_j^*)\leqslant y)\Big],$$

где $\omega_j=T^j(\omega)=[0;a_{j+1},a_{j+2},\ldots]$. В частности, $r(1,1;N)=r(N)$. Для всех эквивалентных чисел $\omega_j=T^j(\omega)$ статистики Гаусса — Кузьмина подсчитываются по одному разу, и сумма $r(x,y;N)$ может быть также записана в виде
$$r(x,y;N)=\sum_{\substack{\omega\in\mathcal{R}\\ \varepsilon_0(\omega)\leqslant N}}[\omega\leqslant x,\ -1/\omega^*\leqslant y].$$

То есть сумма $r(x,y;N)$ описывает поведение в среднем замкнутых геодезических на модулярной поверхности.

Теорема 3. *Пусть* $0\leqslant x,y\leqslant 1$, $N\geqslant 2$. *Тогда*
$$r(x,y;N)=\frac{\log(1+xy)}{2\zeta(2)}N^2+O(N^{3/2}\log^4 N).$$

Доказательство. Рассмотрим суммы

$$\widetilde{r}_k(x,y;N) = \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{R}\\ \mathrm{tr}(\varepsilon_0^k(\omega))\leqslant N}} [\omega\leqslant x,\ -1/\omega^*\leqslant y],$$

$$\widetilde{r}(x,y;N) = \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{R}\\ \mathrm{tr}(\varepsilon_0(\omega))\leqslant N}} [\omega\leqslant x,\ -1/\omega^*\leqslant y] = \widetilde{r}_1(x,y;N).$$

По определению $\widetilde{r}_k(x,y;N)\leqslant\widetilde{r}_k(N)$. Значит, из оценки (5.4) следует, что

$$\sum_{2\leqslant k\leqslant 2\log N}\widetilde{r}_k(x,y;N) = O(N\log N),$$

$$\widetilde{r}(x,y;N) = \sigma(x,y;N) + O(N\log N),$$

где

$$\sigma(x,y;N) = \sum_{1\leqslant k\leqslant 2\log N}\ \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{R}\\ \mathrm{tr}(\varepsilon_0^k(\omega))\leqslant N}} [\omega\leqslant x,\ -1/\omega^*\leqslant y].$$

Согласно свойству 2°, возникшую сумму можно записать в виде

$$\sigma(x,y;N) = \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_{2m})\\ \mathrm{Tr}(B^{a_1}\dots A^{a_{2m}})\leqslant N}} \Big[[0;\overline{a_1,\dots,a_{2m}}]\leqslant x,\ [0;\overline{a_{2m},\dots,a_1}]\leqslant y\Big].$$

Пара натуральных чисел (q,q') $(q\leqslant q')$ может быть дополнена до матрицы $\left(\begin{smallmatrix} p & p'\\ q & q'\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}$ не более чем двумя способами. Поэтому число матриц

$$JB^{a_1}A^{a_2}\dots B^{a_{2m-1}}A^{a_{2m}}J = \begin{pmatrix} p & p'\\ q & q'\end{pmatrix},$$

для которых $q'\leqslant\sqrt{N}$ оценивается как $O(N)$. Для наборов $(a_1,\dots,a_{2m})$, которым соответствует матрица с $q'>\sqrt{N}$

$$0<[0;\overline{a_1,\dots,a_{2m}}]-[0;a_1,\dots,a_{2m}] = [0;\overline{a_1,\dots,a_{2m}}]-\frac{p'}{q'}\leqslant\frac{1}{(q')^2}<\frac{1}{N},$$

$$0<[0;\overline{a_{2m},\dots,a_1}]-[0;a_{2m},\dots,a_1] = [0;\overline{a_{2m},\dots,a_1}]-\frac{q}{q'}\leqslant\frac{1}{(q')^2}<\frac{1}{N}.$$

Следовательно, с одной стороны

$$\begin{aligned}\sigma(x,y;N) &\leqslant \sum_{\left(\begin{smallmatrix} p & p'\\ q & q'\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}_+} [q'>\sqrt{N},\ p'/q'\leqslant x,\ q/q'\leqslant y, p+q'\leqslant N] + O(N) = \\ &= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} p & p'\\ q & q'\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}_+} [p'/q'\leqslant x,\ q/q'\leqslant y, p+q'\leqslant N] + O(N) = \\ &= \Psi_{ev}(x,y;N) + O(N).\end{aligned} \tag{5.5}$$

С другой стороны

$$\sigma(x,y;N) \geqslant \sum_{\left(\begin{smallmatrix} p & p' \\ q & q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_+} \Big[q' > \sqrt{N},\ \frac{p'}{q'} \leqslant x - \frac{1}{N},\ \frac{q}{q'} \leqslant y - \frac{1}{N}, p + q' \leqslant N \Big] + O(N) =$$

$$= \Psi_{ev}\Big(x - \frac{1}{N}, y - \frac{1}{N}; N\Big) + O(N).$$

То есть

$$\Psi_{ev}\Big(x - \frac{1}{N}, y - \frac{1}{N}; N\Big) + O(N) \ll \sigma(x,y;N) \ll \Psi_{ev}(x,y;N) + O(N). \tag{5.6}$$

Если $\min\{x,y\} \leqslant N^{-1/2}$, то теорема 3 следует из теоремы 1 и оценки (5.5). Если же $\min\{x,y\} > N^{-1/2}$, то по теореме 1

$$\Psi_{ev}\Big(x - \frac{1}{N}, y - \frac{1}{N}; N\Big) = \Psi_{ev}(x,y;N) + O(N^{3/2}\log^4 N). \tag{5.7}$$

Объединяя соотношения (5.6)–(5.7) приходим к асимптотической формуле

$$\sigma(x,y;N) = \Psi_{ev}(x,y;N) + O(N^{3/2}\log^4 N).$$

Значит, по теореме 1,

$$\widetilde{r}(x,y;N) = \Psi_{ev}(x,y;N) + O(N^{3/2}\log^4 N) =$$
$$= \frac{\log(1+xy)}{2\zeta(2)} N^2 + O(N^{3/2}\log^4 N).$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что по свойству 1° искомая функция $r(x,y;N)$ связана с $\widetilde{r}(x,y;N)$ неравенствами

$$\widetilde{r}\Big(x,y;N-\frac{1}{2}\Big) \leqslant r(x,y;N) \leqslant \widetilde{r}(x,y;N).$$

Список литературы

[1] Kleban, P., Özlük, A. E. A Farey Fraction Spin Chain. — *Communications in Mathematical Physics*, 1999, 203, 635-647.

[2] Fiala J., Kleban P., Özlük A. E. The phase transition in statistical models defined on Farey fractions. — *J. Stat. Phys.*, 2003, 110, 73-86.

[3] Kallies J., Özlük A. E., Peter M., Snyder C. On asymptotic properties of a number theoretic function arising out of a spin chain model in statistical mechanics. — *Commun. Math. Phys.*, 2001, 222, 9-43.

[4] Peter M. The limit distribution of a number theoretic function arising from a problem in statistical mechanics. — *J. Number Theory*, 2001, 90, 265–280.

[5] Boca F. P. Products of matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ and $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ and the distribution of reduced quadratic irrationals. — *J. Reine Angew. Math.*, 2007, 606, 149-165.

[6] Faivre, C. Distribution of Lévy constants for quadratic numbers. — *Acta Arith.*, 1992, 61, 13-34.

[7] Arnold V. *Arnold's Problems.* — Springer, 2005.

[8] Устинов А. В. О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции. — *Алгебра и анализ*, **20**: 5 (2008), 186–216.

[9] Estermann T. On Kloosterman's sum. — *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.

[10] Быковский В. А. Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей. — *ФПМ*, **11**: 6 (2005), 15–26.

[11] Lévy, P. Sur les lois de probabilité dont dependent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue. — *Bull. Soc. Math. France*, 1929, 57, 178-194.

[12] Lochs G. Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmässigen Kettenbrüche. — *Monatsh. Math.*, **65** (1961), 27–52.

[13] Авдеева М. О. О статистиках неполных частных конечных цепных дробей. — *Функц. анализ и его прил.* **38**: 2 (2004), 1–11.

[14] Авдеева М. О., Быковский В. А. *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса — Кузъмина.* — Владивосток, Дальнаука, 2002 (препринт).

[15] Устинов А. В. О статистиках Гаусса — Кузьмина для конечных цепных дробей. — *Фунд. и прикл. математика* **11** (2005), 195–208.

[16] Быковский В. А., Устинов А. В Статистика траекторий частиц в неоднородной задаче Синая для двумерной решетки. — *Известия РАН, серия математическая*, **73**: 4 (2009), 17–36.

[17] Устинов А. В. О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными. — *Мат. заметки*, **88**: 4 (2010), 594–604.

[18] Boca F. P., Vandehey J. On certain statistical properties of continued fractions with even and with odd partial quotients, preprint arXiv:1008.2983v2 (2010).

[19] Устинов А. В. О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами. — *Известия РАН*, **74**:5 (2010), 145–170.

[20] Виноградов И. М. *Основы теории чисел.* — М.: Наука, 1972.

[21] Galois É. Analyse algébrique. Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques. — *Ann. Math. Pures Appl.* [Ann. Gergonne], 1828/29, 19, 294-301.

[22] Sarnak P. Class numbers of indefinite binary quadratic forms. — *J. Number Theory*, 1982, 15, 229-247.

[23] Smith H. J. S. Note on the Theory of the Pellian Equation and of Binary Quadratic Forms of a Positive Determinant. — *Proc. London Math. Soc.*, 1875, s1-7, 196-208.

[24] Венков Б. А. *Элементарная теория чисел.* ОНТИ, 1931.

А. В. Устинов (A. V. Ustinov)
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН
E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Поступила в редакцию ??.??.2012